М. Е. Широков, Критерии равенства в двух энтропийных неравенствах, *Матем. сб.*, 2014, том 205, номер 7, 135–160

УДК 519.248.3

М. Е. Широков

Критерии равенства в двух энтропийных неравенствах

Получен критерий равенства χ-пропускной способности с точечным ограничением и квантовой взаимной информации квантового канала (некоммутативного марковского отображения). Показано, что множество входных состояний, для которых имеет место данное равенство, определяется ядром квантового канала (как линейного отображения).

Этот критерий применен для анализа бозонных гауссовских каналов. Показано, в частности, что для гауссовского канала, не имеющего вполне деполяризующих компонент, указанные характеристики могут совпадать только в негауссовских состояниях и получен критерий существования таких состояний.

Полученные результаты могут быть переформулированы как условия равенства χ-пропускной способности квантового канала с точечным ограничением и входной энтропии фон Неймана.

Библиография: 20 названий.

Ключевые слова: квантовые состояния, квантовые каналы, энтропия фон Неймана, квантовая взаимная информация, χ-пропускная способность квантового канала.

DOI: 10.4213/sm8288

§ 1. Введение

Квантовая теория информации – новое научное направление, активно развивающееся в последние годы – является источником целого ряда интересных математических проблем, формулировка и решение которых требуют использования методов теории операторов в гильбертовом пространстве, выпуклого анализа, теории меры в метрических пространствах.

Ключевым в квантовой теории информации является понятие квантового канала – линейного сохраняющего след вполне положительного отображения между банаховыми пространствами ядерных операторов (классов Шаттена порядка 1). Такие отображения описывают, вообще говоря, необратимую динамику открытых квантовых систем (см. [1; гл. 6]).

Свойства квантовых каналов описываются рядом числовых и функциональных характеристик, в частности, различными пропускными способностями, которые связаны со степенью обратимости канала. С одной стороны, эти пропускные способности определяются как характеристики заданных протоколов передачи информации (классической или квантовой) по квантовому каналу,

Работа выполнена при поддержке научной программы РАН “Математическая теория управления и динамических систем” и Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 12-01-00319-а и № 13-01-00295-а).

с другой – они связаны с функционально-аналитическими характеристиками канала как вполне положительного отображения (см. [2]).

К числу важных характеристик канала Φ относятся его χ-пропускная способность[1] $\overline{C}(\Phi,\rho)$ в состоянии ρ (также называемая χ-функцией канала Φ) и квантовая взаимная информация $I(\Phi,\rho)$ в состоянии ρ (один из аналогов взаимной информации классического канала связи, введенной К. Шенноном); см. [1], [3], [4]. Эти характеристики неотрицательны, имеют верхние границы

$$\overline{C}(\Phi,\rho)\leqslant H(\rho),\qquad I(\Phi,\rho)\leqslant 2H(\rho), \tag{1.1}$$

где $H(\rho)$ – энтропия фон Неймана состояния ρ, и связаны неравенством

$$\overline{C}(\Phi,\rho)\leqslant I(\Phi,\rho). \tag{1.2}$$

Хорошо известно, что равенство во втором неравенстве в (1.1) равносильно полной обратимости отображения Φ на носителе состояния ρ (см. [1], [4]). В настоящей статье получены необходимые и достаточные условия равенства в первом неравенстве в (1.1) и в (1.2), выраженные в терминах структуры канала.

В статье показано, что эти два неравенства связаны посредством так называемого комплементарного канала. Эта связь позволяет получить условия равенства в важном для приложений неравенстве (1.2), исследуя условия равенства в первом неравенстве в (1.1).

Такой подход и установленное в статье соотношение между равенством в первом неравенстве в (1.1) и определенным свойством обратимости канала позволяют получить критерий равенства в (1.2) для произвольного бесконечномерного канала Φ и состояния ρ с конечной энтропией фон Неймана. Этот критерий показывает, что множество всех смешанных состояний с конечной энтропией, для которых имеет место равенство в (1.2), определяется множеством $\ker\Phi$ (теорема 3). Он также позволяет доказать, что выполнение этого равенства для всех состояний ρ возможно только для вполне деполяризующего канала Φ (гипотеза, сформулированная в [5]).

Указанный критерий использован для анализа достижимости равенства в (1.2) для бозонных гауссовских каналов. В частности, показано, что если гауссовский канал Φ не является вполне деполяризующим, то строгое неравенство в (1.2) имеет место для всех невырожденных состояний с конечной энтропией, а его выполнение для всех смешанных состояний с конечной энтропией равносильно совпадению ранга оператора, описывающего преобразование канонических наблюдаемых, с размерностью входного симплектического пространства.

Критерий равенства в первом неравенстве в (1.1), а также результаты его применения к бозонным гауссовским каналам представлены в § 4.

---

[1] Информационный смысл этой характеристики, называемой в англоязычной литературе the Holevo capacity, рассмотрен в [1; гл. 8].

§ 2. Предварительные сведения

Пусть $\mathscr{H}$ – сепарабельное гильбертово пространство, $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ и $\mathfrak{T}(\mathscr{H})$ – банаховы пространства всех линейных ограниченных операторов в $\mathscr{H}$ с операторной нормой $\|\cdot\|$ и всех ядерных операторов в $\mathscr{H}$ со следовой нормой $\|\cdot\|_1 = \operatorname{Tr}|\cdot|$ (см. [1], [6]). Операторы из $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ будем обозначать латинскими буквами $A, B, \dots$, а операторы из $\mathfrak{T}(\mathscr{H})$ – греческими $\rho, \sigma, \dots$. Замкнутое выпуклое подмножество

$$\mathfrak{S}(\mathscr{H}) = \{\rho \in \mathfrak{T}(\mathscr{H}) \mid \rho \geqslant 0,\ \operatorname{Tr}\rho = 1\}$$

пространства $\mathfrak{T}(\mathscr{H})$ является полным сепарабельным метрическим пространством с метрикой, определяемой следовой нормой. Операторы из $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$ будем называть *состояниями*, поскольку каждый такой оператор ρ задает линейный нормальный функционал $A \mapsto \operatorname{Tr} A\rho$ с единичной нормой на алгебре $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$. *Чистыми состояниями* являются одномерные проекторы – крайние точки множества $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$. Носитель $\operatorname{supp}\rho$ состояния ρ – это ортогональное дополнение его ядра $\ker\rho$, размерность носителя будем называть рангом состояния: $\operatorname{rank}\rho = \dim\operatorname{supp}\rho$. Состояние ρ, у которого $\ker\rho = \{0\}$, называется невырожденным.

Для векторов и операторов ранга 1 в гильбертовом пространстве будем использовать дираковские обозначения $|\varphi\rangle, |\chi\rangle\langle\psi|, \dots$ (в которых действие оператора $|\chi\rangle\langle\psi|$ на вектор $|\varphi\rangle$ – это вектор $\langle\psi,\varphi\rangle|\chi\rangle$).

Тождественный оператор в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ и тождественное преобразование банахова пространства $\mathfrak{T}(\mathscr{H})$ обозначим $I_{\mathscr{H}}$ и $\mathrm{Id}_{\mathscr{H}}$ соответственно.

Энтропия фон Неймана состояния ρ определяется выражением[2]

$$H(\rho) = -\operatorname{Tr}\rho\log\rho = -\sum_{i=1}^{+\infty}\lambda_i\log\lambda_i,$$

в котором $\{\lambda_i\}$ – набор собственных значений состояния ρ (см. [1], [4]).

Квантовая относительная энтропия состояний ρ и σ определяется выражением

$$H(\rho\|\sigma) = \sum_{i=1}^{+\infty}\langle\varphi_i|[\rho\log\rho - \rho\log\sigma]\varphi_i\rangle,$$

в котором $\{|\varphi_i\rangle\}_{i=1}^{+\infty}$ – ортонормированный базис из собственных векторов состояния ρ (или σ) и считается, что $H(\rho\|\sigma) = +\infty$, если $\operatorname{supp}\rho \nsubseteq \operatorname{supp}\sigma$ (см. [1], [4]).

Конечный или счетный набор состояний $\{\rho_i\}$ с соответствующим распределением вероятностей $\{\pi_i\}$ будем называть *ансамблем* и обозначать $\{\pi_i, \rho_i\}$, а состояние $\overline{\rho} = \sum_i \pi_i\rho_i$ будем называть *средним состоянием* этого ансамбля.

χ-граница ансамбля $\{\pi_i, \rho_i\}$ определяется выражением

$$\chi(\{\pi_i,\rho_i\}) \doteq \sum_i \pi_i H(\rho_i\|\overline{\rho}) = H(\overline{\rho}) - \sum_i \pi_i H(\rho_i), \tag{2.1}$$

[2]Здесь и далее $\log$ – натуральный логарифм.

в котором вторая формула справедлива при условии $H(\overline{\rho}) < +\infty$. В [7] доказано, что данная величина дает верхнюю границу для классической взаимной информации при различении набора состояний $\{\rho_i\}$ с помощью квантовых измерений (подробности см. в [1; гл. 5]). χ-граница играет центральную роль при анализе различных протоколов передачи классической информации по квантовому каналу, входит в выражения для пропускных способностей таких протоколов.

Пусть $\mathscr{H}_A$ и $\mathscr{H}_B$ – гильбертовы пространства, которые будем называть входным и выходным соответственно, а $\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathscr{H}_A) \to \mathfrak{T}(\mathscr{H}_B)$ – линейное отображение, которое положительно и сохраняет след ($\Phi(\rho) \geqslant 0$ и $\operatorname{Tr}\Phi(\rho) = \operatorname{Tr}\rho$ для любого $\rho \geqslant 0$). *Двойственное* отображение $\Phi^*\colon \mathfrak{B}(\mathscr{H}_B) \to \mathfrak{B}(\mathscr{H}_A)$ (определяемое соотношением $\operatorname{Tr}\Phi(\rho)A = \operatorname{Tr}\rho\Phi^*(A)$, $\rho \in \mathfrak{T}(\mathscr{H}_A)$, $A \in \mathfrak{B}(\mathscr{H}_B)$) является положительным отображением таким, что $\Phi^*(I_{\mathscr{H}_B}) = I_{\mathscr{H}_A}$.

Пусть $\mathscr{H}_d$ – гильбертово пространство размерности $d \in \mathbb{N}$ (изоморфное $\mathbb{C}^d$).

