УДК 519.248.3

М. Е. Широков

Условия обратимости квантового канала и их применение

Получены условия обратимости квантового канала (некоммутативного марковского отображения) относительно полного семейства квантовых состояний ограниченного ранга. Дано описание класса квантовых каналов, обратимых относительно заданного полного семейства чистых состояний (как ортогональных, так и неортогональных). Рассмотрены приложения полученных результатов в квантовой теории информации.

Библиография: 20 названий.

Ключевые слова: квантовые состояния, квантовые каналы, относительная энтропия, χ-граница ансамбля состояний.

DOI: 10.4213/sm8156

§ 1. Введение

Квантовые каналы – линейные сохраняющие след вполне положительные отображения между банаховыми пространствами ядерных операторов (классов Шаттена порядка 1) – играют роль динамических отображений в квантовой теории [1]. Они являются некоммутативными аналогами марковских операторов в классической теории вероятностей.

Понятие обратимости (достаточности) квантового канала относительно заданного семейства состояний (положительных ядерных операторов с единичным следом) появилось в 80-х годах прошлого века при анализе некоторых общих математических вопросов квантовой теории, в частности, вопроса о сохранении ряда количественных характеристик состояний под действием квантового канала [2]–[4]. Обратимость квантового канала Φ относительно семейства входных состояний $\mathfrak{S}$ означает существование квантового канала Ψ, действующего из выходного пространства канала Φ в его входное пространство, такого, что $\Psi(\Phi(\rho)) = \rho$ для любого состояния ρ из $\mathfrak{S}$.

Понятие обратимости квантового канала связано с теоремой Петца, которая утверждает, что необходимым и достаточным условием равенства в неравенстве

$$H(\Phi(\rho)\,\|\,\Phi(\sigma)) \leqslant H(\rho\,\|\,\sigma),$$

выражающем фундаментальное свойство монотонности относительной энтропии $H(\rho\|\sigma)$ состояний ρ и σ под действием квантового канала Φ, является обратимость канала Φ относительно семейства $\mathfrak{S} = \{\rho, \sigma\}$ (см. [2; теорема 5]).

Работа выполнена при поддержке научной программы РАН “Математическая теория управления и динамических систем”, Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 12-01-00319-а, № 13-01-00295а)

Важное следствие этой теоремы связано с ключевым в квантовой теории информации понятием χ-границы[1] $\chi(\{\pi_i,\rho_i\})$ ансамбля квантовых состояний $\{\pi_i,\rho_i\}$ – набора состояний $\{\rho_i\}$ с соответствующим распределением вероятностей $\{\pi_i\}$. В силу этого следствия необходимым и достаточным условием сохранения χ-границы ансамбля $\{\pi_i,\rho_i\}$ под действием квантового канала Φ, т.е. равенства в общем неравенстве

$$\chi(\{\pi_i,\Phi(\rho_i)\})\leqslant\chi(\{\pi_i,\rho_i\}),$$

является обратимость канала Φ относительно семейства $\mathfrak{S}=\{\rho_i\}$.

Недавние исследования показали, что обратимость квантового канала является критерием сохранения многих других важных характеристик под действием этого канала [5], [6], а также что необходимые и достаточные условия совпадения пропускных способностей двух различных протоколов передачи классической информации по квантовому каналу Φ можно сформулировать в терминах обратимости так называемого комплементарного канала $\widehat{\Phi}$ (см. определение в § 2) относительно некоторых семейств чистых состояний [7].

Начиная с работ Петца, условия обратимости квантового канала (а также отображений более широкого класса) относительно семейств из двух и большего числа состояний исследовались многими авторами (см. [6], [8] и библиографию в этих работах). Отличительная особенность настоящей статьи – использование при анализе свойства обратимости результатов, связанных с понятием комплементарного канала, важная роль которого в разных вопросах квантовой теории информации обнаружена сравнительно недавно [9].

Структура статьи следующая. В §§ 2, 3 дан обзор необходимых понятий и предварительных результатов. В § 4 получены необходимые условия обратимости квантового канала относительно семейств состояний ограниченного ранга, выраженные в терминах комплементарного канала (теорема 3) и дано описание класса квантовых каналов, обратимых относительно семейств чистых состояний (как ортогональных, так и неортогональных), обладающих свойством полноты (предложение 1, теорема 4). В § 5 рассмотрены приложения данных результатов в квантовой теории информации. Получено условие сохранения χ-границы произвольного (дискретного или непрерывного) ансамбля состояний ограниченного ранга под действием квантового канала (теорема 5) и представлены некоторые его следствия.

В приложении приведено обобщение теоремы Петца на случай произвольных квантовых состояний.

§ 2. Предварительные сведения

Пусть $\mathscr{H}$ – сепарабельное гильбертово пространство, $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ и $\mathfrak{T}(\mathscr{H})$ – банаховы пространства всех линейных ограниченных операторов в $\mathscr{H}$ с операторной нормой $\|\cdot\|$ и всех ядерных операторов в $\mathscr{H}$ со следовой нормой $\|\cdot\|_1=\operatorname{Tr}|\cdot|$ (см. [1], [10]). Замкнутое выпуклое подмножество

$$\mathfrak{S}(\mathscr{H})=\{A\in\mathfrak{T}(\mathscr{H})\mid A\geqslant 0,\ \operatorname{Tr}A=1\}$$

[1]Информационный смысл этой характеристики, называемой в англоязычной литературе “the Holevo quantity”, рассмотрен в [4; гл. 5].

пространства $\mathfrak{T}(\mathscr{H})$ является полным сепарабельным метрическим пространством с метрикой, определяемой следовой нормой. Следуя традиции, операторы из $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$ будем обозначать греческими буквами ρ, σ, ω и называть *состояниями*, поскольку каждый такой оператор ρ задает линейный нормальный функционал $A \mapsto \operatorname{Tr} A\rho$ с единичной нормой на алгебре $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ (см. [11]). *Чистыми состояниями* являются одномерные проекторы – крайние точки множества $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$. Носитель $\operatorname{supp}\rho$ состояния ρ – это ортогональное дополнение его ядра $\ker\rho$, размерность носителя будем называть рангом состояния: $\operatorname{rank}\rho = \dim\operatorname{supp}\rho$. Состояние ρ, у которого $\ker\rho = \{0\}$, называется невырожденным.

Для векторов и операторов ранга 1 в гильбертовом пространстве будем использовать дираковские обозначения $|\varphi\rangle, |\chi\rangle\langle\psi|, \dots$ (в которых действие оператора $|\chi\rangle\langle\psi|$ на вектор $|\varphi\rangle$ – это вектор $\langle\psi,\varphi\rangle|\chi\rangle$). Ортонормированные наборы векторов $\{|\varphi_i\rangle\}_{i\in I}$, где $I = \{1,2,\dots,n\}$ или $I = \mathbb{N}$, будем для краткости обозначать $\{|i\rangle\}_{i\in I}$.

Тождественный оператор в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ и тождественное преобразование банахова пространства $\mathfrak{T}(\mathscr{H})$ обозначим $I_{\mathscr{H}}$ и $\mathrm{Id}_{\mathscr{H}}$ соответственно.

Набор векторов $\{|\psi_i\rangle\}$ в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ является *переполненной системой*, если

$$\sum_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| = I_{\mathscr{H}}.$$

Пример переполненной системы – ортонормированный базис в $\mathscr{H}$.

Гильбертово пространство конечной размерности d (которое можно отождествить с $\mathbb{C}^d$) обозначим $\mathscr{H}_d$.

Пусть $\mathscr{H}_A$ и $\mathscr{H}_B$ – гильбертовы пространства, которые будем называть входным и выходным соответственно, а $\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathscr{H}_A) \to \mathfrak{T}(\mathscr{H}_B)$ – линейное отображение, которое положительно и сохраняет след ($\Phi(A) \geqslant 0$ и $\operatorname{Tr}\Phi(A) = \operatorname{Tr} A$ для любого $A \geqslant 0$). *Двойственное* отображение $\Phi^*\colon \mathfrak{B}(\mathscr{H}_B) \to \mathfrak{B}(\mathscr{H}_A)$ (определяемое соотношением $\operatorname{Tr}\Phi(A)B = \operatorname{Tr} A\Phi^*(B)$, $A \in \mathfrak{T}(\mathscr{H}_A)$, $B \in \mathfrak{B}(\mathscr{H}_B)$) является положительным отображением таким, что $\Phi^*(I_{\mathscr{H}_B}) = I_{\mathscr{H}_A}$.

Линейное отображение $\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathscr{H}_A) \to \mathfrak{T}(\mathscr{H}_B)$ называется *вполне положительным*, если отображение $\Phi \otimes \mathrm{Id}_{\mathscr{H}_d}$ из $\mathfrak{T}(\mathscr{H}_A \otimes \mathscr{H}_d)$ в $\mathfrak{T}(\mathscr{H}_B \otimes \mathscr{H}_d)$ является положительным при каждом натуральном d (о равносильных определениях полной положительности см. [4; раздел 6.2]).

Определение 1. Линейное вполне положительное сохраняющее след отображение $\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathscr{H}_A) \to \mathfrak{T}(\mathscr{H}_B)$ называется *квантовым каналом*.

Данное определение квантового канала соответствует картине Шредингера, в которой динамика квантовой системы описывается посредством эволюции состояний. В картине Гейзенберга квантовым каналом является двойственное отображение $\Phi^*\colon \mathfrak{B}(\mathscr{H}_B) \to \mathfrak{B}(\mathscr{H}_A)$, определяющее эволюцию квантовых наблюдаемых [1; гл. 3].

Важным примером квантового канала является операция частичного следа

$$\mathfrak{T}(\mathscr{H} \otimes \mathscr{K}) \ni C \mapsto \operatorname{Tr}_{\mathscr{K}} C \in \mathfrak{T}(\mathscr{H}),$$

которая переводит оператор $A \otimes B$ в оператор $A \operatorname{Tr} B$, а на операторы общего вида продолжается по линейности и непрерывности (точное определение см. в [1], [4]). Эта операция является некоммутативным аналогом операции перехода от совместного распределения случайных величин к их парциальным распределениям в классической теории вероятностей.

Используя теорему Стайнспринга о представлении вполне положительных отображений C^*-алгебр и свойства алгебры $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$, можно получить (см. [1], [4]) следующее представление произвольного квантового канала $\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathscr{H}_A) \to \mathfrak{T}(\mathscr{H}_B)$: существуют гильбертово пространство $\mathscr{H}_E$ и изометрия $V\colon \mathscr{H}_A \to \mathscr{H}_B \otimes \mathscr{H}_E$ такие, что

$$\Phi(A) = \operatorname{Tr}_{\mathscr{H}_E} VAV^* \quad \forall A \in \mathfrak{T}(\mathscr{H}_A). \tag{2.1}$$

Данное представление будем далее называть представлением Стайнспринга канала Φ, а оператор V – изометрией Стайнспринга.

Квантовый канал

$$\mathfrak{T}(\mathscr{H}_A) \ni A \mapsto \widehat{\Phi}(A) = \operatorname{Tr}_{\mathscr{H}_B} VAV^* \in \mathfrak{T}(\mathscr{H}_E) \tag{2.2}$$

называется *комплементарным* к каналу Φ (см. [4; раздел 6.6], [9])[2]. Комплементарный канал определен однозначно: если $\widehat{\Phi}'\colon \mathfrak{T}(\mathscr{H}_A) \to \mathfrak{T}(\mathscr{H}_{E'})$ – канал, задаваемый формулой (2.2) с помощью изометрии Стайнспринга $V'\colon \mathscr{H}_A \to \mathscr{H}_B \otimes \mathscr{H}_{E'}$, то каналы $\widehat{\Phi}$ и $\widehat{\Phi}'$ изометрически эквивалентны в смысле следующего определения (см. приложение в [9]).

Определение 2. Каналы $\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathscr{H}_A) \to \mathfrak{T}(\mathscr{H}_B)$ и $\Phi'\colon \mathfrak{T}(\mathscr{H}_A) \to \mathfrak{T}(\mathscr{H}_B')$ называются *изометрически эквивалентными*, если существует частичная изометрия $W\colon \mathscr{H}_B \to \mathscr{H}_{B'}$ такая, что

$$\Phi'(A) = W\Phi(A)W^*, \quad \Phi(A) = W^*\Phi'(A)W, \qquad A \in \mathfrak{T}(\mathscr{H}_A). \tag{2.3}$$

Понятие изометрической эквивалентности близко к понятию унитарной эквивалентности. Действительно, изометрическая эквивалентность каналов Φ, Φ' означает унитарную эквивалентность этих же каналов, у которых выходные пространства $\mathscr{H}_B$, $\mathscr{H}_{B'}$ заменены на подпространства

$$\mathscr{H}_B^{\Phi} = \bigvee_{\rho \in \mathfrak{S}(\mathscr{H}_A)} \operatorname{supp} \Phi(\rho), \qquad \mathscr{H}_{B'}^{\Phi'} = \bigvee_{\rho \in \mathfrak{S}(\mathscr{H}_A)} \operatorname{supp} \Phi'(\rho).$$

Понятие изометрической эквивалентности удобно, поскольку, имея дело с конкретным представлением квантового канала Φ, не всегда просто определить соответствующее подпространство $\mathscr{H}_B^{\Phi}$.