Линейное отображение $\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathscr{H}_A) \to \mathfrak{T}(\mathscr{H}_B)$ называется *вполне положительным*, если отображение $\Phi \otimes \mathrm{Id}_{\mathscr{H}_d}$ из $\mathfrak{T}(\mathscr{H}_A \otimes \mathscr{H}_d)$ в $\mathfrak{T}(\mathscr{H}_B \otimes \mathscr{H}_d)$ является положительным при каждом натуральном d (о равносильных определениях полной положительности см. [1; гл. 6, § 2]).

Определение 1. Линейное вполне положительное сохраняющее след отображение $\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathscr{H}_A) \to \mathfrak{T}(\mathscr{H}_B)$ называется *квантовым каналом*.

Данное определение квантового канала соответствует картине Шрёдингера, в которой динамика квантовой системы описывается посредством эволюции состояний. В картине Гейзенберга квантовым каналом является двойственное отображение $\Phi^*\colon \mathfrak{B}(\mathscr{H}_B) \to \mathfrak{B}(\mathscr{H}_A)$, определяющее эволюцию квантовых наблюдаемых (см. [1; гл. 6]).

Используя теорему Стайнспринга о представлении вполне положительных отображений C^*-алгебр и свойства алгебры $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$, можно получить (см. [1], [4]) следующее представление произвольного квантового канала $\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathscr{H}_A) \to \mathfrak{T}(\mathscr{H}_B)$: существуют гильбертово пространство $\mathscr{H}_E$ и изометрия $V\colon \mathscr{H}_A \to \mathscr{H}_B \otimes \mathscr{H}_E$ такие, что

$$\Phi(\rho) = \operatorname{Tr}_{\mathscr{H}_E} V\rho V^* \quad \forall\, \rho \in \mathfrak{T}(\mathscr{H}_A). \tag{2.2}$$

Данное представление будем далее называть представлением Стайнспринга канала Φ, а оператор V – изометрией Стайнспринга.

Квантовый канал

$$\mathfrak{T}(\mathscr{H}_A) \ni \rho \mapsto \widehat{\Phi}(\rho) = \operatorname{Tr}_{\mathscr{H}_B} V\rho V^* \in \mathfrak{T}(\mathscr{H}_E) \tag{2.3}$$

называется *комплементарным* к каналу Φ (см. [1; гл. 6, § 6] и [8]). Комплементарный канал определен однозначно: если $\widehat{\Phi}'\colon \mathfrak{T}(\mathscr{H}_A) \to \mathfrak{T}(\mathscr{H}_{E'})$ – канал, задаваемый формулой (2.3) с помощью изометрии Стайнспринга $V'\colon \mathscr{H}_A \to \mathscr{H}_B \otimes \mathscr{H}_{E'}$, то каналы $\widehat{\Phi}$ и $\widehat{\Phi}'$ изометрически эквивалентны в смысле следующего определения (см. приложение в [8]).

Определение 2. Каналы $\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathscr{H}_A) \to \mathfrak{T}(\mathscr{H}_B)$ и $\Phi'\colon \mathfrak{T}(\mathscr{H}_A) \to \mathfrak{T}(\mathscr{H}'_B)$ называются *изометрически эквивалентными*, если существует частичная изометрия $W\colon \mathscr{H}_B \to \mathscr{H}_{B'}$ такая, что

$$\Phi'(\rho) = W\Phi(\rho)W^*, \quad \Phi(\rho) = W^*\Phi'(\rho)W, \qquad \rho \in \mathfrak{T}(\mathscr{H}_A). \tag{2.4}$$

Понятие изометрической эквивалентности близко к понятию унитарной эквивалентности (см. замечание после определения 2 в [9]).

Будем использовать следующее естественное определение.

Определение 3. Сужение канала $\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathscr{H}_A) \to \mathfrak{T}(\mathscr{H}_B)$ на подпространство $\mathfrak{T}(\mathscr{H}_0)$, где $\mathscr{H}_0$ – нетривиальное подпространство в $\mathscr{H}_A$, называется *подканалом канала* Φ, *соответствующим подпространству* $\mathscr{H}_0$.

Из определений следует, что комплементарный канал к подканалу канала Φ, соответствующему подпространству $\mathscr{H}_0$, совпадает с подканалом комплементарного канала $\widehat{\Phi}$, соответствующим подпространству $\mathscr{H}_0$, т.е. $\widehat{\Psi} = \widehat{\Phi}|_{\mathfrak{T}(\mathscr{H}_0)}$, где $\Psi = \Phi|_{\mathfrak{T}(\mathscr{H}_0)}$.

Важную роль в статье играет следующий класс квантовых каналов (см. [1], [4]).

Определение 4. Квантовый канал $\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathscr{H}_A) \to \mathfrak{T}(\mathscr{H}_B)$ называется *классически-квантовым каналом дискретного типа* (кратко – *дискретным c-q каналом*), если он имеет представление

$$\Phi(\rho) = \sum_{i=1}^{\dim \mathscr{H}_A} \langle \varphi_i|\rho\varphi_i\rangle \sigma_i, \qquad \rho \in \mathfrak{T}(\mathscr{H}_A), \tag{2.5}$$

в котором $\{|\varphi_i\rangle\}$ – ортонормированный базис в $\mathscr{H}_A$, а $\{\sigma_i\}$ – набор состояний из $\mathfrak{S}(\mathscr{H}_B)$.

Существуют классически-квантовые каналы, не являющиеся дискретными (см. приложение в [10]).

Канал (2.5), у которого $\sigma_i = \sigma$ для всех i, представляется в виде $\Phi(\rho) = [\operatorname{Tr}\rho]\sigma$ и называется *вполне деполяризующим* (см. [1], [4]). Будем использовать следующую простую лемму.

Лемма 1. *Канал $\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathscr{H}_A) \to \mathfrak{T}(\mathscr{H}_B)$ является вполне деполяризующим тогда и только тогда, когда $\Phi(|\varphi\rangle\langle\psi|) = 0$ для любых ортогональных векторов $\varphi, \psi \in \mathscr{H}_A$.*

Для произвольного канала Φ и любого ансамбля $\{\pi_i, \rho_i\}$ его входных состояний χ-границу ансамбля $\{\pi_i, \Phi(\rho_i)\}$ будем обозначать $\chi_\Phi(\{\pi_i, \rho_i\})$.

χ-пропускная[3] способность канала $\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathscr{H}_A) \to \mathfrak{T}(\mathscr{H}_B)$ в заданном состоянии $\rho \in \mathfrak{S}(\mathscr{H}_A)$ определяется выражением

$$\overline{C}(\Phi, \rho) = \sup_{\sum_i \pi_i\rho_i = \rho} \chi_\Phi(\{\pi_i, \rho_i\}), \tag{2.6}$$

[3] Эта величина также называется χ-пропускной способностью с ограничением на среднее состояние. В [5], [11] функция $\rho \mapsto \overline{C}(\Phi, \rho)$ обозначается $\chi_\Phi(\rho)$ и называется χ-функцией канала Φ.

в котором супремум берется по всем конечным или счетным ансамблям $\{\pi_i, \rho_i\}$ со средним состоянием ρ (см. [1], [11]). Если $H(\Phi(\rho)) < +\infty$, то

$$\overline{C}(\Phi, \rho) = H(\Phi(\rho)) - \widehat{H}_{\Phi}(\rho), \tag{2.7}$$

где $\widehat{H}_{\Phi}(\rho) = \inf_{\sum_i \pi_i\rho_i=\rho} \sum_i \pi_i H(\Phi(\rho_i))$ – σ-выпуклая оболочка вогнутой функции $\rho \mapsto H(\Phi(\rho))$. Заметим, что супремум в (2.6) и инфимум в (2.7) можно брать только по ансамблям из чистых состояний (в силу выпуклости и вогнутости соответствующих функций).

В силу монотонности квантовой относительной энтропии

$$\chi_{\Phi}(\{\pi_i, \rho_i\}) \leqslant \chi(\{\pi_i, \rho_i\}) \leqslant H(\rho) \tag{2.8}$$

для любого ансамбля $\{\pi_i, \rho_i\}$ со средним состоянием ρ. Поэтому для произвольного квантового канала Φ и любого состояния ρ имеет место неравенство

$$\overline{C}(\Phi, \rho) \leqslant H(\rho). \tag{2.9}$$

Квантовая взаимная информация конечномерного канала $\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathscr{H}_A) \to \mathfrak{T}(\mathscr{H}_B)$ в состоянии $\rho \in \mathfrak{S}(\mathscr{H}_A)$ определяется выражением

$$I(\Phi, \rho) = H(\rho) + H(\Phi(\rho)) - H(\Phi, \rho), \tag{2.10}$$

в котором $H(\Phi, \rho)$ – обменная энтропия канала Φ в состоянии ρ (см. [1], [3], [4]).

Используя понятие комплементарного канала, это выражение можно переписать в виде

$$I(\Phi, \rho) = H(\rho) + H(\Phi(\rho)) - H(\widehat{\Phi}(\rho)) \tag{2.11}$$

(поскольку нетрудно проверить, что $H(\widehat{\Phi}(\rho)) = H(\Phi, \rho)$; см. [1; гл. 7]).

В бесконечномерном случае для избежания неопределенности $\infty - \infty$ в (2.10) и (2.11) квантовую взаимную информацию целесообразно определить выражением

$$I(\Phi, \rho) = H\bigl(\Phi \otimes \mathrm{Id}_{\mathscr{H}_R}(\widehat{\rho}) \| \Phi \otimes \mathrm{Id}_{\mathscr{H}_R}(\rho \otimes \varrho)\bigr),$$

в котором $\mathscr{H}_R$ – гильбертово пространство, изоморфное пространству $\mathscr{H}_A$, $\widehat{\rho}$ – очищение[4] состояния ρ в пространстве $\mathscr{H}_A \otimes \mathscr{H}_R$ и $\varrho = \mathrm{Tr}_{\mathscr{H}_A} \widehat{\rho}$ – состояние из $\mathfrak{S}(\mathscr{H}_R)$, изоморфное состоянию ρ (см. [1], [10]).