Представление Стайнспринга (2.1) называется *минимальным*, если множество

$$\mathscr{M} = \bigl\{(X \otimes I_{\mathscr{H}_E})V|\varphi\rangle \mid \varphi \in \mathscr{H}_A,\ X \in \mathfrak{B}(\mathscr{H}_B)\bigr\}$$

плотно в $\mathscr{H}_B \otimes \mathscr{H}_E$. Комплементарный канал $\widehat{\Phi}$, определенный формулой (2.2) посредством минимального представления Стайнспринга, обладает следующим свойством:

$$\ker \rho = \{0\} \quad \Longrightarrow \quad \ker \widehat{\Phi}(\rho) = \{0\}. \tag{2.4}$$

[2] В литературе квантовый канал $\widehat{\Phi}$ также называется *сопряженным* к каналу Φ (см. [12]).

С помощью представления Стайнспринга (2.1) нетрудно получить представление Крауса

$$\Phi(A) = \sum_k V_k A V_k^*, \qquad A \in \mathfrak{T}(\mathscr{H}_A), \tag{2.5}$$

в котором $\{V_k\}$ – набор линейных ограниченных операторов из $\mathscr{H}_A$ в $\mathscr{H}_B$ такой, что $\sum_k V_k^* V_k = I_{\mathscr{H}_A}$. Эти операторы определяются соотношением

$$\langle\varphi|V_k\psi\rangle = \langle\varphi\otimes k|V\psi\rangle, \qquad \varphi\in\mathscr{H}_B, \quad \psi\in\mathscr{H}_A,$$

где $\{|k\rangle\}$ – некоторый ортонормированный базис в пространстве $\mathscr{H}_E$. Нетрудно видеть, что комплементарный канал (2.2) имеет представление

$$\widehat{\Phi}(A) = \sum_{k,l} \mathrm{Tr}[V_k A V_l^*]|k\rangle\langle l|, \qquad A \in \mathfrak{T}(\mathscr{H}_A). \tag{2.6}$$

Важную роль в статье играет следующий класс квантовых каналов [4], [13].

Определение 3. Квантовый канал $\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathscr{H}_A) \to \mathfrak{T}(\mathscr{H}_B)$ называется *классически-квантовым* (кратко, *c-q каналом*), если он имеет представление

$$\Phi(A) = \sum_{k=1}^{\dim\mathscr{H}_A} \langle k|Ak\rangle\sigma_k, \qquad A \in \mathfrak{T}(\mathscr{H}_A),$$

в котором $\{|k\rangle\}$ – ортонормированный базис в $\mathscr{H}_A$, а $\{\sigma_k\}$ – набор состояний из $\mathfrak{S}(\mathscr{H}_B)$.

Следуя [6], [8], введем основное понятие статьи.

Определение 4. Квантовый канал $\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathscr{H}_A) \to \mathfrak{T}(\mathscr{H}_B)$ называется *обратимым* относительно семейства $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{S}(\mathscr{H}_A)$, если существует квантовый канал $\Psi\colon \mathfrak{T}(\mathscr{H}_B) \to \mathfrak{T}(\mathscr{H}_A)$ такой, что $\rho = \Psi\circ\Phi(\rho)$ для всех $\rho\in\mathfrak{S}$.[3]

Канал Ψ в данном определении будем называть *обращающим каналом* для канала Φ относительно семейства $\mathfrak{S}$.

Отметим, что свойство обратимости относительно заданного семейства является общим для класса изометрически эквивалентных каналов.

Лемма 1. *Пусть $\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathscr{H}_A) \to \mathfrak{T}(\mathscr{H}_B)$ и $\Phi'\colon \mathfrak{T}(\mathscr{H}_A) \to \mathfrak{T}(\mathscr{H}_{B'})$ – изометрически эквивалентные квантовые каналы. Обратимость канала Φ относительно семейства $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{S}(\mathscr{H}_A)$ равносильна обратимости канала Φ' относительно этого семейства.*

Доказательство. Пусть Ψ – обращающий канал для канала Φ относительно семейства $\mathfrak{S}$. Пусть $\Theta(\,\cdot\,) = W^*(\,\cdot\,)W + \sigma\,\mathrm{Tr}(I_{\mathscr{H}_{B'}} - WW^*)(\,\cdot\,)$ – канал из $\mathfrak{T}(\mathscr{H}_{B'})$ в $\mathfrak{T}(\mathscr{H}_B)$, где W – частичная изометрия из (2.3), а σ – фиксированное состояние в $\mathfrak{S}(\mathscr{H}_B)$. Тогда $\Psi\circ\Theta$ – обращающий канал для канала Φ' относительно семейства $\mathfrak{S}$.

[3] В более ранних работах это свойство называлось достаточностью канала Φ относительно семейства $\mathfrak{S}$ (см. [2], [14]).

Энтропия фон Неймана состояния ρ из $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$ определяется выражением[4]

$$H(\rho) = -\operatorname{Tr}\rho\log\rho = -\sum_{i=1}^{+\infty}\lambda_i\log\lambda_i,$$

в котором $\{\lambda_i\}$ – набор собственных значений состояния ρ (см. [3], [4], [15]).

Квантовая относительная энтропия состояний ρ и σ из $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$ определяется выражением

$$H(\rho\|\sigma) = \sum_{i=1}^{+\infty}\langle i|[\rho\log\rho-\rho\log\sigma]i\rangle,$$

в котором $\{|i\rangle\}_{i=1}^{+\infty}$ – ортонормированный базис из собственных векторов состояния ρ (или σ) и считается, что $H(\rho\|\sigma)=+\infty$, если $\operatorname{supp}\rho\nsubseteq\operatorname{supp}\sigma$ (см. [3], [4], [15]).

В дальнейшем нам потребуются некоторые понятия, связанные со структурой множества состояний в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}\otimes\mathscr{K}$, которое описывает составную квантовую систему.

Ранг Шмидта чистого состояния $|\psi\rangle\langle\psi|$ из $\mathfrak{S}(\mathscr{H}\otimes\mathscr{K})$ определяется как число ненулевых слагаемых в разложении Шмидта

$$|\psi\rangle = \sum_i\lambda_i|\alpha_i\rangle\otimes|\beta_i\rangle,$$

где $\{|\alpha_i\rangle\}$, $\{|\beta_i\rangle\}$ – ортонормированные базисы в $\mathscr{H}$ и $\mathscr{K}$, он совпадает с рангом частичных состояний $\operatorname{Tr}_{\mathscr{H}}|\psi\rangle\langle\psi|$ и $\operatorname{Tr}_{\mathscr{K}}|\psi\rangle\langle\psi|$ (см. [16]).

Класс Шмидта $\mathfrak{S}_r$ порядка $r\in\mathbb{N}$ – это выпуклое замыкание множества всех чистых состояний из $\mathfrak{S}(\mathscr{H}\otimes\mathscr{K})$ с рангом Шмидта, не превосходящим r (см. [16], [17]).[5] В этой терминологии $\mathfrak{S}_1$ – множество всех сепарабельных (несцепленных) состояний из $\mathfrak{S}(\mathscr{H}\otimes\mathscr{K})$ (см. [4], [15]).

Квантовый канал $\Phi\colon\mathfrak{T}(\mathscr{H}_A)\to\mathfrak{T}(\mathscr{H}_B)$ называется *разрушающим сцепленность*, если для любого гильбертова пространства $\mathscr{K}$ состояние $\Phi\otimes\mathrm{Id}_{\mathscr{K}}(\omega)$ является сепарабельным в $\mathfrak{S}(\mathscr{H}_B\otimes\mathscr{K})$ при любом состоянии $\omega\in\mathfrak{S}(\mathscr{H}_A\otimes\mathscr{K})$ (см. [13]). Это понятие имеет следующее естественное обобщение (предложенное в [16]).

Определение 5. Квантовый канал $\Phi\colon\mathfrak{T}(\mathscr{H}_A)\to\mathfrak{T}(\mathscr{H}_B)$ называется *частично разрушающим сцепленность порядка* r (кратко, r-PEB каналом), если для любого гильбертова пространства $\mathscr{K}$ состояние $\Phi\otimes\mathrm{Id}_{\mathscr{K}}(\omega)$ принадлежит классу Шмидта $\mathfrak{S}_r\subset\mathfrak{S}(\mathscr{H}_B\otimes\mathscr{K})$ при любом состоянии $\omega\in\mathfrak{S}(\mathscr{H}_A\otimes\mathscr{K})$.

В этой терминологии квантовые каналы, разрушающие сцепленность, – это 1-PEB каналы. Свойства конечномерных r-PEB каналов изучены в [16], где показано, в частности, что класс r-PEB каналов совпадает с классом каналов, имеющих представление Крауса (2.5), в котором $\operatorname{rank}V_k\leqslant r$ для всех k.

[4]Здесь и далее log – это натуральный логарифм.

[5]В конечномерном случае $\mathfrak{S}_r$ – множество всех конечных выпуклых комбинаций чистых состояний с рангом Шмидта $\leqslant r$ (в силу теоремы Каратеодори), в бесконечномерном случае множество $\mathfrak{S}_r$ не исчерпывается даже счетными выпуклыми комбинациями чистых состояний с рангом Шмидта $\leqslant r$ (при каждом r) [17].

Однако в бесконечномерном случае первый класс существенно шире второго, более того, при каждом r существуют r-PEB каналы, у которых все операторы в любом представлении Крауса имеют бесконечный ранг [17].

§ 3. Теорема Петца и критерий обратимости

Фундаментальный результат, связанный с понятием квантовой относительной энтропии, – это свойство монотонности (невозрастания) под действием квантового канала, которое выражается неравенством

$$H(\Phi(\rho)\|\Phi(\sigma)) \leqslant H(\rho\|\sigma), \tag{3.1}$$

имеющим место для любого канала $\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathscr{H}_A)\to\mathfrak{T}(\mathscr{H}_B)$ и любых состояний ρ и σ из $\mathfrak{S}(\mathscr{H}_A)$.

Будем далее рассматривать состояния ρ и σ, для которых $H(\rho\|\sigma)<+\infty$. Это, в частности, означает, что $\operatorname{supp}\rho\subseteq\operatorname{supp}\sigma$. Поэтому будем считать, что σ и $\Phi(\sigma)$ – невырожденные состояния в $\mathfrak{S}(\mathscr{H}_A)$ и в $\mathfrak{S}(\mathscr{H}_B)$ соответственно (общий случай сводится к этому заменой $\mathscr{H}_A$ на $\operatorname{supp}\sigma$ и $\mathscr{H}_B$ на $\operatorname{supp}\Phi(\sigma)$).

Следующая теорема Петца характеризует случай равенства в (3.1).

Теорема 1. *Пусть $\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathscr{H}_A)\to\mathfrak{T}(\mathscr{H}_B)$ – квантовый канал, а ρ и σ – такие состояния из $\mathfrak{S}(\mathscr{H}_A)$, что $H(\rho\|\sigma)<+\infty$. Пусть $\Theta_\sigma\colon \mathfrak{T}(\mathscr{H}_B)\to\mathfrak{T}(\mathscr{H}_A)$ – квантовый канал, преддвойственный к отображению*

$$\mathfrak{B}(\mathscr{H}_A)\ni A\mapsto\Theta^*_\sigma(A)=C\Phi(BAB)C\in\mathfrak{B}(\mathscr{H}_B),\quad B=[\sigma]^{1/2},\quad C=[\Phi(\sigma)]^{-1/2}.$$

Следующие утверждения равносильны:

(i) $H(\Phi(\rho)\|\Phi(\sigma))=H(\rho\|\sigma)$;

(ii) $\rho=\Theta_\sigma(\Phi(\rho))$;

(iii) *канал Φ обратим относительно состояний ρ и σ.*

Заметим, что импликация (iii) $\Longrightarrow$ (i) в данной теореме прямо следует из монотонности относительной энтропии, а импликация (ii) $\Longrightarrow$ (iii) очевидна, поскольку нетрудно проверить, что $\sigma=\Theta_\sigma(\Phi(\sigma))$.

Заметим также, что действие канала Θ_σ на состояния ϱ из $\mathfrak{S}(\mathscr{H}_B)$ такие, что $\lambda\varrho\leqslant\Phi(\sigma)$ при некотором $\lambda>0$, дается явной формулой

$$\Theta_\sigma(\varrho)=B\Phi^*(C\varrho C)B,\qquad B=[\sigma]^{1/2},\quad C=[\Phi(\sigma)]^{-1/2}$$

(условие $\lambda\varrho\leqslant\Phi(\sigma)$ обеспечивает ограниченность оператора $C\varrho C$).

Теорема 1 была сформулирована и доказана в [2] в терминах отображений между алгебрами фон Неймана и нормальных состояний на этих алгебрах, причем оба состояния ρ и σ предполагались точными (т.е. невырожденными в нашей терминологии). Поэтому утверждение теоремы 1 прямо следует из теоремы в [2] только для невырожденного состояния ρ. Возможный вариант обобщения на случай произвольного состояния ρ приведен в приложении. Отметим, что в конечномерном случае такое обобщение следует из теоремы в [5; раздел 5.1].

Определение 6. Семейство $\mathfrak{S}$ состояний из $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$ называется *полным*, если для любого положительного оператора A из $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ существует состояние ρ из $\mathfrak{S}$ такое, что $\operatorname{Tr} A\rho > 0$.

Семейство $\{|\varphi_\lambda\rangle\langle\varphi_\lambda|\}_{\lambda\in\Lambda}$ чистых состояний из $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$ является полным тогда и только тогда, когда линейная оболочка семейства $\{|\varphi_\lambda\rangle\}_{\lambda\in\Lambda}$ плотна в $\mathscr{H}$. Нетрудно показать, что произвольное полное семейство любых состояний из $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$ содержит счетное полное подсемейство [14; лемма 2].

В [14] получен критерий обратимости канала относительно полных семейств состояний, который мы будем использовать в следующем сокращенном виде (где $\Theta_{\overline{\rho}}$ – канал, определенный в теореме 1 при $\sigma = \overline{\rho}$).

Теорема 2. *Квантовый канал* $\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathscr{H}_A) \to \mathfrak{T}(\mathscr{H}_B)$ *обратим относительно полного счетного семейства* $\{\rho_i\}$ *состояний из* $\mathfrak{S}(\mathscr{H}_A)$ *тогда и только тогда, когда* $\rho_i = \Theta_{\overline{\rho}}(\Phi(\rho_i))$ *для всех* i, *где* $\overline{\rho} = \sum_i \pi_i\rho_i$, *а* $\{\pi_i\}$ *– любое невырожденное распределение вероятностей.*

Заметим, что утверждение теоремы 2 можно вывести из теоремы 1, показав, используя свойства относительной энтропии, что $H(\rho_i\|\overline{\rho}) < +\infty$ при всех i.

§ 4. Условия обратимости квантового канала относительно полных семейств состояний

4.1. Семейства состояний ограниченного ранга. Используя теорему 2, можно получить необходимое условие обратимости квантового канала относительно полного семейства состояний ограниченного ранга, выраженное в терминах комплементарного канала.

Теорема 3. *Пусть* $\mathfrak{S} = \{\rho_i\}_{i=1}^n$, $n \leqslant +\infty$, *– полное семейство состояний из* $\mathfrak{S}(\mathscr{H}_A)$ *такое, что* $\operatorname{rank}\rho_i \leqslant r$ *для всех* i. *Если квантовый канал* $\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathscr{H}_A) \to \mathfrak{T}(\mathscr{H}_B)$ *обратим относительно семейства* $\mathfrak{S}$, *то его комплементарный канал* $\widehat{\Phi}\colon \mathfrak{T}(\mathscr{H}_A) \to \mathfrak{T}(\mathscr{H}_E)$ *имеет представление Крауса* (2.5) *с числом слагаемых* $n \cdot \min\{\dim\ker\Phi^* + r^2, \dim\mathscr{H}_B\}$ *такое, что* $\operatorname{rank} V_k \leqslant r$ *для всех* k, *и, следовательно, является* PEB-*каналом порядка* r.

Если указанное выше предположение верно при $r = 1$, *т.е.* $\rho_i = |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$ *для всех* i, *то*

$$\widehat{\Phi}(A) = \sum_{i=1}^{n} \langle\phi_i|A\phi_i\rangle \sum_{k=1}^{m} |\psi_{ik}\rangle\langle\psi_{ik}|, \qquad A \in \mathfrak{T}(\mathscr{H}_A), \tag{4.1}$$

где $m = \min\{\dim\ker\Phi^* + 1, \dim\mathscr{H}_B\}$, $\{|\phi_i\rangle\}_{i=1}^n$ *– переполненная система векторов в* $\mathscr{H}_A$, *определяемых с помощью произвольного невырожденного распределения вероятностей* $\{\pi_i\}_{i=1}^n$ *формулой*

$$|\phi_i\rangle = \sqrt{\pi_i\overline{\rho}_\pi^{\,-1}}\,|\varphi_i\rangle, \qquad \overline{\rho}_\pi = \sum_{i=1}^{n} \pi_i|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|, \tag{4.2}$$

а $\{|\psi_{ik}\rangle\}$ *– набор векторов в гильбертовом пространстве* $\mathscr{H}_E$ *такой, что* $\sum_{k=1}^m \|\psi_{ik}\|^2 = 1$ *и* $\langle\psi_{il}|\psi_{ik}\rangle = 0$ *для всех* $k \neq l$ *при каждом* $i = \overline{1,n}$. *Следовательно, канал* Φ *изометрически эквивалентен каналу*

$$\Phi'(A) = \sum_{i,j=1}^{n} \langle\phi_i|A\phi_j\rangle|i\rangle\langle j| \otimes \sum_{k,l=1}^{m} \langle\psi_{jl}|\psi_{ik}\rangle|k\rangle\langle l| \tag{4.3}$$

из $\mathfrak{T}(\mathscr{H}_A)$ *в* $\mathfrak{T}(\mathscr{H}_n \otimes \mathscr{H}_m)$, *где* $\{|i\rangle\}_{i=1}^n$ *и* $\{|k\rangle\}_{k=1}^m$ *– произвольные ортонормированные базисы в* $\mathscr{H}_n$ *и в* $\mathscr{H}_m$ *соответственно.*

Первое утверждение теоремы 3 означает, что канал $\widehat{\Phi}$ обладает следующим свойством: для любого гильбертова пространства $\mathscr{K}$ и любого состояния ω из $\mathfrak{S}(\mathscr{H}_A \otimes \mathscr{K})$ состояние $\widehat{\Phi} \otimes \mathrm{Id}_{\mathscr{K}}(\omega)$ является *счетно разложимым* состоянием в классе Шмидта $\mathfrak{S}_r \subset \mathfrak{S}(\mathscr{H}_E \otimes \mathscr{K})$, т.е. его можно представить в виде счетной выпуклой комбинации чистых состояний с рангом Шмидта $\leqslant r$ (в $\mathfrak{S}_r$ существуют состояния, которые не являются счетно разложимыми [17]).

Доказательство. Пусть $\widehat{\Phi}(\rho) = \sum_{k=1}^d V_k \rho V_k^*$, $d \leqslant +\infty$, – представление Крауса канала $\widehat{\Phi}\colon \mathfrak{T}(\mathscr{H}_A) \to \mathfrak{T}(\mathscr{H}_E)$, полученное посредством минимального представления Стайнспринга с изометрией $V\colon \mathscr{H}_A \to \mathscr{H}_E \otimes \mathscr{H}_C$ (см. § 2). Комплементарный канал $\Psi = \widehat{\widehat{\Phi}}$ к каналу $\widehat{\Phi}$, определенный с помощью этого представления, имеет вид

$$\mathfrak{T}(\mathscr{H}_A) \ni A \mapsto \Psi(A) = \sum_{k,l=1}^{d} [\operatorname{Tr} V_k A V_l^*]|k\rangle\langle l| \in \mathfrak{T}(\mathscr{H}_C),$$

где $\{|k\rangle\}_{k=1}^d$ – ортонормированный базис в d-мерном гильбертовом пространстве $\mathscr{H}_C$.

Поскольку $\Psi = \widehat{\widehat{\Phi}}$, каналы Φ и Ψ изометрически эквивалентны (см. § 2). В силу леммы 1 канал Ψ обратим относительно семейства $\{\rho_i\}$.

Пусть $\{\pi_i\}_{i=1}^n$ – произвольное невырожденное распределение вероятностей и $\overline{\rho}_\pi = \sum_{i=1}^n \pi_i \rho_i$. В силу свойства (2.4) $\Psi(\overline{\rho}_\pi)$ – невырожденное состояние в $\mathfrak{S}(\mathscr{H}_C)$. В силу теоремы 2 из условия обратимости следует, что $A_i = \Psi^*(B_i)$ для всех i, где $A_i = \pi_i[\overline{\rho}_\pi]^{-1/2}\rho_i[\overline{\rho}_\pi]^{-1/2}$ и $B_i = \pi_i[\Psi(\overline{\rho}_\pi)]^{-1/2}\Psi(\rho_i)[\Psi(\overline{\rho}_\pi)]^{-1/2}$ – положительные операторы в $\mathfrak{B}(\mathscr{H}_A)$ и в $\mathfrak{B}(\mathscr{H}_C)$ соответственно.

Заметим, что

$$\Psi^*(C) = \sum_{k,l=1}^{d} \langle l|Ck\rangle V_l^* V_k, \qquad C \in \mathfrak{B}(\mathscr{H}_C).$$

Поскольку $A_i = \Psi^*(B_i)$ – оператор ранга $\leqslant r$, из приведенной ниже леммы 2 следует, что $B_i = \sum_{j=1}^m |\psi_{ij}\rangle\langle\psi_{ij}|$, где $m = \min\{\dim\ker\Psi^* + r^2, \dim\mathscr{H}_C\}$, а $\{|\psi_{ij}\rangle\}_{j=1}^m$ – набор векторов из $\mathscr{H}_C$, при каждом $i = \overline{1,n}$. Из невырожденности состояния $\Psi(\overline{\rho}_\pi) \in \mathfrak{S}(\mathscr{H}_C)$ следует, что

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} |\psi_{ij}\rangle\langle\psi_{ij}| = \sum_{i=1}^{n} B_i = I_{\mathscr{H}_C}.$$

В силу приведенной ниже леммы 3

$$\widehat{\Phi}(\,\cdot\,)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}W_{ij}(\,\cdot\,)W_{ij}^{*}, \tag{4.4}$$

где $W_{ij}=\sum_{k=1}^{d}\langle\psi_{ij}|k\rangle V_k$. Поскольку $A_i=\Psi^*(\sum_{j=1}^{m}|\psi_{ij}\rangle\langle\psi_{ij}|)$ – оператор ранга $\leqslant r$ при каждом i и

$$\Psi^*(|\psi_{ij}\rangle\langle\psi_{ij}|)=\sum_{k,l=1}^{d}\langle l|\psi_{ij}\rangle\langle\psi_{ij}|k\rangle V_l^*V_k=W_{ij}^*W_{ij}, \tag{4.5}$$

набор $\{W_{ij}\}$ состоит из операторов ранга $\leqslant r$. Для завершения доказательства первой части теоремы достаточно заметить, что частичная изометрия в соотношении вида (2.3), выражающем изометрическую эквивалентность каналов Φ и Ψ, – это изометрическое вложение $\mathscr{H}_C$ в $\mathscr{H}_B$ (поскольку $\Psi(\overline{\rho}_\pi)$ – невырожденное состояние в $\mathfrak{S}(\mathscr{H}_C)$), а значит $\dim\mathscr{H}_C\leqslant\dim\mathscr{H}_B$ и $\dim\ker\Psi^*\leqslant\dim\ker\Phi^*$.

Если $\rho_i=|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$, то $A_i=|\phi_i\rangle\langle\phi_i|$, где $|\phi_i\rangle$ – вектор определенный в (4.2), при каждом i. Поэтому из (4.5) следует, что

$$|\phi_i\rangle\langle\phi_i|=\sum_{j=1}^{m}\Psi^*(|\psi_{ij}\rangle\langle\psi_{ij}|)=\sum_{j=1}^{m}W_{ij}^*W_{ij},$$

а значит, $W_{ij}=|\eta_{ij}\rangle\langle\phi_i|$ при всех $j=\overline{1,m}$, где $\{|\eta_{ij}\rangle\}$ – набор векторов из $\mathscr{H}_E$ такой, что $\sum_{j=1}^{m}\|\eta_{ij}\|^2=1$ при каждом i.

Из (4.4) получаем

$$\widehat{\Phi}(A)=\sum_{i=1}^{n}\langle\phi_i|A\phi_i\rangle\sum_{j=1}^{m}|\eta_{ij}\rangle\langle\eta_{ij}|,\qquad A\in\mathfrak{T}(\mathscr{H}_A).$$

Используя спектральное разложение состояний $\sum_{j=1}^{m}|\eta_{ij}\rangle\langle\eta_{ij}|$, $i=\overline{1,n}$, получаем представление (4.1).

Представление (4.3) выводится из (4.1) с помощью представления (2.6).