Важную роль в статье играет выражение

$$I(\Phi, \rho) = H(\rho) + \overline{C}(\Phi, \rho) - \overline{C}(\widehat{\Phi}, \rho), \tag{2.12}$$

справедливое для произвольного квантового канала Φ и любого состояния ρ с конечной энтропией (условие $H(\rho) < +\infty$ гарантирует конечность всех слагаемых в (2.12) в силу неравенства (2.9)). Если $H(\Phi(\rho)) < +\infty$ и $H(\widehat{\Phi}(\rho)) < +\infty$, то данное выражение легко доказать, используя (2.7) и замечая, что $\widehat{H}_{\Phi} \equiv \widehat{H}_{\widehat{\Phi}}$ (это следует из совпадения функций $\rho \mapsto H(\Phi(\rho))$ и $\rho \mapsto H(\widehat{\Phi}(\rho))$ на множестве чистых состояний; см. [8]). В общем случае выражение (2.12) выводится из предложения 4 в [10].

[4]Это значит, что $\widehat{\rho}$ – чистое состояние из $\mathfrak{S}(\mathscr{H}_A \otimes \mathscr{H}_R)$ такое, что $\mathrm{Tr}_{\mathscr{H}_R} \widehat{\rho} = \rho$.

χ-пропускная способность и квантовая взаимная информация произвольного канала Φ в состоянии ρ связаны неравенством

$$\overline{C}(\Phi,\rho)\leqslant I(\Phi,\rho). \tag{2.13}$$

Если $H(\rho)<+\infty$, то данное неравенство прямо следует из (2.9) и (2.12). Для произвольного состояния ρ его можно доказать, используя последовательность состояний конечного ранга $\rho_n=[\operatorname{Tr}P_n\rho]^{-1}P_n\rho$, где P_n – спектральный проектор состояния ρ, соответствующий его n максимальным собственным значениям. Из вогнутости и полунепрерывности снизу функций $\rho\mapsto\overline{C}(\Phi,\rho)$ и $\rho\mapsto I(\Phi,\rho)$ следует соответственно, что

$$\lim_{n\to+\infty}\overline{C}(\Phi,\rho_n)=\overline{C}(\Phi,\rho)\leqslant+\infty,\qquad \lim_{n\to+\infty}I(\Phi,\rho_n)=I(\Phi,\rho)\leqslant+\infty. \tag{2.14}$$

Поэтому неравенство (2.13) для состояния ρ следует из выполнимости этого неравенства для каждого состояния последовательности $\{\rho_n\}$.

Выражение (2.12) показывает, что при условии $H(\rho)<+\infty$ неравенства (2.9) и (2.13) являются, образно говоря, взаимно комлементарными, в частности

$$\{\overline{C}(\Phi,\rho)=I(\Phi,\rho)\}\quad\Longleftrightarrow\quad\{\overline{C}(\widehat{\Phi},\rho)=H(\rho)\}, \tag{2.15}$$

и, следовательно, можно получить условия равенства в (2.9), исследуя условия равенства в (2.13) и наоборот.

Следующее наблюдение, доказываемое с помощью (2.15), существенно используется в статье.

Лемма 2. *Пусть* $\Phi\colon\mathfrak{T}(\mathscr{H}_A)\to\mathfrak{T}(\mathscr{H}_B)$ *и* $\Psi\colon\mathfrak{T}(\mathscr{H}_B)\to\mathfrak{T}(\mathscr{H}_C)$ *– квантовые каналы, а* ρ *– состояние из* $\mathfrak{S}(\mathscr{H}_A)$ *такое, что* $H(\rho)<+\infty$. *Тогда*

$$\overline{C}(\Phi,\rho)=I(\Phi,\rho)\quad\Longrightarrow\quad\overline{C}(\Psi\circ\Phi,\rho)=I(\Psi\circ\Phi,\rho).$$

Доказательство. В доказательстве леммы 17 в [12] показано[5] существование канала Θ такого, что $\widehat{\Phi}=\Theta\circ\widehat{\Psi\circ\Phi}$. Поэтому из цепного правила для χ-пропускной способности и (2.9) следует, что

$$\overline{C}(\widehat{\Phi},\rho)=H(\rho)\quad\Longrightarrow\quad\overline{C}(\widehat{\Psi\circ\Phi},\rho)=H(\rho).$$

В силу (2.15) эта импликация равносильна утверждению леммы.

Случай равенства в (2.9) будем исследовать, используя понятие обратимости[6] квантового канала по отношению к семейству входных состояний (см. [13], [14]).

Определение 5. Квантовый канал $\Phi\colon\mathfrak{T}(\mathscr{H}_A)\to\mathfrak{T}(\mathscr{H}_B)$ называется *обратимым* относительно семейства $\mathfrak{S}\subseteq\mathfrak{S}(\mathscr{H}_A)$, если существует квантовый канал $\Psi\colon\mathfrak{T}(\mathscr{H}_B)\to\mathfrak{T}(\mathscr{H}_A)$ такой, что $\rho=\Psi\circ\Phi(\rho)$ для всех $\rho\in\mathfrak{S}$.

---

[5] Это можно также показать, используя представление комплементарного канала через операторы Крауса исходного канала (см. [8; формула (11)]).

[6] В работе [13] и более ранних статьях это свойство называлось достаточностью канала Φ относительно семейства $\mathfrak{S}$.

Заметим, что квантовый канал обратим относительно семейства всех входных состояний тогда и только тогда, когда он является каналом без шума (см. [1; гл. 9]).

Определение 6. Квантовый канал Φ называется *каналом без шума*, если он унитарно эквивалентен каналу $\rho \mapsto \rho \otimes \sigma$, где σ – заданное состояние.

Общий критерий обратимости квантового канала относительно семейства входных состояний, полученный в [13], дает следующий критерий равенства в первом неравенстве в (2.8).

Теорема 1. *Пусть* $\mathfrak{S} = \{\rho_i\}$ – *семейство состояний из* $\mathfrak{S}(\mathscr{H}_A)$ *и* $\{\pi_i\}$ – *невырожденное распределение вероятностей такое, что* $\chi(\{\pi_i, \rho_i\}) < +\infty$. *Квантовый канал* $\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathscr{H}_A) \to \mathfrak{T}(\mathscr{H}_B)$ *обратим относительно семейства* $\mathfrak{S}$ *тогда и только тогда, когда*

$$\chi_\Phi(\{\pi_i, \rho_i\}) = \chi(\{\pi_i, \rho_i\}). \tag{2.16}$$

Замечание 1. Нетривиальной частью теоремы 1 является утверждение о том, что из (2.16) следует обратимость канала Φ. Обратная импликация непосредственно выводится из первого неравенства в (2.8) и определения 5.

В силу этой импликации из (2.6) и второй формулы в (2.1) следует, что если канал Φ обратим относительно некоторого семейства $\{\rho_i\}$ чистых состояний, то $\overline{C}(\Phi, \overline{\rho}) = H(\overline{\rho})$, где $\overline{\rho} = \sum_i \pi_i \rho_i$, при любом распределении вероятностей $\{\pi_i\}$. Ниже мы установим сильное обращение этого утверждения: *если* $\overline{C}(\Phi, \rho) = H(\rho)$ *для смешанного состояния* ρ, *то канал* Φ *обратим относительно семейства ортогональных чистых состояний, соответствующих некоторому базису из собственных векторов состояния* ρ (см. доказательство теоремы 3).

Необходимые и достаточные условия обратимости квантового канала относительно полных семейств чистых состояний получены в [9], где используется следующее естественное определение.

Определение 7. Семейство $\{|\varphi_\lambda\rangle\langle\varphi_\lambda|\}_{\lambda\in\Lambda}$ чистых состояний из $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$ называется *ортогонально-неразложимым*, если не существует подпространство $\mathscr{H}_0 \subset \mathscr{H}$ такое, что часть векторов семейства $\{|\varphi_\lambda\rangle\}_{\lambda\in\Lambda}$ лежит в $\mathscr{H}_0$, а все остальные – в $\mathscr{H}_0^{\perp}$.

Нетрудно показать, что произвольное семейство $\mathfrak{S}$ чистых состояний из $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$ представляется в виде $\mathfrak{S} = \bigcup_k \mathfrak{S}_k$, где $\{\mathfrak{S}_k\}$ – конечный или счетный набор ортогонально-неразложимых подсемейств семейства $\mathfrak{S}$ такой, что $\rho \perp \sigma$ для всех $\rho \in \mathfrak{S}_k, \sigma \in \mathfrak{S}_l$, $k \neq l$ (см. [9; лемма 4.3]). Данное разложение единственно (с точностью до перестановки подсемейств).

Используя введенное в определении 3 понятие подканала и замечание после этого определения, из [9; предложение 1, теорема 4] легко вывести следующие два утверждения.

Теорема 2. *Пусть* $\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathscr{H}_A) \to \mathfrak{T}(\mathscr{H}_B)$ – *это квантовый канал, а* $\mathfrak{S} = \{|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|\}$ – *семейство чистых состояний из* $\mathfrak{S}(\mathscr{H}_A)$.

A) *Если семейство* $\mathfrak{S}$ *состоит из ортогональных состояний, то канал* Φ *обратим относительно семейства* $\mathfrak{S}$ *тогда и только тогда, когда*

$$\widehat{\Phi}(\rho) = \sum_{i=1}^{\dim \mathscr{H}_{\mathfrak{S}}} \langle\varphi_i|\rho\varphi_i\rangle\sigma_i \quad \forall\,\rho \in \mathfrak{T}(\mathscr{H}_{\mathfrak{S}}),$$

где $\mathscr{H}_{\mathfrak{S}}$ – *подпространство пространства* $\mathscr{H}_A$, *порожденное семейством* $\{|\varphi_i\rangle\}$, *а* $\{\sigma_i\}$ – *набор состояний из* $\mathfrak{S}(\mathscr{H}_E)$.

B) *Пусть* $\mathfrak{S} = \bigcup_k \mathfrak{S}_k$ – *разложение* $\mathfrak{S}$ *на ортогонально-неразложимые подсемейства, а* P_k – *проектор на подпространство, порожденное всеми состояниями из* $\mathfrak{S}_k$. *Если канал* Φ *обратим относительно семейства* $\mathfrak{S}$, *то он обратим относительно семейства*

$$\widehat{\mathfrak{S}} = \biggl\{\rho \in \mathfrak{S}(\mathscr{H}_A) \biggm| \rho = \sum_k P_k\rho P_k\biggr\}.$$

Теорема 2 показывает, в частности, что обратимость квантового канала относительно хотя бы одного семейства чистых состояний равносильна существованию хотя бы одного дискретного c-q подканала у комплементарного канала. Простой критерий последнего свойства дается следующей леммой.