Лемма 2. *Пусть* $\Phi\colon\mathfrak{T}(\mathscr{H}_A)\to\mathfrak{T}(\mathscr{H}_B)$ *– квантовый канал. Если* B *– положительный оператор в* $\mathfrak{B}(\mathscr{H}_B)$ *такой, что* $\operatorname{rank}\Phi^*(B)=r<+\infty$, *то* $B=\sum_{j=1}^{m}|\psi_j\rangle\langle\psi_j|$, *где* $m=\min\{\dim\ker\Phi^*+r^2,\dim\mathscr{H}_B\}$, *а* $\{|\psi_j\rangle\}_{j=1}^{m}$ *– набор векторов в* $\mathscr{H}_B$.

Доказательство. Заметим, что $B=\sum_{j=1}^{\dim\mathscr{H}_B}|\psi_j\rangle\langle\psi_j|$, где $|\psi_j\rangle=B^{1/2}|j\rangle$, для любого ортонормированного базиса $\{|j\rangle\}$ в $\mathscr{H}_B$. Поэтому достаточно рассмотреть случай $m=\dim\ker\Phi^*+r^2<\dim\mathscr{H}_B$.

Можно считать, что первые $n=\operatorname{rank}B$ векторов из $\{|\psi_j\rangle\}$ линейно независимы, а значит, операторы $|\psi_j\rangle\langle\psi_j|$, $j=\overline{1,n}$, порождают n-мерное подпространство $\mathfrak{B}_n\subset\mathfrak{B}(\mathscr{H}_A)$. Постольку $B\geqslant\sum_{j=1}^{n}|\psi_j\rangle\langle\psi_j|$, а носитель оператора $\Phi^*(B)$ лежит в некотором r-мерном подпространстве $\mathscr{H}_r\subset\mathscr{H}_A$, имеем $\Phi^*(|\psi_j\rangle\langle\psi_j|)\in\mathfrak{B}(\mathscr{H}_r)$, $j=\overline{1,n}$. Значит, $\Phi^*(\mathfrak{B}_n)\subseteq\mathfrak{B}(\mathscr{H}_r)$ и, следовательно,

$$\operatorname{rank}B=n=\dim\mathfrak{B}_n\leqslant\dim\ker\Phi^*+\dim\mathfrak{B}(\mathscr{H}_r)=\dim\ker\Phi^*+r^2=m.$$

Из конечномерной спектральной теоремы следует, что $B = \sum_{j=1}^{m} |\psi'_j\rangle\langle\psi'_j|$, где $\{|\psi'_j\rangle\}$ – ортогональный набор собственных векторов оператора B.

Лемма 3. *Пусть* $\Phi(A) = \sum_{k=1}^{d} V_k A V_k^*$ – *квантовый канал, а* $\{|k\rangle\}_{k=1}^{d}$ – *ортонормированный базис в гильбертовом пространстве* $\mathscr{H}_d$, $d \leqslant +\infty$. *Любая переполненная система* $\{|\psi_i\rangle\}$ *векторов из* $\mathscr{H}_d$ *порождает представление Крауса* $\Phi(A) = \sum_i W_i A W_i^*$ *канала* Φ, *в котором* $W_i = \sum_{k=1}^{d} \langle\psi_i|k\rangle V_k$.

Доказательство. Поскольку $\sum_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| = I_{\mathscr{H}_d}$, имеем

$$
\begin{aligned}
\sum_i W_i A W_i^* &= \sum_{k,l=1}^{d} V_k A V_l^* \sum_i \langle\psi_i|k\rangle\langle l|\psi_i\rangle \\
&= \sum_{k,l=1}^{d} V_k A V_l^* \sum_i \operatorname{Tr} |k\rangle\langle l||\psi_i\rangle\langle\psi_i| = \sum_{k=1}^{d} V_k A V_k^*.
\end{aligned}
$$

4.2. Ортогональные семейства чистых состояний. Теорема 3 дает описание класса всех квантовых каналов, обратимых относительно полного семейства ортогональных чистых состояний.

Предложение 1. *Пусть* $\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathscr{H}_A) \to \mathfrak{T}(\mathscr{H}_B)$ – *квантовый канал,* $m = \min\{\dim\ker\Phi^* + 1, \dim\mathscr{H}_B\}$, *а* $\mathfrak{S} = \{|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|\}$ – *полное семейство ортогональных чистых состояний из* $\mathfrak{S}(\mathscr{H}_A)$. *Следующие утверждения равносильны*:

(i) *канал* Φ *обратим относительно семейства* $\mathfrak{S}$;

(ii) $\widehat{\Phi}$ – *c-q канал, имеющий представление* $\widehat{\Phi}(A) = \sum_{i=1}^{\dim\mathscr{H}_A} \langle\varphi_i|A\varphi_i\rangle\sigma_i$, *в котором* $\{\sigma_i\}$ – *набор состояний из* $\mathfrak{S}(\mathscr{H}_E)$ *таких, что* $\operatorname{rank}\sigma_i \leqslant m$ *для всех* i;

(iii) *канал* Φ *изометрически эквивалентен каналу*

$$
\Phi'(A) = \sum_{i,j=1}^{\dim\mathscr{H}_A} \langle\varphi_i|A\varphi_j\rangle|\varphi_i\rangle\langle\varphi_j| \otimes \sum_{k,l=1}^{m} \langle\psi_{jl}|\psi_{ik}\rangle|k\rangle\langle l|
$$

из $\mathfrak{T}(\mathscr{H}_A)$ *в* $\mathfrak{T}(\mathscr{H}_A \otimes \mathscr{H}_m)$, *где* $\{|\psi_{ik}\rangle\}$ – *набор векторов в сепарабельном гильбертовом пространстве такой, что* $\sum_{k=1}^{m} \|\psi_{ik}\|^2 = 1$ *и* $\langle\psi_{il}|\psi_{ik}\rangle = 0$ *для всех* $k \neq l$ *при каждом* i, *а* $\{|k\rangle\}$ – *ортонормированный базис в* $\mathscr{H}_m$.

Доказательство. Импликация (i) $\Longrightarrow$ (ii) следует из теоремы 3, поскольку в данном случае $\phi_i = \varphi_i$ для всех i.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). Если $\sigma_i = \sum_{k=1}^{m} |\psi_{ik}\rangle\langle\psi_{ik}|$, то $\widehat{\Phi}(\rho) = \sum_{i,k} W_{ik}\rho W_{ik}^*$, где $W_{ik} = |\psi_{ik}\rangle\langle\varphi_i|$, и представление (2.6) показывает, что $\widehat{\widehat{\Phi}} = \Phi'$.

Импликация (iii) $\Longrightarrow$ (i) следует из леммы 1, поскольку $\Psi(\,\cdot\,) = \operatorname{Tr}_{\mathscr{H}_m}(\,\cdot\,)$ – обращающий канал для канала Φ' относительно семейства $\mathfrak{S}$.

Предложение 1 позволяет получить следующий критерий обратимости в терминах двойственного отображения к квантовому каналу.

Следствие 1. *Квантовый канал* $\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathscr{H}_A) \to \mathfrak{T}(\mathscr{H}_B)$ *обратим относительно полного семейства* $\{|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|\}$ *ортогональных чистых состояний* *тогда и только тогда, когда существует такая частичная изометрия* $W\colon \mathscr{H}_A\otimes\mathscr{H}_m\to\mathscr{H}_B$, *что*

$$|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| = \Phi^*(W[|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|\otimes I_{\mathscr{H}_m}]W^*) \quad \forall\, i, \tag{4.6}$$

где $m=\min\{\dim\ker\Phi^*+1,\,\dim\mathscr{H}_B\}$, *а* $\Phi^*\colon\mathfrak{B}(\mathscr{H}_B)\to\mathfrak{B}(\mathscr{H}_A)$ – *двойственное отображение к каналу* Φ.

Заметим, что из условия (4.6) следует, что $\Phi^*(WW^*)=I_{\mathscr{H}_A}$, а значит WW^* – проектор на подпространство, содержащее носители всех состояний $\Phi(\rho)$, $\rho\in\mathfrak{S}(\mathscr{H}_A)$.

Доказательство. Необходимость условия (4.6) непосредственно следует из предложения 1.

Для доказательства его достаточности рассмотрим канал $\Phi'(A)=W^*\Phi(A)W$ из $\mathfrak{T}(\mathscr{H}_A)$ в $\mathfrak{T}(\mathscr{H}_A\otimes\mathscr{H}_m)$. В силу сделанного замечания

$$W\Phi'(A)W^* = WW^*\Phi(A)WW^* = \Phi(A), \qquad A\in\mathfrak{T}(\mathscr{H}_A),$$

а значит, каналы Φ и Φ' изометрически эквивалентны. В силу леммы 1 достаточно показать обратимость канала Φ' относительно семейства $\{|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|\}$.

Из условия (4.6) следует, что

$$\operatorname{Tr}[|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|\otimes I_{\mathscr{H}_m}]\Phi'(|\varphi_j\rangle\langle\varphi_j|) = \operatorname{Tr}\Phi^*(W[|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|\otimes I_{\mathscr{H}_m}]W^*)|\varphi_j\rangle\langle\varphi_j| = \delta_{ij}.$$

Следовательно, носитель состояния $\Phi'(|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|)$ лежит в подпространстве $\{\lambda|\varphi_i\rangle\}\otimes\mathscr{H}_m$, а значит $\operatorname{Tr}_{\mathscr{H}_m}\Phi'(|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|)=|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$ для всех i.

4.3. Произвольные семейства чистых состояний. Рассмотрим структуру квантового канала обратимого относительно произвольного полного семейства $\mathfrak{S}=\{|\varphi_\lambda\rangle\langle\varphi_\lambda|\}_{\lambda\in\Lambda}$ чистых состояний.

Известно, что квантовый канал $\Phi\colon\mathfrak{T}(\mathscr{H}_A)\to\mathfrak{T}(\mathscr{H}_B)$ обратим относительно семейства всех чистых состояний из $\mathfrak{S}(\mathscr{H}_A)$ (что равносильно обратимости относительно $\mathfrak{S}(\mathscr{H}_A)$) тогда и только тогда, когда его комплементарный канал является полностью деполяризирующим, т.е. переводит все состояния из $\mathfrak{S}(\mathscr{H}_A)$ в единственное состояние из $\mathfrak{S}(\mathscr{H}_E)$ [4; предложение 9.1.2]. Это означает, что канал Φ изометрически эквивалентен каналу

$$\Phi'(A) = A\otimes\sigma \tag{4.7}$$

из $\mathfrak{T}(\mathscr{H}_A)$ в $\mathfrak{T}(\mathscr{H}_A\otimes\mathscr{K})$, где $\mathscr{K}$ – гильбертово пространство, а σ – заданное состояние в $\mathfrak{S}(\mathscr{K})$.

Сначала дадим характеристику семейства $\mathfrak{S}=\{|\varphi_\lambda\rangle\langle\varphi_\lambda|\}_{\lambda\in\Lambda}\subset\mathfrak{S}(\mathscr{H}_A)$, обратимость относительно которого канала $\Phi\colon\mathfrak{T}(\mathscr{H}_A)\to\mathfrak{T}(\mathscr{H}_B)$ влечет его обратимость относительно $\mathfrak{S}(\mathscr{H}_A)$.

Определение 7. Семейство $\{|\varphi_\lambda\rangle\}_{\lambda\in\Lambda}$ векторов из $\mathscr{H}$ (соответственно, семейство $\{|\varphi_\lambda\rangle\langle\varphi_\lambda|\}_{\lambda\in\Lambda}$ чистых состояний из $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$) называется *ортогонально разложимым*, если существует собственное подпространство $\mathscr{H}_0\subset\mathscr{H}$ такое, что часть векторов этого семейства лежит в $\mathscr{H}_0$, а остальные – в $\mathscr{H}_0^\perp$.

Семейства чистых состояний, которые не являются ортогонально разложимыми, будем называть *ортогонально неразложимыми.*

Предложение 2. *Пусть* $\{|\varphi_\lambda\rangle\langle\varphi_\lambda|\}_{\lambda\in\Lambda}$ *– полное семейство чистых состояний из* $\mathfrak{S}(\mathscr{H}_A)$. *Следующие утверждения равносильны*:

(i) *семейство* $\{|\varphi_\lambda\rangle\langle\varphi_\lambda|\}_{\lambda\in\Lambda}$ *является ортогонально неразложимым*;

(ii) *любой канал* $\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathscr{H}_A)\to\mathfrak{T}(\mathscr{H}_B)$, *обратимый относительно семейства* $\{|\varphi_\lambda\rangle\langle\varphi_\lambda|\}_{\lambda\in\Lambda}$, *изометрически эквивалентен каналу* (4.7).