Лемма 3. *У канала* $\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathscr{H}_A) \to \mathfrak{T}(\mathscr{H}_B)$ *есть дискретный* c-q *подканал тогда и только тогда, когда существует ортогональное семейство* $\{|\varphi_i\rangle\}$ *единичных векторов в* $\mathscr{H}_A$ *такое, что* $\Phi(|\varphi_i\rangle\langle\varphi_j|) = 0$ *для всех* $i \neq j$. *В этом случае подканал* $\Phi|_{\mathfrak{T}(\mathscr{H}_0)}$ *имеет представление* (2.5) *с* $\mathscr{H}_0 = \overline{\mathrm{lin}}\{|\varphi_i\rangle\}$ *вместо* $\mathscr{H}_A$.

Для доказательства достаточно заметить, что $\rho = \sum_{i,j}\langle\varphi_i|\rho\varphi_j\rangle|\varphi_i\rangle\langle\varphi_j|$ для всех ρ из $\mathfrak{T}(\mathscr{H}_0)$.

§ 3. Основные результаты

С помощью теоремы 1 и соотношения эквивалентности (2.15) в [5] показано, что

$$\overline{C}(\Phi,\rho) = I(\Phi,\rho) \quad\Longrightarrow\quad \Phi|_{\mathfrak{T}(\mathscr{H}_\rho)} \text{ – дискретный } c\text{-}q \text{ канал}$$

для конечномерного канала Φ, где $\mathscr{H}_\rho$ – носитель состояния ρ. Теорема 2 позволяет усилить это утверждение, показав, что $\Phi|_{\mathfrak{T}(\mathscr{H}_\rho)}$ – дискретный c-q канал, определяемый некоторым базисом из собственных векторов состояния[7] ρ, что дает критерий равенства $\overline{C}(\Phi,\rho) = I(\Phi,\rho)$.

Теорема 3. *Пусть* $\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathscr{H}_A) \to \mathfrak{T}(\mathscr{H}_B)$ – *квантовый канал, а* $\Pi(\Phi)$ – *множество всех ортогональных семейств* $\{|\varphi_i\rangle\}$ *единичных векторов из* $\mathscr{H}_A$ *таких, что* $\Phi(|\varphi_i\rangle\langle\varphi_j|) = 0$ *для всех* $i \neq j$.

A) *Пусть* ρ – *смешанное состояние из* $\mathfrak{S}(\mathscr{H}_A)$ *такое, что* $H(\rho) < +\infty$. *Следующие утверждения равносильны*:

(i) $\overline{C}(\Phi,\rho) = I(\Phi,\rho)$;

---

[7] Здесь и далее считаем, что ρ – смешанное состояние (поскольку $\overline{C}(\Phi,\rho) = I(\Phi,\rho) = 0$ для любого чистого состояния ρ), а говоря о базисе из собственных векторов состояния ρ, имеем в виду базис в носителе $\mathscr{H}_\rho$ этого состояния.

(ii) *множество* $\Pi(\Phi)$ *содержит хотя бы один базис из собственных векторов состояния* ρ;

(iii) $\Phi(\varrho)=\sum_i\langle\varphi_i|\varrho\varphi_i\rangle\sigma_i$ *для любого* $\varrho\in\mathfrak{T}(\mathscr{H}_\rho)$, *где* $\mathscr{H}_\rho=\operatorname{supp}\rho$, $\{|\varphi_i\rangle\}$ – *некоторый ортонормированный базис из собственных векторов состояния* ρ, *а* $\{\sigma_i\}$ – *набор состояний из* $\mathfrak{S}(\mathscr{H}_B)$.

Для состояния ρ *с* $H(\rho)=+\infty$ *данные утверждения связаны следующим образом*: (iii) $\Longleftrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (i) (*с возможными значениями* $+\infty$ *обеих частей равенства в* (i)).

B) *Множество* $\mathfrak{S}_\Phi^{=}$ *всех смешанных состояний* ρ *из* $\mathfrak{S}(\mathscr{H}_A)$ *с конечной энтропией, для которых имеет место* (i), *можно представить в виде*

$$\mathfrak{S}_\Phi^{=}=\bigcup_{\{|\varphi_i\rangle\}\in\Pi(\Phi)}\biggl\{\rho=\sum_i\pi_i|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|\biggm|\{\pi_i\}\in\mathfrak{P}_{\mathrm{f}}\biggr\},\tag{3.1}$$

где $\mathfrak{P}_{\mathrm{f}}$ – *множество всех распределений вероятностей с конечной энтропией Шеннона.*

Замечание 2. Из п. (i) теоремы 3 не следует принадлежность множеству $\Pi(\Phi)$ любого ортонормированного базиса из собственных векторов состояния ρ. В качестве примера рассмотрим канал

$$\Phi(\rho)=\langle\varphi|\rho\varphi\rangle|\varphi\rangle\langle\varphi|+\langle\psi|\rho\psi\rangle|\psi\rangle\langle\psi|$$

из $\mathfrak{T}(\mathscr{H}_2)$ в себя, где $\{|\varphi\rangle,|\psi\rangle\}$ – ортонормированный базис в $\mathscr{H}_2$. Нетрудно видеть, что $\widehat{\Phi}=\Phi$ и, следовательно, $\overline{C}(\Phi,\rho_c)=I(\Phi,\rho_c)=H(\rho_c)=\log 2$, где $\rho_c=\frac{1}{2}I_{\mathscr{H}_2}$. При этом множество $\Pi(\Phi)$ содержит только один базис из собственных векторов состояния ρ_c – базис $\{|\varphi\rangle,|\psi\rangle\}$.

Замечание 3. В силу теоремы 3 множество $\mathfrak{S}_\Phi^{=}$ полностью определяется множеством $\ker\Phi$ (поскольку это множество определяет множество $\Pi(\Phi)$). Примеры каналов Φ, у которых множество $\Pi(\Phi)$ содержит бесконечно много различных неполных семейств векторов, рассмотрены в § 4 (где дано описание множества $\Pi(\Phi)$ для бозонных гауссовских каналов).

Замечание 4. Хотя условие $H(\rho)<+\infty$ существенно используется в доказательстве импликации (i) $\Longrightarrow$ (ii), (iii) в теореме 3 (поскольку оно основано на соотношении (2.15)), это условие кажется техническим. Вопрос о справедливости этой импликации и приведенного ниже следствия 1 для состояний с бесконечной энтропией остается открытым.

Доказательство теоремы 3. A) Из леммы 3 непосредственно следует, что (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii).

(iii) $\Longrightarrow$ (i). Заметим, что каналы Φ и $\widehat{\widehat{\Phi}}$ изометрически эквивалентны (см. определение 2 и замечание перед ним), а потому (iii) выполнено для Φ тогда и только тогда, когда (iii) выполнено для $\widehat{\widehat{\Phi}}$ (с тем же самым базисом $\{|\varphi_i\rangle\}$).

В силу этого замечания и части A) теоремы 2 из (iii) следует обратимость канала $\widehat{\Phi}$ относительно семейства $\{|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|\}$, которая в силу замечания 1 показывает, что $\overline{C}(\widehat{\Phi},\rho)=H(\rho)$. Поэтому если $H(\rho)<+\infty$, то (i) следует из (2.15).

Если $H(\rho)=+\infty$, то эта обратимость показывает, что $\overline{C}(\widehat{\Phi},\rho_n)=H(\rho_n)$ и, следовательно, $\overline{C}(\Phi,\rho_n)=I(\Phi,\rho_n)$, где $\rho_n=[\operatorname{Tr}P_n\rho]^{-1}P_n\rho$, $P_n=\sum_{i=1}^n|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$. В силу соотношений (2.14) имеем $\overline{C}(\Phi,\rho)=I(\Phi,\rho)\leqslant+\infty$.

(i) $\Longrightarrow$ (iii). Мы докажем эту импликацию, считая, что Φ – конечномерный канал ($\dim\mathscr{H}_A,\dim\mathscr{H}_B<+\infty$). Это предположение позволяет показать основную идею доказательства без дополнительных технических сложностей, неизбежно возникающих при анализе бесконечномерных каналов. Общее доказательство данной импликации приведено в п. 6.1.

Если Φ – конечномерный канал, то канал $\widehat{\Phi}$ также конечномерен (см. [8]) и, следовательно, для любого состояния $\rho\in\mathfrak{S}(\mathscr{H}_A)$ супремум в выражении для $\overline{C}(\widehat{\Phi},\rho)$ (выражение (2.6) с $\widehat{\Phi}$ вместо Φ) достигается на некотором конечном ансамбле $\{\pi_i,\rho_i\}$ чистых состояний, т.е.

$$\overline{C}(\widehat{\Phi},\rho)=\chi_{\widehat{\Phi}}(\{\pi_i,\rho_i\}),\qquad \sum_i\pi_i\rho_i=\rho$$

(существование такого ансамбля доказывается с помощью аргументов из [15]).

Если имеет место (i), то из (2.15) следует, что $\overline{C}(\widehat{\Phi},\rho)=H(\rho)$, а поскольку $H(\rho)=\chi(\{\pi_i,\rho_i\})$ в силу второй формулы в (2.1), это значит, что

$$\chi_{\widehat{\Phi}}(\{\pi_i,\rho_i\})=\chi(\{\pi_i,\rho_i\}).$$

В силу теоремы 1 это равносильно обратимости канала $\widehat{\Phi}$ относительно семейства $\mathfrak{S}=\{\rho_i\}$. Пусть $\mathfrak{S}=\bigcup_k\mathfrak{S}_k$ – разложение $\mathfrak{S}$ на ортогонально-неразложимые подсемейства (см. абзац перед теоремой 2). Множество всех индексов i таких, что $\rho_i\in\mathfrak{S}_k$, обозначим I_k. Пусть $\{|\varphi_k^i\rangle\}_i$ – ортонормированный базис из собственных векторов положительного оператора $\rho_k=\sum_{i\in I_k}\pi_i\rho_i$. Поскольку $\rho=\sum_k\rho_k$ и $\operatorname{supp}\rho_k\perp\operatorname{supp}\rho_l$ для всех $k\neq l$, то $\{|\varphi_k^i\rangle\}_{ik}$ – ортонормированный базис из собственных векторов состояния ρ.

В силу части B) теоремы 2 обратимость канала $\widehat{\Phi}$ относительно семейства $\mathfrak{S}$ влечет обратимость этого канала относительно ортогонального семейства $\{|\varphi_k^i\rangle\langle\varphi_k^i|\}_{ik}$(содержащегося в семействе $\widehat{\mathfrak{S}}$). Из части A) теоремы 2 следует выполнение утверждения (iii) с базисом $\{|\varphi_k^i\rangle\}_{ik}$ для канала $\widehat{\widehat{\Phi}}$, а значит, и для канала Φ (в силу замечания в начале доказательства импликации (iii) $\Longrightarrow$ (i)).

B) Представление (3.1) непосредственно следует из части A) теоремы.

Теорема 3 дает достаточные условия строгого неравенства в (2.13).

Следствие 1. *Пусть $\Phi\colon\mathfrak{T}(\mathscr{H}_A)\to\mathfrak{T}(\mathscr{H}_B)$ – квантовый канал.*

A) *Если Φ не является дискретным c-q каналом, то $\overline{C}(\Phi,\rho)<I(\Phi,\rho)$ для любого невырожденного состояния ρ из $\mathfrak{S}(\mathscr{H}_A)$ с конечной энтропией.*

B) *Если множество $\ker\Phi$ не содержит операторы ранга 1, то $\overline{C}(\Phi,\rho)<I(\Phi,\rho)$ для всех смешанных состояний ρ из $\mathfrak{S}(\mathscr{H}_A)$ с конечной энтропией.*

Примеры каналов, для которых выполнено условие части B) следствия 1, рассмотрены в § 4 (предложение 1 и пример 1).

Отметим следующий результат, установленный в доказательстве импликации (i) $\Longrightarrow$ (iii) теоремы 3 (его обобщенная версия приведена в п. 6.1).

Следствие 2. *Пусть канал Φ обратим относительно семейства $\{\rho_i\}$ чистых состояний, а $\{\pi_i\}$ – произвольное распределение вероятностей. Тогда канал Φ обратим относительно семейства ортогональных чистых состояний, соответствующих некоторому базису из собственных векторов состояния $\overline{\rho}\doteq\sum_i\pi_i\rho_i$.*

Теперь рассмотрим критерий глобального равенства в (2.13) и докажем усиленную версию гипотезы, сформулированной в [5].

Следствие 3. *Если $\overline{C}(\Phi,\rho)=I(\Phi,\rho)$ для любого состояния ρ ранга 2, то Φ – вполне деполяризующий канал и, следовательно, $\overline{C}(\Phi,\rho)=I(\Phi,\rho)=0$ для любого состояния ρ.*

Доказательство. В силу леммы 1 достаточно показать, что $\Phi(|\varphi\rangle\langle\psi|)=0$ для любых ортогональных единичных векторов $\varphi,\psi\in\mathscr{H}_A$.

Пусть $\rho=0.3|\varphi\rangle\langle\varphi|+0.7|\psi\rangle\langle\psi|$ – состояние из $\mathfrak{S}(\mathscr{H}_A)$ ранга 2. По условию $\overline{C}(\Phi,\rho)=I(\Phi,\rho)$ и из теоремы 3 следует, что $\Phi(|\varphi\rangle\langle\psi|)=0$, поскольку $\{|\varphi\rangle,|\psi\rangle\}$ – единственный базис из собственных векторов состояния ρ.

Замечание 5. Следствие 3 показывает, что для любого нетривиального канала Φ вогнутые неотрицательные функции $\rho\mapsto\overline{C}(\Phi,\rho)$ и $\rho\mapsto I(\Phi,\rho)$, которые равны нулю на множестве состояний ранга 1, всегда не совпадают в некотором состоянии ранга 2.

В [5] показано, что для конечномерного канала $\Phi\colon\mathfrak{T}(\mathscr{H}_A)\to\mathfrak{T}(\mathscr{H}_B)$ имеют место соотношения

$$D(\Phi)\doteq\max_{\rho\in\mathfrak{S}(\mathscr{H}_A)}\bigl[I(\Phi,\rho)-\overline{C}(\Phi,\rho)\bigr]=\sup_{H,h}\bigl[C_{\mathrm{ea}}(\Phi,H,h)-\overline{C}(\Phi,H,h)\bigr],$$

где $C_{\mathrm{ea}}(\Phi,H,h)$ и $\overline{C}(\Phi,H,h)$ – соответственно классическая пропускная способность с использованием сцепленности и χ-пропускная способность канала Φ с линейным ограничением, задаваемым неравенством $\operatorname{Tr}H\rho\leqslant h$, а супремум берется по всем парам (положительный оператор H, положительное число h). Следствие 3 показывает, что $D(\Phi)>0$, если канал Φ не вполне деполяризующий. Это завершает начатое в [5] доказательство следующих свойств параметра $D(\Phi)$ (которые показывают, что этот параметр можно рассматривать как характеристику "уровня шума" канала Φ):

– $D(\Psi\circ\Phi)\leqslant D(\Phi)$ для любого канала $\Psi\colon\mathfrak{T}(\mathscr{H}_B)\to\mathfrak{T}(\mathscr{H}_C)$;
– $D(\Phi)\in[0,\log\dim\mathscr{H}_A]$;
– $D(\Phi)=\log\dim\mathscr{H}_A$ тогда и только тогда, когда Φ – канал без шума (см. определение 6);
– $D(\Phi)=0$ тогда и только тогда, когда Φ – вполне деполяризующий канал.

§ 4. Условия равенства для бозонных гауссовских каналов

Применим теорему 3 к бозонным гауссовским каналам, важная роль которых в квантовой теории информации обусловлена физическими приложениями (например, в квантовой оптике); см. [1], [16], [17].

Пусть $\mathscr{H}_X$ $(X = A, B, \dots)$ – пространство неприводимого представления канонических коммутационных соотношений (CCR)

$$W_X(z)W_X(z') = \exp\biggl[-\frac{\mathrm{i}}{2}\Delta_X(z,z')\biggr]W_X(z'+z), \tag{4.1}$$

где (Z_X, Δ_X) – симплектическое пространство, а $W_X(z)$ – операторы Вейля (см. [1; гл. 11]). Пусть s_X – число мод системы X, т.е. $2s_X = \dim Z_X$.

Бозонный гауссовский канал $\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathscr{H}_A) \to \mathfrak{T}(\mathscr{H}_B)$ определяется действием дуального отображения $\Phi^*\colon \mathfrak{B}(\mathscr{H}_B) \to \mathfrak{B}(\mathscr{H}_A)$ на операторы Вейля:

$$\Phi^*(W_B(z)) = W_A(Kz)\exp\biggl[\mathrm{i}lz - \frac{1}{2}z^\top \alpha z\biggr], \qquad z \in Z_B, \tag{4.2}$$

где K – линейный оператор $Z_B \to Z_A$, l – $2s_B$-мерная вещественная строка, а α – $(2s_B \times 2s_B)$-мерная вещественная симметричная матрица, удовлетворяющая неравенству

$$\alpha \geqslant \frac{\mathrm{i}}{2}[\Delta_B - K^\top \Delta_A K]. \tag{4.3}$$

С помощью унитарных операторов смещения любой гауссовский канал можно преобразовать в гауссовский канал с $l = 0$ и теми же матрицами K и α (это показано в [17]). Такой канал называется *центрированным*, будем его обозначать $\Phi_{K,\alpha}$. Поэтому при анализе соотношений между χ-пропускной способностью и квантовой взаимной информацией можно рассматривать только центрированные гауссовские каналы.

В [10; предложение 5] показано, что $\Phi_{K,\alpha}$ является дискретным c-q каналом тогда и только тогда, когда $K = 0$ (т.е. когда $\Phi_{K,\alpha}$ – вполне деполяризующий канал). Это означает в силу леммы 3, что для любого нетривиального гауссовского канала $\Phi_{K,\alpha}$, $K \neq 0$, множество $\Pi(\Phi_{K,\alpha})$ (введенное в теореме 3) не содержит полных семейств векторов в $\mathscr{H}_A$.

Лемма 3 и следующая лемма 4 показывают, что канал $\Phi_{K,\alpha}$ имеет дискретные c-q подканалы тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ran} K \neq Z_A$ (т.е. когда $\operatorname{rank} K < \dim Z_A$).

Лемма 4. *Множество* $\Pi(\Phi_{K,\alpha})$ *непусто тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Ran} K \neq Z_A$, *и состоит из всех ортонормированных семейств* $\{|\varphi_i\rangle\} \subset \mathscr{H}_A$ *таких, что*

$$\langle \varphi_i | W_A(Kz)\varphi_j\rangle = 0 \quad \forall\, z \in Z_B, \quad \forall\, i \neq j. \tag{4.4}$$

Доказательство. Поскольку семейство $\{W_B(z)\}_{z \in Z_B}$ порождает алгебру $\mathfrak{B}(\mathscr{H}_B)$, равенство $\Phi_{K,\alpha}(|\varphi_i\rangle\langle\varphi_j|) = 0$ равносильно условию (4.4).

Если $\operatorname{Ran} K = Z_A$, то семейство $\{W_A(Kz)\}_{z \in Z_B}$ операторов Вейля в пространстве $\mathscr{H}_A$ неприводимо, а значит, условие (4.4) не может быть выполнено.

Если $\operatorname{Ran} K \neq Z_A$, то коммутант семейства $\{W_A(Kz)\}_{z\in Z_B}$ содержит операторы Вейля $W_A(z)$, $z \in [\operatorname{Ran} K]^{\perp}$, а значит, существует нетривиальное подпространство в $\mathscr{H}_A$, инвариантное относительно этого семейства[8]. Это гарантирует наличие по крайней мере двух ортогональных единичных векторов, удовлетворяющих условию (4.4).

Пусть $\Phi_{K,\alpha}$ – нетривиальный гауссовский канал ($K \neq 0$). В силу леммы 4 и замечания перед ней из теоремы 3 следует, что $\overline{C}(\Phi_{K,\alpha}, \rho) < I(\Phi_{K,\alpha}, \rho)$ для любого невырожденного состояния ρ с конечной энтропией, а смешанные вырожденные состояния, для которых в этом неравенстве имеет место равенство, существуют тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ran} K \neq Z_A$. Это условие выполнено в следующих случаях[9]:

A) $[\operatorname{Ran} K]^{\perp}$ – нетривиальное изотропное подпространство в Z_A;

B) $[\operatorname{Ran} K]^{\perp}$ содержит нетривиальное симплектическое подпространство.