Доказательство. (i) $\Longrightarrow$ (ii). Если $\Psi\colon \mathfrak{T}(\mathscr{H}_B)\to\mathfrak{T}(\mathscr{H}_A)$ – обращающий канал для канала Φ, то приведенная ниже лемма 4 показывает, что $\Psi\circ\Phi=\mathrm{Id}_{\mathscr{H}_A}$. Поэтому канал Φ обратим относительно $\mathfrak{S}(\mathscr{H}_A)$, а значит, его комплементарный канал $\widehat{\Phi}$ является полностью деполяризирующим.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Если $\mathscr{H}_0$ – собственное подпространство пространства $\mathscr{H}_A$ такое, что при каждом $\lambda\in\Lambda$ вектор $|\varphi_\lambda\rangle$ лежит либо в $\mathscr{H}_0$, либо в $\mathscr{H}_0^{\perp}$, то канал $A\mapsto P_0AP_0+\overline{P}_0A\overline{P}_0$, где P_0 – проектор на подпространство $\mathscr{H}_0$, а $\overline{P}_0=I_{\mathscr{H}_A}-P_0$, является обратимым относительно семейства $\{|\varphi_\lambda\rangle\langle\varphi_\lambda|\}_{\lambda\in\Lambda}$ (поскольку все его состояния не меняются под действием этого канала).

Лемма 4. *Пусть* $\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathscr{H})\to\mathfrak{T}(\mathscr{H})$ *– квантовый канал* ($\dim\mathscr{H}\leqslant+\infty$), *а* $\{|\varphi_\lambda\rangle\langle\varphi_\lambda|\}_{\lambda\in\Lambda}$ *– ортогонально неразложимое семейство чистых состояний из* $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$. *Если* $\Phi(|\varphi_\lambda\rangle\langle\varphi_\lambda|)=|\varphi_\lambda\rangle\langle\varphi_\lambda|$ *для всех* $\lambda\in\Lambda$, *то* $\Phi|_{\mathfrak{T}(\mathscr{H}_0)}=\mathrm{Id}_{\mathscr{H}_0}$, *где* $\mathscr{H}_0$ *– подпространство, порожденное семейством* $\{|\varphi_\lambda\rangle\}_{\lambda\in\Lambda}$.

Доказательство. Пусть $\Phi(A)=\mathrm{Tr}_{\mathscr{K}}VAV^*$ – представление Стайнспринга канала Φ, в котором V – изометрия из $\mathscr{H}$ в $\mathscr{H}\otimes\mathscr{K}$.

Используя стандартное рассуждение, основанное на лемме Цорна, можно показать, что любое полное ортогонально неразложимое семейство чистых состояний содержит счетное полное ортогонально неразложимое подсемейство (лемма 7 в приложении).

Пусть $\{|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|\}$ – счетное ортогонально неразложимое подсемейство семейства $\{|\varphi_\lambda\rangle\langle\varphi_\lambda|\}_{\lambda\in\Lambda}$ такое, что векторы семейства $\{|\varphi_i\rangle\}$ порождают подпространство $\mathscr{H}_0$. Из условия леммы следует, что

$$V|\varphi_i\rangle=|\varphi_i\rangle\otimes|\psi_i\rangle\quad\forall\,i,$$

где $\{|\psi_i\rangle\}$ – семейство единичных векторов в $\mathscr{K}$. Поскольку V – изометрия, имеем

$$\langle\varphi_i|\varphi_j\rangle=\langle V\varphi_i|V\varphi_j\rangle=\langle\varphi_i|\varphi_j\rangle\langle\psi_i|\psi_j\rangle\quad\forall\,i,j$$

и, следовательно, $\langle\varphi_i|\varphi_j\rangle\neq0\Longrightarrow\langle\psi_i|\psi_j\rangle=1$.

Это показывает, что $|\psi_i\rangle=|\psi_j\rangle$ для всех i, j. Действительно, в противном случае все множество индексов можно разбить на два подмножества I и J такие, что $|\psi_i\rangle\neq|\psi_j\rangle$ для всех $i\in I$, $j\in J$ и из приведенной выше импликации следует, что $\langle\varphi_i|\varphi_j\rangle=0$ для всех $i\in I$, $j\in J$ вопреки предполагаемой ортогональной неразложимости семейства $\{|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|\}$.

Поэтому $V|\varphi_i\rangle=|\varphi_i\rangle\otimes|\psi\rangle$ для всех i, а значит, $V|\varphi\rangle=|\varphi\rangle\otimes|\psi\rangle$ для всех $|\varphi\rangle\in\mathscr{H}_0$, поскольку семейство векторов $\{|\varphi_i\rangle\}$ порождает подпространство $\mathscr{H}_0$. Следовательно, $\Phi(A)=A$ для любого оператора $A\in\mathfrak{T}(\mathscr{H}_0)$.

При анализе свойства обратимости квантового канала относительно ортогонально разложимых семейств чистых состояний важную роль играет следующее простое наблюдение.

Лемма 5. *Произвольное семейство $\mathfrak{S}$ чистых состояний из $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$ представляется в виде $\mathfrak{S} = \bigcup_k \mathfrak{S}_k$, где $\{\mathfrak{S}_k\}$ – конечный или счетный набор непересекающихся ортогонально неразложимых подсемейств семейства $\mathfrak{S}$ такой, что $\rho \perp \rho'$ для всех $\rho \in \mathfrak{S}_k, \rho' \in \mathfrak{S}_{k'}$, $k \neq k'$. Данное разложение единственно (с точностью до перестановки подсемейств).*

Доказательство. Для заданного состояния $\rho \in \mathfrak{S}$ рассмотрим монотонную последовательность $\{\mathfrak{C}_n^\rho\}$ подсемейств семейства $\mathfrak{S}$, построенную следующим образом. Пусть $\mathfrak{C}_1^\rho = \{\rho\}$, $\mathfrak{C}_2^\rho$ – семейство всех состояний из $\mathfrak{S}$, которые неортогональны состоянию ρ, $\mathfrak{C}_{n+1}^\rho$ – семейство всех состояний из $\mathfrak{S}$, которые неортогональны по крайней мере одному состоянию из $\mathfrak{C}_n^\rho$, $n = 2, 3, \dots$. Пусть $\mathfrak{C}_*^\rho = \bigcup_n \mathfrak{C}_n^\rho$. Легко проверить по индукции, что $\mathfrak{C}_n^\rho$ – ортогонально неразложимое семейство при каждом n и, следовательно, $\mathfrak{C}_*^\rho$ – ортогонально неразложимое семейство. Заметим, что любое состояние из $\mathfrak{C}_*^\rho$ ортогонально любому состоянию из $\mathfrak{S} \setminus \mathfrak{C}_*^\rho$. Действительно, если $\rho \in \mathfrak{C}_*^\rho$, то $\rho \in \mathfrak{C}_n^\rho$ при некотором n. Поэтому, если состояние σ неортогонально состоянию ρ, то оно лежит в $\mathfrak{C}_{n+1}^\rho \subseteq \mathfrak{C}_*^\rho$.

Нетрудно видеть, что семейства $\mathfrak{C}_*^\rho$ и $\mathfrak{C}_*^{\rho'}$, $\rho, \rho' \in \mathfrak{S}$, либо совпадают, либо не пересекаются. Поскольку гильбертово пространство $\mathscr{H}$ сепарабельно и каждому семейству $\mathfrak{C}_*^\rho$ соответствует нетривиальное подпространство в $\mathscr{H}$, набор $\{\mathfrak{C}_*^\rho\}_{\rho\in\mathfrak{S}}$ содержит либо конечное, либо счетное число различных семейств, которые и образуют требуемое разложение.

Данное разложение полного семейства $\mathfrak{S}$ чистых состояний позволяет описать класс всех квантовых каналов, обратимых относительно $\mathfrak{S}$.

Теорема 4. *Пусть $\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathscr{H}_A) \to \mathfrak{T}(\mathscr{H}_B)$ – квантовый канал, $\mathfrak{S}$ – полное семейство чистых состояний из $\mathfrak{S}(\mathscr{H}_A)$, а $m = \min\{\dim\ker\Phi^* + 1, \dim\mathscr{H}_B\}$. Пусть $\mathfrak{S} = \bigcup_k \mathfrak{S}_k$ – разложение семейства $\mathfrak{S}$ на ортогонально неразложимые подсемейства (из леммы 5) и P_k – проектор на подпространство, порожденное состояниями из $\mathfrak{S}_k$. Следующие утверждения равносильны:*

(i) *канал Φ обратим относительно семейства $\mathfrak{S}$;*

(ii) *канал Φ обратим относительно семейства*

$$\widehat{\mathfrak{S}} = \left\{\rho \in \mathfrak{S}(\mathscr{H}_A) \;\middle|\; \rho = \sum_k P_k \rho P_k\right\};$$

(iii) *$\widehat{\Phi}$ – c-q канал, имеющий представление $\widehat{\Phi}(A) = \sum_k [\operatorname{Tr} AP_k]\sigma_k$, в котором $\{\sigma_k\}$ – набор состояний из $\mathfrak{S}(\mathscr{H}_E)$ таких, что $\operatorname{rank}\sigma_k \leqslant m$ для всех k;*

(iv) *канал Φ изометрически эквивалентен каналу*

$$\Phi'(A) = \sum_{k,l} P_k A P_l \otimes \sum_{p,t=1}^{m} \langle\psi_t^l|\psi_p^k\rangle |p\rangle\langle t|$$

из $\mathfrak{T}(\mathscr{H}_A)$ в $\mathfrak{T}(\mathscr{H}_A \otimes \mathscr{H}_m)$, где $\{|\psi_p^k\rangle\}$ – набор векторов в сепарабельном гильбертовом пространстве такой, что $\sum_{p=1}^m \|\psi_p^k\|^2 = 1$ и $\langle\psi_t^k|\psi_p^k\rangle = 0$ для всех $p \neq t$ при каждом k, а $\{|p\rangle\}$ – ортонормированный базис в $\mathscr{H}_m$.

Доказательство. (i) $\Longrightarrow$ (ii). Пусть Ψ – обращающий канал для канала Φ относительно семейства $\mathfrak{S}$, а $\mathscr{H}_k$ – подпространство пространства $\mathscr{H}$, порожденное состояниями подсемейства $\mathfrak{S}_k$. Поскольку $\mathfrak{S}_k$ – ортогонально неразложимое семейство, лемма 4 показывает, что $\Psi \circ \Phi|_{\mathfrak{T}(\mathscr{H}_k)} = \mathrm{Id}_{\mathscr{H}_k}$ для всех k.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). Пусть $\{|\phi_i\rangle\}$ – ортонормированный базис, соответствующий разложению $\mathscr{H}_A = \bigoplus_k \mathscr{H}_k$ (такой, что каждый вектор $|\phi_i\rangle$ лежит в некотором $\mathscr{H}_k$). Пусть I_k – множество всех i таких, что $|\phi_i\rangle \in \mathscr{H}_k$. Поскольку $|\phi_i\rangle\langle\phi_i| \in \widehat{\mathfrak{S}}$ для всех i, канал Φ обратим относительно семейства $\{|\phi_i\rangle\langle\phi_i|\}$. В силу предложения 1 имеем

$$\widehat{\Phi}(A) = \sum_k \sum_{i\in I_k} \langle\phi_i|A\phi_i\rangle\sigma_i,$$

где $\{\sigma_i\}$ – набор состояний из $\mathfrak{S}(\mathscr{H}_E)$ таких, что $\operatorname{rank}\sigma_i \leqslant m$ для всех i. Поскольку $\mathfrak{S}_k$ – ортогонально неразложимое семейство, предложение 2 показывает, что сужение канала $\widehat{\Phi}$ на множество $\mathfrak{S}(\mathscr{H}_k)$ является полностью деполяризирующим каналом. Поэтому $\sigma_i = \overline{\sigma}_k$ для всех $i \in I_k$, а значит, $\widehat{\Phi}(A) = \sum_k [\operatorname{Tr} AP_k]\overline{\sigma}_k$.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv). Пусть $k(i)$ – номер множества I_k, содержащего i, т.е. $i \in I_{k(i)}$ для всех i. Если $\sigma_k = \sum_{p=1}^m |\psi_p^k\rangle\langle\psi_p^k|$, то $\widehat{\Phi}(A) = \sum_{i,p} W_{ip}AW_{ip}^*$, где $W_{ip} = |\psi_p^{k(i)}\rangle\langle\phi_i|$, и, следовательно, из представления (2.6) следует, что

$$\begin{aligned}\widehat{\widehat{\Phi}}(A) &= \sum_{i,j,p,t} [\operatorname{Tr} W_{ip}AW_{jt}^*]|\phi_i\rangle\langle\phi_j| \otimes |p\rangle\langle t| \\ &= \sum_{k,l,p,t}\ \sum_{i\in I_k, j\in I_l} \langle\phi_i|A\phi_j\rangle|\phi_i\rangle\langle\phi_j| \otimes \langle\psi_t^l|\psi_p^k\rangle|p\rangle\langle t| = \sum_{k,l} P_kAP_l \otimes \sum_{p,t}\langle\psi_t^l|\psi_p^k\rangle|p\rangle\langle t|,\end{aligned}$$

где $\{|p\rangle\}$ – ортонормированный базис в $\mathscr{H}_m$.