Из доказательства приведенного ниже предложения 1 следует, что в случае B) у гауссовского канала $\Phi_{K,\alpha}$ существует вполне деполяризующий подканал и что любой такой канал можно представить как композицию частичного следа по некоторым входным модам и гауссовского канала, который либо соответствует случаю A), либо удовлетворяет условию $\operatorname{Ran} K = Z_A$. Поэтому мы сосредоточим внимание на случае A) и найдем все смешанные состояния ρ с конечной энтропией, для которых $\overline{C}(\Phi_{K,\alpha}, \rho) = I(\Phi_{K,\alpha}, \rho)$, явно описав множество $\Pi(\Phi_{K,\alpha})$ в представлении Шрёдингера.

В силу леммы 8 в п. 6.3 в случае A) существует симплектический базис $\{\widetilde{e}_k, \widetilde{h}_k\}$ в Z_A такой, что $\{\widetilde{e}_1, \dots, \widetilde{e}_{s_A}, \widetilde{h}_{d+1}, \dots, \widetilde{h}_{s_A}\}$ – базис в $\operatorname{Ran} K$, $d \leqslant s_A$. Пусть Z_B^0 – подпространство в Z_B с базисом $\{z_1^e, \dots, z_{s_A}^e, z_{d+1}^h, \dots, z_{s_A}^h\}$ таким, что $\widetilde{e}_k = K z_k^e$ для всех $k = \overline{1, s_A}$ и $\widetilde{h}_k = K z_k^h$ для всех $k = \overline{d+1, s_A}$. Для любого вектора $z \in Z_B^0$, представленного в виде

$$z = \sum_{k=1}^{s_A} x_k z_k^e + \sum_{k=d+1}^{s_A} y_k z_k^h, \qquad (x_1, \dots, x_{s_A}) \in \mathbb{R}^{s_A}, \quad (y_{d+1}, \dots, y_{s_A}) \in \mathbb{R}^{s_A - d},$$

в силу (4.1) имеем

$$\begin{aligned} W_A(Kz) &= W_A\biggl(\sum_{k=1}^{s_A} x_k \widetilde{e}_k + \sum_{k=d+1}^{s_A} y_k \widetilde{h}_k\biggr) \\ &= \lambda W_A(x_1 \widetilde{e}_1) \cdots W_A(x_{s_A} \widetilde{e}_{s_A}) \cdot W_A(y_{d+1} \widetilde{h}_{d+1}) \cdots W_A(y_{s_A} \widetilde{h}_{s_A}), \end{aligned}$$

где $\lambda = e^{i[x_{d+1} y_{d+1} + \dots + x_{s_A} y_{s_A}]} \neq 0$.

Отождествляя пространство $\mathscr{H}_A$ с пространством $L_2(\mathbb{R}^{s_A})$ комплекснозначных функций s_A переменных (которые мы обозначим $\xi_1, \dots, \xi_{s_A}$), а операторы Вейля $W_A(\widetilde{e}_k)$ и $W_A(\widetilde{h}_k)$ – с операторами

$$\psi(\xi_1, \dots, \xi_{s_A}) \mapsto e^{i\xi_k} \psi(\xi_1, \dots, \xi_{s_A}), \qquad \psi(\xi_1, \dots, \xi_{s_A}) \mapsto \psi(\xi_1, \dots, \xi_k + 1, \dots, \xi_{s_A}),$$

[8] $[\operatorname{Ran} K]^{\perp}$ – косоортогональное дополнение к $\operatorname{Ran} K \subseteq Z_A$ (см. п. 6.3). Мы всегда будем использовать этот смысл символа $\perp$, имея дело с подпространством симплектического пространства.

[9] Определения изотропного и симплектического подпространств симплектического пространства приведены в п. 6.3.

равенство в (4.4) для вектора z можно записать в виде

$$\int\cdots\int \overline{\varphi_i(\xi_1,\ldots,\xi_{s_A})}(S_{y_{d+1},\ldots,y_{s_A}}\varphi_j)(\xi_1,\ldots,\xi_{s_A}) \times e^{i(x_1\xi_1+\cdots+x_{s_A}\xi_{s_A})}\,d\xi_1\cdots d\xi_{s_A}=0,$$

где $(S_{y_{d+1},\ldots,y_{s_A}}\varphi_j)(\xi_1,\ldots,\xi_{s_A})=\varphi_j(\xi_1,\ldots,\xi_d,\xi_{d+1}+y_{d+1},\ldots,\xi_{s_A}+y_{s_A})$.

Это равенство выполнено для всех $(x_1,\ldots,x_{s_A})\in\mathbb{R}^{s_A}$ и $(y_{d+1},\ldots,y_{s_A})\in\mathbb{R}^{s_A-d}$ (т.е. для всех $z\in Z_B^0$) тогда и только тогда, когда

$$\overline{\varphi_i(\xi_1,\ldots,\xi_{s_A})}(S_{y_{d+1},\ldots,y_{s_A}}\varphi_j)(\xi_1,\ldots,\xi_{s_A})=0$$

для почти всех $(\xi_1,\ldots,\xi_{s_A})\in\mathbb{R}^{s_A}$ и всех $(y_{d+1},\ldots,y_{s_A})\in\mathbb{R}^{s_A-d}$. Поскольку $\operatorname{Ran}K=K(Z_B^0)$, это значит, что условие (4.4) выполнено тогда и только тогда, когда

$$\varphi_i\cdot S_{y_{d+1},\ldots,y_{s_A}}\varphi_j=0\quad(\text{в } L_2(\mathbb{R}^{s_A}))\quad\forall\,(y_{d+1},\ldots,y_{s_A})\in\mathbb{R}^{s_A-d},\quad\forall\,i\neq j,\tag{4.5}$$

где $S_{y_{d+1},\ldots,y_{s_A}}$ – оператор сдвига в $L_2(\mathbb{R}^{s_A})$ вдоль последних s_A-d координат:

$$(S_{y_{d+1},\ldots,y_{s_A}}\psi)(\xi_1,\ldots,\xi_{s_A})=\psi(\xi_1,\ldots,\xi_d,\xi_{d+1}+y_{d+1},\ldots,\xi_{s_A}+y_{s_A}).$$

Условие (4.5) означает, образно говоря, что все сдвиги в $\mathbb{R}^{s_A}$ носителей функций семейства $\{\varphi_i\}$ вдоль последних s_A-d координат не пересекают друг друга.

Замечание 6. Условие (4.5) полностью определяется подпространством $\operatorname{Ran}K$. Будем говорить, что семейство функций $\{\varphi_i\}$ удовлетворяет условию (4.5), определенному подпространством $Z_0\subseteq Z_A$ (таким, что подпространство $[Z_0]^\perp$ изотропно), если оно удовлетворяет аналогу условия (4.5), построенному в использованием Z_0 вместо $\operatorname{Ran}K$.

Таким образом, в представлении Шрёдингера множество $\Pi(\Phi_{K,\alpha})$ состоит из всех ортогональных семейств $\{\varphi_i\}$ функций из $L_2(\mathbb{R}^{s_A})$ с единичной нормой, удовлетворяющих условию (4.5). Поэтому в силу теоремы 3 равенство $\overline{C}(\Phi_{K,\alpha},\rho)=I(\Phi_{K,\alpha},\rho)$ имеет место для смешанного состояния ρ с конечной энтропией тогда и только тогда, когда это состояние ρ имеет базис из собственных векторов $\{|\varphi_i\rangle\}$, который (в представлении Шрёдингера) удовлетворяет условию (4.5). Теорема 3 также показывает, что данное равенство имеет место для любого смешанного состояния ρ с бесконечной энтропией, обладающего таким базисом.

При исследовании бозонных систем особую роль играют так называемые *гауссовские* состояния – такие состояния ρ, характеристическая функция $\phi_\rho(z)=\operatorname{Tr}W(z)\rho$ которых имеет гауссовский вид:

$$\phi_\rho(z)=\exp\biggl[\mathrm{i}az-\frac{1}{2}z^\top\sigma_\rho z\biggr],$$

где a – $2s$-мерная вещественная строка ($2s=\dim Z$), а σ_ρ – $(2s\times 2s)$-мерная вещественная симметричная матрица, удовлетворяющая неравенству $\sigma_\rho\geqslant\frac{\mathrm{i}}{2}\Delta$.

Строка a состоит из средних значений канонических наблюдаемых в состоянии ρ, а σ_ρ – так называемая *ковариационная* матрица этого состояния (см. [1], [16], [17]). Спектральное разложение смешанного гауссовского состояния в представлении Шрёдингера (описанное в [1; гл. 11]) показывает, что его базис из собственных векторов не может удовлетворять условию (4.5). Заметим также, что любое гауссовское состояние имеет конечную энтропию.

С учетом этих замечаний приведенные выше рассуждения доказывают утверждения A)–C) следующего предложения.

Предложение 1. *Пусть $\mathfrak{S}_{\mathrm{f}}$ – подмножество множества $\mathfrak{S}(\mathscr{H}_A)$, состоящее из всех состояний с конечной энтропией фон Неймана.*

A) *Если $K \neq 0$ (т.е. канал $\Phi_{K,\alpha}$ не вполне деполяризующий), то*

$$\overline{C}(\Phi_{K,\alpha}, \rho) < I(\Phi_{K,\alpha}, \rho) \tag{4.6}$$

для всех невырожденных состояний $\rho \in \mathfrak{S}_{\mathrm{f}}$, в частности для всех невырожденных гауссовских состояний ρ.