(iv) $\Longrightarrow$ (i) следует из леммы 1, поскольку $\Psi(\,\cdot\,) = \operatorname{Tr}_{\mathscr{H}_m}(\,\cdot\,)$ – обращающий канал для канала Φ' относительно семейства $\mathfrak{S}$.

Из теоремы 4 вытекает следующее полезное наблюдение.

Следствие 2. *Если квантовый канал $\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathscr{H}_A) \to \mathfrak{T}(\mathscr{H}_B)$ обратим относительно полного семейства $\mathfrak{S}$ чистых состояний из $\mathfrak{S}(\mathscr{H}_A)$, то он обратим относительно некоторого полного семейства ортогональных чистых состояний из $\mathfrak{S}(\mathscr{H}_A)$.*

Замечание 1. Если полное семейство чистых состояний $\mathfrak{S}$ содержит такое подсемейство $\mathfrak{S}_0 = \{|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|\}$, что $\{|\varphi_i\rangle\}$ – базис в пространстве $\mathscr{H}_A$ (в том смысле, что произвольный вектор $|\psi\rangle$ из $\mathscr{H}_A$ имеет единственное разложение $|\psi\rangle = \sum_i c_i|\varphi_i\rangle$),[6] то семейство ортогональных чистых состояний, упомянутое в следствии 2, явно строится с помощью теоремы 3. Действительно, в силу

[6] Существование подсемейства $\mathfrak{S}_0$ очевидно, если пространство $\mathscr{H}_A$ конечномерно. Условия, при которых полное счетное семейство единичных векторов в бесконечномерном гильбертовом пространстве образует базис, можно найти в [10; гл. 1].

леммы 8 в приложении множество $\{|\phi_i\rangle\}$ векторов, определенных формулой (4.2) посредством произвольного невырожденного распределения вероятностей $\{\pi_i\}$, образует ортонормированный базис в $\mathscr{H}_A$. Легко видеть, что канал Φ', определенный формулой (4.3), обратим относительно семейства $\{|\phi_i\rangle\langle\phi_i|\}$. В силу теоремы 3 и леммы 1 то же свойство обратимости имеет место и для канала Φ.

Теорема 4 дает следующее описание класса обратимых каналов между конечномерными квантовыми системами равной размерности.

Следствие 3. *Пусть $\mathscr{H}$ – конечномерное гильбертово пространство, а $\mathfrak{S}$ – полное семейство чистых состояний из $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$. Пусть $\mathfrak{S} = \bigcup_k \mathfrak{S}_k$ – разложение семейства $\mathfrak{S}$ на ортогонально неразложимые подсемейства (из леммы 5) и P_k – проектор на подпространство, порожденное состояниями из $\mathfrak{S}_k$.*

Квантовый канал $\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathscr{H}) \to \mathfrak{T}(\mathscr{H})$ обратим относительно семейства $\mathfrak{S}$ тогда и только тогда, когда он унитарно эквивалентен каналу

$$\Phi'(A) = \sum_{k,l} c_{kl} P_k A P_l, \qquad A \in \mathfrak{T}(\mathscr{H}),$$

где $\|c_{kl}\|$ – матрица Грама набора единичных векторов в конечномерном гильбертовом пространстве.

Доказательство. Поскольку $\Phi'(\rho) = \rho$ для всех $\rho \in \mathfrak{S}$, унитарная эквивалентность каналов Φ и Φ' гарантирует обратимость канала Φ относительно семейства $\mathfrak{S}$.

В силу следствия 2 из обратимости канала Φ относительно семейства $\mathfrak{S}$ следует его обратимость относительно некоторого семейства $\{\rho_i\}_{i=1}^n$ ортогональных чистых состояний из $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$ (где $n = \dim\mathscr{H}$). В силу монотонности относительной энтропии имеем

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} H(\Phi(\rho_i)\|\Phi(\overline{\rho})) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} H(\rho_i\|\overline{\rho}) = \log n,$$

где $\overline{\rho} = n^{-1}\sum_{i=1}^n \rho_i = n^{-1} I_{\mathscr{H}}$. Левая часть этого равенства – это χ-граница семейства состояний $\{\Phi(\rho_i)\}_{i=1}^n$ с равномерным распределением вероятностей (см. § 5). Из общих свойств χ-границы (см. [4; гл. 5]) следует, что это семейство состоит из ортогональных чистых состояний и $\Phi(I_{\mathscr{H}}) = I_{\mathscr{H}}$.

В силу определения (2.2) комплементарного канала $\{\widehat{\Phi}(\rho_i)\}_{i=1}^n$ – семейство чистых состояний. Теорема 4 показывает, что $\widehat{\Phi}(A) = \sum_k [\operatorname{Tr} AP_k]|\psi_k\rangle\langle\psi_k|$, где $\{|\psi_k\rangle\}$ – множество единичных векторов из $\mathscr{H}_E$. Следовательно, канал Φ изометрически эквивалентен каналу $\widehat{\widehat{\Phi}} = \Phi'$ с матрицей $c_{kl} = \langle\psi_l|\psi_k\rangle$. Поскольку $\Phi(I_{\mathscr{H}}) = \Phi'(I_{\mathscr{H}}) = I_{\mathscr{H}}$, изометрическая эквивалентность каналов Φ и Φ' – это унитарная эквивалентность.

Замечание 2. Следствие 3 показывает, что если $\dim\mathscr{H}_A = \dim\mathscr{H}_B < +\infty$, то квантовый канал $\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathscr{H}_A) \to \mathfrak{T}(\mathscr{H}_B)$ обратим относительно полного семейства $\mathfrak{S}$ чистых состояний тогда и только тогда, когда $\Phi(\rho) = U\rho U^*$

для всех $\rho \in \mathfrak{S}$, где U – унитарный оператор, т.е. обратимость канала относительно полного семейства чистых состояний равносильна сохранению всех состояний этого семейства при действии канала (с точностью до унитарного преобразования).

§ 5. Условие сохранения χ-границы и его следствия

Рассмотрим некоторые приложения полученных в § 4 результатов в квантовой теории информации.

Конечный или счетный набор состояний $\{\rho_i\}$ из $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$ с соответствующим распределением вероятностей $\{\pi_i\}$ будем называть *ансамблем* и обозначать $\{\pi_i, \rho_i\}$, а состояние $\overline{\rho} = \sum_i \pi_i \rho_i$ – *средним состоянием* этого ансамбля.

χ-граница ансамбля $\{\pi_i, \rho_i\}$ определяется выражением

$$\chi(\{\pi_i, \rho_i\}) \doteq \sum_i \pi_i H(\rho_i \| \overline{\rho}) = H(\overline{\rho}) - \sum_i \pi_i H(\rho_i),$$

в котором вторая формула справедлива при условии $H(\overline{\rho}) < +\infty$. В [18] доказано, что данная величина дает верхнюю границу для классической взаимной информации при различении набора состояний $\{\rho_i\}$ с помощью квантовых измерений (см. подробности в [4; гл. 5]). χ-граница играет центральную роль при анализе различных протоколов передачи классической информации по квантовому каналу, входит в выражения для пропускных способностей таких протоколов.

Пусть Φ – квантовый канал из $\mathfrak{T}(\mathscr{H}_A)$ в $\mathfrak{T}(\mathscr{H}_B)$. В силу монотонности относительной энтропии для произвольного ансамбля $\{\pi_i, \rho_i\}$ состояний из $\mathfrak{S}(\mathscr{H}_A)$ имеет место неравенство

$$\chi(\{\pi_i, \Phi(\rho_i)\}) \leqslant \chi(\{\pi_i, \rho_i\}). \tag{5.1}$$

Замечание 3. Если $H(\overline{\rho}) < +\infty$ и $H(\Phi(\overline{\rho})) < +\infty$, то неравенство (5.1) означает выпуклость функции $\rho \mapsto H(\Phi(\rho)) - H(\rho)$ – приращения энтропии канала Φ.

В силу монотонности относительной энтропии и теоремы 1 равенство в (5.1) при условии конечности правой части равносильно обратимости канала Φ относительно семейства $\{\rho_i\}$. Поэтому, используя результаты § 4, можно получить условия этого равенства, которое естественно интерпретировать как сохранение χ-границы ансамбля $\{\pi_i, \rho_i\}$ под действием канала Φ.

При анализе бесконечномерных квантовых систем и каналов наряду с рассмотренными выше дискретными ансамблями квантовых состояний необходимо рассматривать так называемые *непрерывные* или *обобщенные* ансамбли, определяемые как вероятностные борелевские меры на множестве всех квантовых состояний (при таком определении ансамбль $\{\pi_i, \rho_i\}$ – это чисто атомическая мера $\sum_i \pi_i \delta_{\rho_i}$, где δ_ρ – дираковская мера, сосредоточенная в состоянии ρ) [4], [19].

Множество всех вероятностных борелевских мер на $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$, носитель которых лежит в замкнутом подмножестве $\mathscr{A} \subseteq \mathfrak{S}(\mathscr{H})$, обозначим $\mathscr{P}(\mathscr{A})$. Такие меры будем называть обобщенными ансамблями состояний из $\mathscr{A}$.

Среднее состояние обобщенного ансамбля μ – это барицентр меры μ, определяемый интегралом Бохнера

$$\overline{\rho}(\mu)=\int_{\mathfrak{S}(\mathscr{H})}\rho\mu(d\rho).$$

χ-граница обобщенного ансамбля μ определяется выражением

$$\chi(\mu)=\int_{\mathfrak{S}(\mathscr{H})}H(\rho\|\overline{\rho}(\mu))\mu(d\rho)=H(\overline{\rho}(\mu))-\int_{\mathfrak{S}(\mathscr{H})}H(\rho)\mu(d\rho), \tag{5.2}$$

в котором вторая формула справедлива при условии $H(\overline{\rho}(\mu))<+\infty$ (см. [19]).

Образ обобщенного ансамбля $\mu\in\mathscr{P}(\mathfrak{S}(\mathscr{H}_A))$ под действием квантового канала $\Phi\colon\mathfrak{T}(\mathscr{H}_A)\to\mathfrak{T}(\mathscr{H}_B)$ – это обобщенный ансамбль $\Phi(\mu)\doteq\mu\circ\Phi^{-1}\in\mathscr{P}(\mathfrak{S}(\mathscr{H}_B))$, χ-граница которого равна

$$\chi(\Phi(\mu))=\int_{\mathfrak{S}(\mathscr{H}_A)}H(\Phi(\rho)\|\Phi(\overline{\rho}(\mu)))\mu(d\rho)=H(\Phi(\overline{\rho}(\mu)))-\int_{\mathfrak{S}(\mathscr{H}_A)}H(\Phi(\rho))\mu(d\rho), \tag{5.3}$$

где вторая формула справедлива при условии $H(\Phi(\overline{\rho}(\mu)))<+\infty$.

Как и в дискретном случае, из монотонности относительной энтропии следует неравенство

$$\chi(\Phi(\mu))\leqslant\chi(\mu). \tag{5.4}$$

Теорема 1 дает следующий критерий равенства в (5.4), который является модификацией теоремы 3 из [14] для алгебры фон Неймана $\mathscr{M}=\mathfrak{B}(\mathscr{H})$.

Предложение 3. *Пусть $\Phi\colon\mathfrak{T}(\mathscr{H}_A)\to\mathfrak{T}(\mathscr{H}_B)$ – квантовый канал, а μ – обобщенный ансамбль состояний из $\mathfrak{S}(\mathscr{H}_A)$ с невырожденным средним состоянием $\overline{\rho}(\mu)$ такой, что $\chi(\mu)<+\infty$. Следующие утверждения равносильны:*

(i) $\chi(\Phi(\mu))=\chi(\mu)$;

(ii) $H(\Phi(\rho)\|\Phi(\overline{\rho}(\mu)))=H(\rho\|\overline{\rho}(\mu))$ *для μ-почти всех ρ из $\mathfrak{S}(\mathscr{H}_A)$;*

(iii) $\rho=\Theta_{\overline{\rho}(\mu)}(\Phi(\rho))$ *для μ-почти всех ρ из $\mathfrak{S}(\mathscr{H}_A)$;*

(iv) *канал Φ обратим относительно μ-почти всех ρ из $\mathfrak{S}(\mathscr{H}_A)$.*

В отличие от [14; теорема 3], в предложении 3 не предполагается, что состояние $\overline{\rho}(\mu)$ является счетной выпуклой комбинацией состояний ансамбля μ.