B) *Если $\operatorname{Ran} K = Z_A$, то (4.6) имеет место для всех смешанных состояний $\rho \in \mathfrak{S}_{\mathrm{f}}$, в частности для всех смешанных гауссовских состояний ρ.*

C) *Если $[\operatorname{Ran} K]^\perp$ – нетривиальное изотропное подпространство в Z_A, то:*
- *неравенство (4.6) имеет место для всех смешанных состояний $\rho \in \mathfrak{S}_{\mathrm{f}}$, у которых нет базиса из собственных векторов, удовлетворяющих условию (4.5), в частности для всех смешанных гауссовских состояний ρ;*
- *$\overline{C}(\Phi_{K,\alpha}, \rho) = I(\Phi_{K,\alpha}, \rho)$ для всех смешанных состояний $\rho \in \mathfrak{S}(\mathscr{H}_A)$, у которых есть базис из собственных векторов, удовлетворяющий условию (4.5).*

D) *Если в $[\operatorname{Ran} K]^\perp$ есть нетривиальное симплектическое подпространство, то существуют вырожденные смешанные гауссовские состояния ρ, для которых $\overline{C}(\Phi_{K,\alpha}, \rho) = I(\Phi_{K,\alpha}, \rho) = 0$.*

Доказательство. Необходимо доказать только утверждение D).

Если существует нетривиальное симплектическое подпространство Z_{A_0} в $[\operatorname{Ran} K]^\perp$, то $Z_A = Z_{A_0} \oplus Z_{A_*}$, где $Z_{A_*} = [Z_{A_0}]^\perp$ – симплектическое подпространство в Z_A (в силу леммы 6 в п. 6.3), и, следовательно, $\mathscr{H}_A = \mathscr{H}_{A_0} \otimes \mathscr{H}_{A_*}$. Используя формулы для композиции гауссовских каналов (см. [1; гл. 11]), легко показать, что $\Phi_{K,\alpha} = \Phi_{K',\alpha} \circ \Psi$, где Ψ – частичный след в $\mathfrak{T}(\mathscr{H}_A)$ по пространству $\mathscr{H}_{A_0}$, а $\Phi_{K',\alpha}$ – гауссовский канал из $\mathfrak{T}(\mathscr{H}_{A_*})$ в $\mathfrak{T}(\mathscr{H}_B)$, определяемый "выходным сужением" K' оператора K и той же самой матрицей α. Поэтому для любого чистого гауссовского состояния $\rho_* = |\psi_*\rangle\langle\psi_*|$ из $\mathfrak{S}(\mathscr{H}_{A_*})$ подканал канала $\Phi_{K,\alpha}$, соответствующий подпространству $\mathscr{H}_{A_0} \otimes \{\lambda|\psi_*\rangle\}$, является вполне деполяризующим. Следовательно,

$$\overline{C}(\Phi_{K,\alpha}, \rho_0 \otimes \rho_*) = I(\Phi_{K,\alpha}, \rho_0 \otimes \rho_*) = 0$$

для всех гауссовских состояний ρ_0 из $\mathfrak{S}(\mathscr{H}_{A_0})$.

Пример 1. Простейший класс гауссовских каналов образуют одномодовые каналы ($s_A = s_B = 1$). В соответствии с классификацией Холево существует (с точностью до естественного изоморфизма) шесть типов таких каналов

$$A_1[N], \quad A_2[N], \quad B_1, \quad B_2[N], \quad C[k,N]\ (k>0,\, k\neq 1), \quad D[k,N]\ (k>0)$$

(параметр N определяет уровень шума; подробности см. в [1; гл. 11]).

Для всех одномодовых гауссовских каналов, кроме каналов типа A_1 и A_2, матрица K невырождена. Поэтому из предложения 1 следует, что для этих каналов (4.6) имеет место для всех смешанных состояний с конечной энтропией.

Каналы типа A_1 – это вполне деполяризующие каналы. Поэтому все нетривиальные одномодовые гауссовские каналы, для которых возможно равенство в (4.6) для смешанных состояний, это каналы типа A_2.

Одномодовый гауссовский канал типа A_2 – это недискретный классически-квантовый канал. Канонический представитель $\Phi_{K,\alpha}$ этого типа определяется параметрами

$$K=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}, \qquad \alpha=\begin{bmatrix}N+\dfrac12 & 0\\ 0 & N+\dfrac12\end{bmatrix}, \quad N\geqslant 0.$$

Этот канал удовлетворяет условию части C) предложения 1. В этом случае базис $\{\widetilde{e}_k,\widetilde{h}_k\}$, введенный при выводе условия (4.5), состоит из векторов $\widetilde{e}_1=[1,0]^\top$, $\widetilde{h}_1=[0,1]^\top$, а $\operatorname{Ran}K=\{\lambda\widetilde{e}_1\}$. Поэтому в соответствующем представлении Шрёдингера (в котором $\mathscr{H}_A=\mathscr{H}_B=L_2(\mathbb{R})$) условие (4.5) записывается в виде

$$\varphi_i(\xi)\varphi_j(\xi)=0 \quad \text{почти всюду в }\ \mathbb{R}\ \text{для всех } i\neq j. \tag{4.7}$$

В силу части C) предложения 1 $\overline{C}(\Phi_{K,\alpha},\rho)=I(\Phi_{K,\alpha},\rho)$ для всех состояний из

$$\bigcup_{\{\varphi_i\}\in\Pi(\Phi_{K,\alpha})}\biggl\{\rho=\sum_i \pi_i|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| \biggm| \{\pi_i\}\ \text{– распределение вероятностей}\biggr\}, \tag{4.8}$$

где $\Pi(\Phi_{K,\alpha})$ – множество всех семейств $\{\varphi_i(\xi)\}$ функций из $L_2(\mathbb{R})$ с единичной нормой, удовлетворяющих условию (4.7). Пример такого семейства можно построить, выбрав разложение $\{D_i\}$ прямой $\mathbb{R}$ на непересекающиеся измеримые подмножества и взяв при каждом i любую функцию $\varphi_i(\xi)$ с единичной нормой, равную нулю на $\mathbb{R}\setminus D_i$.

Предложение 1 также показывает, что $\overline{C}(\Phi_{K,\alpha},\rho)<I(\Phi_{K,\alpha},\rho)$ для всех состояний ρ с конечной энтропией, не принадлежащих множеству (4.8), в частности для всех смешанных гауссовских состояний ρ.

§ 5. О равенстве в комплементарном неравенстве

В § 3 и § 4 мы уделили основное внимание равенству в (2.13), более важному для приложений, а его связь с равенством в (2.9) использовали в доказательствах основных результатов, поскольку оно связано со свойством обратимости канала. В этом параграфе мы переформулируем эти результаты как условия равенства в (2.9), используя соотношение (2.15).

Теорему 3 можно переформулировать следующим образом.

Теорема 4. *Пусть* $\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathscr{H}_A)\to\mathfrak{T}(\mathscr{H}_B)$ *– квантовый канал, а* $\widehat{\Pi}(\Phi)$ *– множество всех ортогональных семейств* $\{|\varphi_i\rangle\}$ *единичных векторов в* $\mathscr{H}_A$ *таких, что* $\operatorname{supp}\Phi(|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|)\perp\operatorname{supp}\Phi(|\varphi_j\rangle\langle\varphi_j|)$ *для всех* $i\neq j$.

A) *Пусть* ρ *– смешанное состояние из* $\mathfrak{S}(\mathscr{H}_A)$ *такое, что* $H(\rho)<+\infty$. *Следующие утверждения равносильны*:

(i) $\overline{C}(\Phi,\rho)=H(\rho)$;

(ii) *множество* $\widehat{\Pi}(\Phi)$ *содержит хотя бы один базис из собственных векторов состояния* ρ;

(iii) *подканал* $\Phi|_{\mathfrak{T}(\mathscr{H}_\rho)}$ *изометрически эквивалентен* (*см. определение* 2) *каналу*

$$\varrho\mapsto\sum_{i,j=1}^{\dim\mathscr{H}_\rho}\langle\varphi_i|\varrho\varphi_j\rangle|\varphi_i\rangle\langle\varphi_j|\otimes\sum_{k,l=1}^{\dim\mathscr{H}_B}\langle\psi_{jl}|\psi_{ik}\rangle|k\rangle\langle l|$$

из $\mathfrak{T}(\mathscr{H}_\rho)$ *в* $\mathfrak{T}(\mathscr{H}_\rho\otimes\mathscr{H}_B)$, *где* $\mathscr{H}_\rho=\operatorname{supp}\rho$, $\{|\varphi_i\rangle\}$ *– некоторый ортонормированный базис из собственных векторов состояния* ρ, $\{|\psi_{ik}\rangle\}$ *– набор векторов в гильбертовом пространстве такой, что* $\sum_{k=1}^{\dim\mathscr{H}_B}\|\psi_{ik}\|^2=1$ *для всех* i, *а* $\{|k\rangle\}$ *– ортонормированный базис в* $\mathscr{H}_B$.

Для состояния ρ *с* $H(\rho)=+\infty$ *данные утверждения связаны следующим образом*: (iii) $\Longleftrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (i).

B) *Множество* $\widehat{\mathfrak{S}}_\Phi^{=}$ *всех смешанных состояний* ρ *из* $\mathfrak{S}(\mathscr{H}_A)$ *с конечной энтропией, для которых имеет место* (i), *можно представить в виде*

$$\widehat{\mathfrak{S}}_\Phi^{=}=\bigcup_{\{|\varphi_i\rangle\}\in\widehat{\Pi}(\Phi)}\biggl\{\rho=\sum_i\pi_i|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|\biggm|\{\pi_i\}\in\mathfrak{P}_{\mathrm{f}}\biggr\},$$

где $\mathfrak{P}_{\mathrm{f}}$ *– множество всех распределений вероятностей с конечной энтропией Шеннона.*

Доказательство. Используя (2.2), (2.3) и представления Шмидта векторов $V|\varphi\rangle$ и $V|\psi\rangle$, нетрудно показать, что

$$\operatorname{supp}\Phi(|\varphi\rangle\langle\varphi|)\perp\operatorname{supp}\Phi(|\psi\rangle\langle\psi|)\quad\Longleftrightarrow\quad\widehat{\Phi}(|\varphi\rangle\langle\psi|)=0$$

для любых векторов $\varphi,\psi\in\mathscr{H}_A$, а значит, $\widehat{\Pi}(\Phi)=\Pi(\widehat{\Phi})$. Поэтому стандартное представление комплементарного канала (формула (11) в [8]) показывает, что утверждения (ii) и (iii) в теореме 4 равносильны соответственно утверждениям (ii) и (iii) в теореме 3 для канала $\widehat{\Phi}$.

Комплементарным к вполне деполяризующему каналу является канал без шума (см. определение 6) и наоборот (см. [8]). Поэтому следствие 3 можно переформулировать следующим образом.