Из этого предложения, теоремы 3, следствия 2 и предложения 1 (с учетом [14; лемма 2]) получаем следующие необходимые условия равенства в (5.4).

Теорема 5. *Пусть $\Phi\colon\mathfrak{T}(\mathscr{H}_A)\to\mathfrak{T}(\mathscr{H}_B)$ – квантовый канал. Если существует обобщенный ансамбль $\mu\in\mathscr{P}(\mathfrak{S}^r)$, где $\mathfrak{S}^r=\{\rho\in\mathfrak{S}(\mathscr{H}_A)\mid\operatorname{rank}\rho\leqslant r\}$, с невырожденным средним состоянием $\overline{\rho}(\mu)$, для которого*

$$\chi(\Phi(\mu))=\chi(\mu)<+\infty, \tag{5.5}$$

то комплементарный канал $\widehat{\Phi}$ имеет представление Крауса (2.5) с числом слагаемых $\dim\mathscr{H}_A\cdot\min\{\dim\ker\Phi^*+r^2,\dim\mathscr{H}_B\}$ такое, что $\operatorname{rank}V_k\leqslant r$ для всех k, и, следовательно, является PEB-каналом порядка r.

Если это условие выполнено при $r=1$, то для канала Φ имеют место утверждения (i)–(iii) предложения 1 при некотором ортонормированном базисе $\{|\varphi_i\rangle\}$ пространства $\mathscr{H}_A$.

Далее мы рассмотрим некоторые следствия этой теоремы, связанные с различными характеристиками квантовых систем и каналов.

5.1. χ-пропускная способность и минимальная выходная энтропия конечномерного квантового канала. Пусть $\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathscr{H}_A) \to \mathfrak{T}(\mathscr{H}_B)$ – канал между конечномерными квантовыми системами ($\dim \mathscr{H}_A, \dim \mathscr{H}_B < +\infty$).

χ-пропускная способность канала Φ (которая тесно связана с его классической пропускной способностью [4; гл. 8]) определяется выражением

$$\overline{C}(\Phi) = \max_{\{\pi_i,\rho_i\}} \chi(\{\pi_i, \Phi(\rho_i)\}), \tag{5.6}$$

в котором максимум берется по всем ансамблям состояний из $\mathfrak{S}(\mathscr{H}_A)$.

Используя неравенство (5.1), легко показать, что

$$\overline{C}(\Phi) \leqslant \log \dim \mathscr{H}_A \tag{5.7}$$

для любого канала Φ. Теорема 5 дает следующий критерий равенства в данном неравенстве.

Следствие 4. *Пусть $\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathscr{H}_A) \to \mathfrak{T}(\mathscr{H}_B)$ – квантовый канал такой, что $\dim \mathscr{H}_A, \dim \mathscr{H}_B < +\infty$.*

A) *Равенство в* (5.7) *имеет место тогда и только тогда, когда для канала Φ имеют место утверждения* (i)–(iii) *предложения* 1 *при некотором ортонормированном базисе $\{|\varphi_i\rangle\}$ пространства $\mathscr{H}_A$.*

B) *Если $\mathscr{H}_B = \mathscr{H}_A$, то равенство в* (5.7) *имеет место тогда и только тогда, когда канал Φ унитарно эквивалентен каналу Φ', описанному в следствии* 3 *при некотором наборе $\{P_k\}$ взаимно ортогональных проекторов таких, что $\sum_k P_k = I_{\mathscr{H}_A}$.*

Важной характеристикой квантового канала Φ является его минимальная выходная энтропия

$$H_{\min}(\Phi) = \min_{\rho\in\mathfrak{S}(\mathscr{H}_A)} H(\Phi(\rho))$$

(роль этой характеристики при исследовании информационных свойств квантового канала рассмотрена в [4; гл. 8]).

Следствие 4 позволяет получить критерий равенства нулю минимальной выходной энтропии для класса так называемых ковариантных каналов.

Следствие 5. *Пусть $\mathscr{H}_B = \mathscr{H}_A$ – конечномерное пространство, а квантовый канал $\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathscr{H}_A) \to \mathfrak{T}(\mathscr{H}_B)$ ковариантен относительно некоторого неприводимого представления $\{V_g\}_{g\in G}$ компактной группы G (в том смысле, что $\Phi(V_gAV_g^*) = V_g\Phi(A)V_g^*$ для всех $g \in G$ и всех $A \in \mathfrak{T}(\mathscr{H}_A)$).*

Равенство $H_{\min}(\Phi) = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда канал Φ унитарно эквивалентен каналу Φ', описанному в следствии 3 *при некотором наборе $\{P_k\}$ взаимно ортогональных проекторов таких, что $\sum_k P_k = I_{\mathscr{H}_A}$.*

Для доказательства достаточно заметить, что из условия ковариантности следует, что $\overline{C}(\Phi) = \log\dim\mathscr{H}_B - H_{\min}(\Phi)$ (см. [4; гл. 6]).

Все условия следствия 5 выполнены для любого унитального кубитного канала Φ, т.е. канала $\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathscr{H}_A) \to \mathfrak{T}(\mathscr{H}_B)$ такого, что $\dim\mathscr{H}_A = \dim\mathscr{H}_B = 2$ и $\Phi(I_{\mathscr{H}_A}) = I_{\mathscr{H}_B}$ (см. [4; гл. 6]).

5.2. О строгом убывании χ-границы при взятии частичного следа и строгой вогнутости условной энтропии. Операция частичного следа $\mathfrak{T}(\mathscr{H}\otimes\mathscr{K})\ni A\mapsto \mathrm{Tr}_{\mathscr{K}} A\in\mathfrak{T}(\mathscr{H})$ является некоммутативным аналогом перехода от совместного распределения вероятностей к парциальным (частичным) распределениям. Эту операцию можно рассматривать как квантовый канал из $\mathfrak{T}(\mathscr{H}\otimes\mathscr{K})$ в $\mathfrak{T}(\mathscr{H})$, комплементарным каналом к которому является операция частичного следа $A\mapsto \mathrm{Tr}_{\mathscr{H}} A$ по другому пространству.

Замечая, что при $r<\dim\mathscr{K}$ отображение $A\mapsto \mathrm{Tr}_{\mathscr{H}} A$ не является r-PEB каналом, из теоремы 5 получаем следующее утверждение.

Предложение 4. *Пусть* $\mathscr{H}_A=\mathscr{H}_B\otimes\mathscr{H}_E$ *и* $\Phi(A)=\mathrm{Tr}_{\mathscr{H}_E} A$, $A\in\mathfrak{T}(\mathscr{H}_A)$.

A) $\chi(\{\pi_i,\Phi(\rho_i)\})<\chi(\{\pi_i,\rho_i\})$ *для любого ансамбля* $\{\pi_i,\rho_i\}$ *состояний из* $\mathfrak{S}(\mathscr{H}_A)$ *с невырожденным средним, у которого* $\sup_i \operatorname{rank}\rho_i<\dim\mathscr{H}_E$ *и* $\chi(\{\pi_i,\rho_i\})<+\infty$.

B) $\chi(\Phi(\mu))<\chi(\mu)$ *для любого обобщенного ансамбля* μ *из* $\mathscr{P}(\mathfrak{S}(\mathscr{H}_A))$ *с невырожденным средним, у которого* $\sup_{\rho\in\operatorname{supp}\mu}\operatorname{rank}\rho<\dim\mathscr{H}_E$ *и* $\chi(\mu)<+\infty$.

Замечание 4. В силу представления Стайнспринга (2.1) любой канал унитарно эквивалентен сужению канала $\Phi(A)=\mathrm{Tr}_{\mathscr{H}_E} A$ на множество операторов в некотором подпространстве в $\mathscr{H}_B\otimes\mathscr{H}_E$. Поскольку χ-граница не всегда строго убывает под действием квантового канала, условие невырожденности среднего состояния в предложении 4 (а значит, и в теореме 5) является существенным.

Квантовая условная энтропия состояния ρ составной системы AB определяется формулой

$$H_{A|B}(\rho)\doteq H(\rho)-H(\mathrm{Tr}_{\mathscr{H}_A}\rho)$$

при условии

$$H(\rho)<+\infty\quad\text{и}\quad H(\mathrm{Tr}_{\mathscr{H}_A}\rho)<+\infty. \tag{5.8}$$

В силу замечания 3 вогнутость функции $\rho\mapsto H_{A|B}(\rho)$ на выпуклом множестве, определяемом условием (5.8), равносильна невозрастанию χ-границы при взятии частичного следа. Предложение 4, A) дает следующее достаточное условие строгой вогнутости условной энтропии.

Следствие 6. *Пусть* ρ *– невырожденное состояние в* $\mathfrak{S}(\mathscr{H}_A\otimes\mathscr{H}_B)$, *удовлетворяющее условию* (5.8). *Тогда*

$$H_{A|B}(\rho)>\sum_i\pi_i H_{A|B}(\rho_i)$$

для любого ансамбля $\{\pi_i,\rho_i\}$ *со средним состоянием* ρ, *для которого выполняется* $\sup_i\operatorname{rank}\rho_i<\dim\mathscr{H}_A$.

Используя предложение 4, B), можно получить непрерывную (интегральную) версию следствия 6.

Нетрудно построить примеры, показывающие, что свойство строгой вогнутости условной энтропии не имеет места для любого выпуклого разложения произвольного состояния ρ.

Важным следствием теоремы 5 является критерий совпадения пропускных способностей двух различных протоколов передачи классической информации по квантовому каналу, рассмотренный в [7].

§ 6. Приложение

6.1. Доказательство теоремы 1. Достаточно показать, что (i) $\Longrightarrow$ (ii). Рассмотрим ансамбль из двух состояний ρ и σ с вероятностями t и $1-t$, где $t \in (0,1)$. Пусть $\sigma_t = t\rho + (1-t)\sigma$. В силу тождества Дональда (см. [3; предложение 5.22]) имеем

$$tH(\rho\|\sigma) + (1-t)H(\sigma\|\sigma) = tH(\rho\|\sigma_t) + (1-t)H(\sigma\|\sigma_t) + H(\sigma_t\|\sigma), \tag{6.1}$$

$$\begin{aligned} &tH(\Phi(\rho)\|\Phi(\sigma)) + (1-t)H(\Phi(\sigma)\|\Phi(\sigma)) \\ &\qquad = tH(\Phi(\rho)\|\Phi(\sigma_t)) + (1-t)H(\Phi(\sigma)\|\Phi(\sigma_t)) + H(\Phi(\sigma_t)\|\Phi(\sigma)), \end{aligned} \tag{6.2}$$

где левые части обоих равенств конечны и совпадают по условию. Поскольку все слагаемые в правой части (6.1) не меньше соответствующих слагаемых в правой части (6.2) в силу монотонности относительной энтропии, получаем

$$H(\Phi(\rho)\|\Phi(\sigma_t)) = H(\rho\|\sigma_t), \qquad H(\Phi(\sigma)\|\Phi(\sigma_t)) = H(\sigma\|\sigma_t). \tag{6.3}$$

Из [14; теорема 3 и предложение 4] следует, что $\rho = \Theta_t(\Phi(\rho))$ для всех $t \in (0,1)$, где

$$\Theta_t(B) = [\sigma_t]^{1/2}\Phi^*\bigl([\Phi(\sigma_t)]^{-1/2}B[\Phi(\sigma_t)]^{-1/2}\bigr)[\sigma_t]^{1/2}, \qquad B \in \mathfrak{T}(\mathscr{H}_B).$$

Для завершения доказательства достаточно показать, что

$$\lim_{t\to+0}\Theta_t = \Theta_\sigma \tag{6.4}$$

в топологии сильной сходимости на множестве квантовых каналов (в которой $\Phi_n \to \Phi$ означает, что $\Phi_n(\rho) \to \Phi(\rho)$ для всех ρ (см. [20]), поскольку из (6.4) следует, что $\rho = \lim_{t\to+0}\Theta_t(\Phi(\rho)) = \Theta_\sigma(\Phi(\rho))$.

Поскольку $\Theta_t(\Phi(\sigma)) = \sigma$ для всех $t \in (0,1)$, множество каналов $\{\Theta_t\}_{t\in(0,1)}$ относительно компактно в топологии сильной сходимости в силу [20; следствие 2]. Поэтому существует сходящаяся к нулю последовательность $\{t_n\}$ такая, что

$$\lim_{n\to+\infty}\Theta_{t_n} = \Theta_0, \tag{6.5}$$

где Θ_0 – некоторый канал. Покажем, что $\Theta_0 = \Theta_\sigma$.

Заметим, что (6.5) означает сходимость последовательности $\{\Theta_{t_n}^*(A)\}$ к оператору $\Theta_0^*(A)$ в слабой операторной топологии для любого положительного оператора $A \in \mathfrak{B}(\mathscr{H}_A)$.[7] В силу приведенной ниже леммы 6 имеем

$$\lim_{n\to+\infty}[\Phi(\sigma_{t_n})]^{1/2}\Theta_{t_n}^*(A)[\Phi(\sigma_{t_n})]^{1/2} = [\Phi(\sigma)]^{1/2}\Theta_0^*(A)[\Phi(\sigma)]^{1/2} \tag{6.6}$$

[7] Поскольку эта топология совпадает с σ-слабой операторной топологией на единичном шаре пространства $\mathfrak{B}(\mathscr{H}_B)$ (см. [11]).

по норме Гильберта–Шмидта. Явный вид отображения $\Theta^*_{t_n}$ показывает, что

$$[\Phi(\sigma_{t_n})]^{1/2}\Theta^*_{t_n}(A)[\Phi(\sigma_{t_n})]^{1/2} = \Phi\bigl([\sigma_{t_n}]^{1/2}A[\sigma_{t_n}]^{1/2}\bigr)$$

и, поскольку $\lim_{n\to+\infty}[\sigma_{t_n}]^{1/2}A[\sigma_{t_n}]^{1/2} = [\sigma]^{1/2}A[\sigma]^{1/2}$ по норме пространства $\mathfrak{T}(\mathscr{H}_A)$, предел в (6.6) совпадает с $\Phi\bigl([\sigma]^{1/2}A[\sigma]^{1/2}\bigr)$. Поэтому $\Theta^*_0(A) = \Theta^*_\sigma(A)$ для всех A из $\mathfrak{B}(\mathscr{H}_A)$ и, следовательно, $\Theta_0 = \Theta_\sigma$.

Приведенное рассуждение показывает, что для любой последовательности $\{t_n\}$, сходящейся к нулю, любой частичный предел последовательности $\{\Theta_{t_n}\}$ совпадает с Θ_σ. Это равносильно (6.4).

Лемма 6. *Пусть $\{\rho_n\}$ – последовательность состояний из $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$, сходящаяся к состоянию ρ_0, а $\{A_n\}$ – последовательность операторов из единичного шара пространства $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$, сходящаяся к оператору A_0 в слабой операторной топологии. Тогда последовательность $\{\sqrt{\rho_n}A_n\sqrt{\rho_n}\}$ сходится к оператору $\sqrt{\rho_0}A_0\sqrt{\rho_0}$ по норме Гильберта–Шмидта.*

Доказательство. Поскольку $\{\rho_n\}_{n\geqslant 0}$ – компактное множество, критерий компактности для подмножеств множества $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$ (см. [19; приложение]) показывает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует проектор конечного ранга P_ε такой, что $\operatorname{Tr}\overline{P}_\varepsilon\rho_n < \varepsilon$ для всех $n \geqslant 0$, где $\overline{P}_\varepsilon = I_{\mathscr{H}} - P_\varepsilon$. Имеем

$$\begin{aligned}\sqrt{\rho_n}A_n\sqrt{\rho_n} = \sqrt{\rho_n}P_\varepsilon A_n P_\varepsilon\sqrt{\rho_n} + \sqrt{\rho_n}P_\varepsilon A_n \overline{P}_\varepsilon\sqrt{\rho_n}\\ + \sqrt{\rho_n}\overline{P}_\varepsilon A_n P_\varepsilon\sqrt{\rho_n} + \sqrt{\rho_n}\overline{P}_\varepsilon A_n \overline{P}_\varepsilon\sqrt{\rho_n}, \qquad n\geqslant 0, \end{aligned} \tag{6.7}$$

Поскольку P_ε – проектор конечного ранга, последовательность $\{P_\varepsilon A_n P_\varepsilon\}$ сходится к оператору $P_\varepsilon A_0 P_\varepsilon$ по норме пространства $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ и, следовательно, последовательность $\{\sqrt{\rho_n}P_\varepsilon A_n P_\varepsilon\sqrt{\rho_n}\}$ сходится к оператору $\sqrt{\rho_0}P_\varepsilon A_0 P_\varepsilon\sqrt{\rho_0}$ по норме пространства $\mathfrak{T}(\mathscr{H})$, при этом нетрудно видеть, что норма Гильберта–Шмидта остальных слагаемых в правой части (6.7) стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$ равномерно по n.

6.2. Вспомогательные результаты.

Лемма 7. *Любое полное ортогонально неразложимое семейство чистых состояний в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ содержит счетное полное ортогонально неразложимое подсемейство.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{H}$ – множество всех подпространств пространства $\mathscr{H}$, порожденных счетными ортогонально неразложимыми подсемействами семейства $\mathfrak{S}$, частично упорядоченное отношением включения. Пусть $\mathfrak{H}_0$ – цепь в $\mathfrak{H}$ и $\mathscr{H}_0 = \overline{\bigcup_{\mathscr{K}\in\mathfrak{H}_0}\mathscr{K}}$. Поскольку существует счетная цепь $\{\mathscr{H}_k\}$ в $\mathfrak{H}$ такая, что $\mathscr{H}_0 = \overline{\bigcup_k \mathscr{H}_k}$, а объединение счетного числа счетных ортогонально неразложимых подсемейств является счетным ортогонально неразложимым подсемейством, подпространство $\mathscr{H}_0$ лежит в $\mathfrak{H}$. Поэтому $\mathscr{H}_0$ – верхняя грань цепи $\mathfrak{H}_0$, и в силу леммы Цорна в $\mathfrak{H}$ существует максимальный элемент $\mathscr{H}_m$. Предположим, что $\mathscr{H}_m \subsetneq \mathscr{H}$. Поскольку семейство $\mathfrak{S}$ полно и ортогонально неразложимо, оно содержит чистое состояние $|\varphi\rangle\langle\varphi|$ такое, что вектор $|\varphi\rangle$ не лежит ни в $\mathscr{H}_m$, ни в $\mathscr{H}_m^\perp$. Добавляя состояние $|\varphi\rangle\langle\varphi|$ к счетному ортогонально неразложимому подсемейству, соответствующему подпространству $\mathscr{H}_m$, получим счетное ортогонально неразложимое подсемейство, значит, $\mathscr{H}_m \vee \{\lambda|\varphi\rangle\} \in \mathfrak{H}$ вопреки максимальности $\mathscr{H}_m$.

Лемма 8. *Пусть* $\{|\varphi_i\rangle\}$ *– базис в сепарабельном гильбертовом пространстве* $\mathscr{H}$ *(в том смысле, что любой вектор* $|\psi\rangle$ *из* $\mathscr{H}$ *имеет единственное разложение* $|\psi\rangle = \sum_i c_i|\varphi_i\rangle$*). Множество* $\{|\phi_i\rangle\}$ *векторов, определенных формулой* (4.2) *посредством произвольного невырожденного распределения вероятностей* $\{\pi_i\}$*, образует ортонормированный базис в* $\mathscr{H}$.

Доказательство. Поскольку $\sum_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i| = I_{\mathscr{H}}$, для произвольного j имеем

$$|\phi_j\rangle = \sum_i \langle\phi_i|\phi_j\rangle|\phi_i\rangle$$

и, следовательно,

$$(\|\phi_j\|^2 - 1)|\phi_j\rangle + \sum_{i\neq j}\langle\phi_i|\phi_j\rangle|\phi_i\rangle = 0.$$

Действуя на обе части этого векторного равенства оператором $\sqrt{\rho_\pi}$ (определенным в (4.2)), получим

$$\sqrt{\pi_j}(\|\phi_j\|^2 - 1)|\varphi_j\rangle + \sum_{i\neq j}\sqrt{\pi_i}\langle\phi_i|\phi_j\rangle|\varphi_i\rangle = 0.$$

Поскольку $\{|\varphi_i\rangle\}$ – базис и $\pi_i > 0$ для всех i, имеем $\|\phi_j\|^2 = 1$ и $\langle\phi_i|\phi_j\rangle = 0$ для всех $i \neq j$. Поэтому $\{|\phi_i\rangle\}$ – ортонормированный набор векторов в $\mathscr{H}$. Этот набор является базисом, поскольку $\sum_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i| = I_{\mathscr{H}}$.

Автор благодарен участникам семинара “Квантовая вероятность, статистика, информация” под руководством А. С. Холево (МИАН им. В. А. Стеклова) за интерес к работе и полезные замечания. Автор также благодарен рецензенту за рекомендации, способствующие улучшению статьи, и найденные опечатки.

Список литературы

[1] А. С. Холево, *Статистическая структура квантовой теории*, ИКИ, М.–Ижевск, 2003; англ. пер.: A. S. Holevo, *Statistical structure of quantum theory*, Lect. Notes Phys. Monogr., **67**, Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[2] D. Petz, “Sufficiency of channels over von Neumann algebras”, *Quart. J. Math. Oxford Ser.* (2), **39**:153 (1988), 97–108.

[3] M. Ohya, D. Petz, *Quantum entropy and its use*, Texts Monogr. Phys., Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[4] А. С. Холево, *Квантовые системы, каналы, информация*, МЦНМО, М., 2010; англ. пер.: A. S. Holevo, *Quantum systems, channels, information*, De Gruyter Stud. Math. Phys., **16**, de Gruyter, Berlin, 2012.

[5] F. Hiai, M. Mosonyi, D. Petz, C. Beny, “Quantum f-divergences and error correction”, *Rev. Math. Phys.*, **23**:7 (2011), 691–747.

[6] A. Jenčová, “Reversibility conditions for quantum operations”, *Rev. Math. Phys.*, **24**:7 (2012), 1250016.

[7] M. E. Shirokov, *A criterion for coincidence of the entanglement-assisted classical capacity and the Holevo capacity of a quantum channel*, arXiv: 1202.3449.

[8] T. Ogawa, A. Sasaki, M. Iwamoto, H. Yamamoto, "Quantum secret sharing schemes and reversibility of quantum operations", *Phys. Rev. A*, **72** (2005), 032318.

[9] А. С. Холево, "Комплементарные каналы и проблема аддитивности", *ТВП*, **51**:1 (2006), 133–143; англ. пер.: A. S. Holevo, "Complementary channels and the additivity problem", *Theory Probab. Appl.*, **51**:1 (2007), 92–100.

[10] Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман, *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве*, Вища школа, Киев, 1977; англ. пер.: N. I. Akhiezer, I. M. Glazman, *Theory of linear operators in Hilbert space*, Boston–London, Pitman, 1981.

[11] У. Браттели, Д. Робинсон, *Операторные алгебры и квантовая статистическая механика*, Мир, М., 1982; пер. с англ.: O. Bratteli, D. W. Robinson, *Operator algebras and quantum statistical mechanics*, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1979.

[12] C. King, K. Matsumoto, M. Nathanson, M. B. Ruskai, "Properties of conjugate channels with applications to additivity and multiplicativity", *Markov Process. Related Fields*, **13**:2 (2007), 391–423.

[13] M. Horodecki, P.W. Shor, M.B. Ruskai, "Entanglement breaking channels", *Rev. Math. Phys.*, **15**:6 (2003), 629–641.

[14] A. Jencova, D. Petz, "Sufficiency in quantum statistical inference", *Comm. Math. Phys.*, **263**:1 (2006), 259–276.

[15] М. А. Нильсен, И. Чанг, *Квантовые вычисления и квантовая информация*, Мир, М., 2006; пер. с англ.: M. A. Nielsen, I. L. Chuang, *Quantum computation and quantum information*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.

[16] B. M. Terhal, P. Horodecki, "Schmidt number for density matrices", *Phys. Rev. A* (3), **61**:4 (2000), 040301.

[17] M. E. Shirokov, *The Schmidt number and partially entanglement breaking channels in infinite dimensions*, arXiv: 1110.4363.

[18] А. С. Холево, "Некоторые оценки для количества информации, передаваемого квантовым каналом связи", *Пробл. передачи информ.*, **9**:3 (1973), 3–11; англ. пер.: A. S. Holevo, "Some estimates of information transmitted through quantum communication channel", *Problems Inform. Transmission*, **9**:3 (1973), 177–183.

[19] А. С. Холево, М. Е. Широков, "Непрерывные ансамбли и пропускная способность квантовых каналов бесконечной размерности", *ТВП*, **50**:1 (2005), 98–114; англ. пер.: A. S. Holevo, M. E. Shirokov, "Continuous ensembles and the capacity of infinite-dimensional quantum channels", *Theory Probab. Appl.*, **50**:1 (2005), 86–98.

[20] А. С. Холево, М. Е. Широков, "Об аппроксимации бесконечномерных квантовых каналов", *Пробл. передачи информ.*, **44**:2 (2008), 3–22; англ. пер.: A. S. Holevo, M. E. Shirokov, "On approximation of infinite-dimensional quantum channels", *Problems Inform. Transmission*, **44**:2 (2008), 73–90.

М. Е. Широков (M. E. Shirokov)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: msh@mi.ras.ru

Поступила в редакцию
18.07.2012 и 18.03.2013