Следствие 4. *Если* $\overline{C}(\Phi,\rho)=H(\rho)$ *для любого состояния* ρ *ранга* 2, *то* Φ *– канал без шума и, следовательно,* $\overline{C}(\Phi,\rho)=H(\rho)$ *для любого состояния* ρ.

Известно, что комплементарный канал к произвольному гауссовскому каналу является гауссовским (см. работы [1], [17]). Поэтому можно считать, что

$\widehat{\Phi}_{K,\alpha} = \Phi_{L,\beta}$, где L – линейный оператор $Z_E \to Z_A$, β – $(2s_E \times 2s_E)$-мерная вещественная симметричная матрица (удовлетворяющая аналогичному (4.3) неравенству).

Из леммы 5 в п. 6.2 и рассуждения перед ней следует, что

$$[\operatorname{Ran} L]^{\perp} = K(\ker\alpha) \tag{5.1}$$

и что сужение оператора K на подпространство $\ker\alpha$ невырождено и симплектично, т.е. $\Delta_A(Kz_1, Kz_2) = \Delta_B(z_1, z_2)$ для всех z_1, z_2 из $\ker\alpha$. Поэтому

$$\{L = 0\} \quad\Longleftrightarrow\quad \{\Phi_{K,\alpha} \text{ – канал без шума}\},$$
$$\{\operatorname{Ran} L = Z_A\} \quad\Longleftrightarrow\quad \{\det\alpha \neq 0\},$$
$$\{\text{подпространство } [\operatorname{Ran} L]^{\perp} \text{ изотропно}\}$$
$$\Longleftrightarrow\quad \{\text{подпространство } \ker\alpha \text{ изотропно}\}.$$

Учитывая эти соотношения и замечая, что $\operatorname{Ran} L = [\operatorname{Ran} L]^{\perp\perp} = [K(\ker\alpha)]^{\perp}$, предложение 1 можно переформулировать следующим образом.

Предложение 2. *Пусть $\mathfrak{S}_{\mathrm{f}}$ – подмножество множества $\mathfrak{S}(\mathscr{H}_A)$, состоящее из всех состояний с конечной энтропией фон Неймана.*

A) *Если $\Phi_{K,\alpha}$ не является каналом без шума* (см. *определение* 6), *то*

$$\overline{C}(\Phi_{K,\alpha}, \rho) < H(\rho) \tag{5.2}$$

для всех невырожденных состояний $\rho \in \mathfrak{S}_{\mathrm{f}}$, в частности для всех невырожденных гауссовских состояний ρ.

B) *Если* $\det\alpha \neq 0$, *то* (5.2) *имеет место для всех смешанных состояний $\rho \in \mathfrak{S}_{\mathrm{f}}$, в частности для всех смешанных гауссовских состояний ρ.*

C) *Если* $\ker\alpha$ *– нетривиальное изотропное подпространство в Z_B, то*:

- *неравенство* (5.2) *имеет место для всех смешанных состояний $\rho \in \mathfrak{S}_{\mathrm{f}}$, у которых нет базиса из собственных векторов, удовлетворяющего условию* (4.5), *определенному подпространством* $[K(\ker\alpha)]^{\perp}$ (*см. замечание* 6), *в частности для всех смешанных гауссовских состояний ρ;*
- $\overline{C}(\Phi_{K,\alpha}, \rho) = H(\rho)$ *для всех смешанных состояний $\rho \in \mathfrak{S}(\mathscr{H}_A)$, у которых есть базис из собственных векторов, удовлетворяющий условию* (4.5), *определенному подпространством* $[K(\ker\alpha)]^{\perp}$.

D) *Если* $\ker\alpha$ *содержит нетривиальное симплектическое подпространство, то существуют смешанные гауссовские состояния ρ, для которых*

$$\overline{C}(\Phi_{K,\alpha}, \rho) = H(\rho).$$

Пример 2. Предложение 2 показывает, что для всех одномодовых гауссовских каналов, кроме канала без шума $B_2[0]$ и канала типа B_1 (см. пример 1), строгое неравенство (5.2) имеет место для всех смешанных состояний с конечной энтропией.

Канонический одномодовый гауссовский канал $\Phi_{K,\alpha}$ типа B_1 определяется параметрами

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

В представлении Шрёдингера (в котором $\mathscr{H}_A = \mathscr{H}_B = L_2(\mathbb{R})$) условие (4.5), определенное подпространством $[K(\ker\alpha)]^{\perp} = \{[\lambda, 0]^{\top}\}$, совпадает[10] с условием (4.7).

Поэтому предложение 2 показывает, что $\overline{C}(\Phi_{K,\alpha}, \rho) = H(\rho)$ для всех состояний из множества (4.8) и что $\overline{C}(\Phi_{K,\alpha}, \rho) < H(\rho)$ для всех состояний ρ с конечной энтропией, не принадлежащих множеству (4.8), в частности для всех смешанных гауссовских состояний ρ.

§ 6. Приложение

6.1. Доказательство теоремы 3 в бесконечномерном случае. Доказательство импликации (i) $\Longrightarrow$ (iii) в теореме 3, приведенное в § 3, непосредственно не обобщается на бесконечномерный случай, поскольку в нем предполагается существование ансамбля $\{\pi_i, \rho_i\}$ со средним состоянием ρ такого, что $\overline{C}(\widehat{\Phi}, \rho) = \chi_{\widehat{\Phi}}(\{\pi_i, \rho_i\})$, которое доказывается с использованием компактности множества входных состояний. Для преодоления этой проблемы будем использовать понятие обобщенного (непрерывного) ансамбля.

Следуя работе [11], будем считать произвольную борелевскую вероятностную меру μ на множестве $\mathfrak{S}(\mathscr{H}_A)$ входным обобщенным ансамблем для канала $\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathscr{H}_A) \to \mathfrak{T}(\mathscr{H}_B)$, а χ-величину и выходную χ-величину этого ансамбля определим соответственно выражениями

$$\chi(\mu) = \int_{\mathfrak{S}(\mathscr{H}_A)} H(\rho\|\overline{\rho}(\mu))\mu(d\rho) = H(\overline{\rho}(\mu)) - \int_{\mathfrak{S}(\mathscr{H}_A)} H(\rho)\mu(d\rho) \tag{6.1}$$

и

$$\chi_{\Phi}(\mu) = \int_{\mathfrak{S}(\mathscr{H}_A)} H(\Phi(\rho)\|\Phi(\overline{\rho}(\mu)))\mu(d\rho) = H(\Phi(\overline{\rho}(\mu))) - \int_{\mathfrak{S}(\mathscr{H}_A)} H(\Phi(\rho))\mu(d\rho),$$

в которых

$$\overline{\rho}(\mu) \doteq \int_{\mathfrak{S}(\mathscr{H}_A)} \rho\mu(d\rho)$$

– это барицентр меры μ, а вторые формулы справедливы при условиях $H(\overline{\rho}(\mu)) < +\infty$ и $H(\Phi(\overline{\rho}(\mu))) < +\infty$ соответственно.

Множество всех борелевских вероятностных мер на множестве $\operatorname{extr}\mathfrak{S}(\mathscr{H}_A)$ всех чистых состояний из $\mathfrak{S}(\mathscr{H}_A)$ обозначим $\mathscr{P}_p(\mathfrak{S}(\mathscr{H}_A))$. В силу следствия 1 из [11] имеем

$$\overline{C}(\Phi, \rho) = \sup_{\overline{\rho}(\mu)=\rho} \chi_{\Phi}(\mu), \tag{6.2}$$

где супремум берется по всем мерам из $\mathscr{P}_p(\mathfrak{S}(\mathscr{H}_A))$ с барицентром ρ.

В отличие от конечномерного случая супремум в (6.2) достигается не всегда, но существуют достаточные условия его достижимости, простейшее из которых имеет вид $H(\Phi(\rho)) < +\infty$ (см. [11; следствие 2]).

Теперь мы можем доказать импликацию (i) $\Longrightarrow$ (iii) в теореме 3.

---

[10]Это неудивительно и следует из (5.1), поскольку канал типа A_2 с $N = 0$ является комплементарным к каналу типа B_1 (см. [1; гл. 11]).

Предположим сначала, что $H(\Phi(\rho)) < +\infty$. В силу неравенства треугольника (см. [4])

$$|H(\Phi(\rho)) - H(\widehat{\Phi}(\rho))| \leqslant H(\rho),$$

а значит, из конечности $H(\rho)$ и $H(\Phi(\rho))$ следует конечность $H(\widehat{\Phi}(\rho))$. В силу упомянутого выше следствия 2 из [11] существует мера μ из $\mathscr{P}_p(\mathfrak{S}(\mathscr{H}_A))$ с барицентром ρ такая, что

$$\overline{C}(\widehat{\Phi}, \rho) = \chi_{\widehat{\Phi}}(\mu).$$

Если выполнено (i), то из (2.15) следует, что $\overline{C}(\widehat{\Phi}, \rho) = H(\rho)$, а поскольку $H(\rho) = \chi(\mu)$ в силу второй формулы в (6.1), это значит, что $\chi_{\widehat{\Phi}}(\mu) = \chi(\mu)$.

В силу предложения 3 из [9] (которое представляет собой обобщение теоремы 1 на случай непрерывных ансамблей) это равносильно обратимости канала $\widehat{\Phi}$ относительно некоторого измеримого семейства $\mathfrak{S}$ чистых состояний такого, что $\mu(\mathfrak{S}) = 1$. Пусть $\mathfrak{S} = \bigcup_k \mathfrak{S}_k$ – разложение семейства $\mathfrak{S}$ на ортогонально-неразложимые подсемейства (которые измеримы в силу их взаимной ортогональности и измеримости семейства $\mathfrak{S}$), а $\{|\varphi_k^i\rangle\}_i$ – ортонормированный базис из собственных векторов положительного оператора $\rho_k = \displaystyle\int_{\mathfrak{S}_k} \rho\mu(d\rho)$. Поскольку $\rho = \sum_k \rho_k$ и $\operatorname{supp}\rho_k \perp \operatorname{supp}\rho_l$ для всех $k \neq l$, то $\{|\varphi_k^i\rangle\}_{ik}$ – ортонормированный базис из собственных векторов состояния ρ.

В силу части B) теоремы 2 обратимость канала $\widehat{\Phi}$ относительно семейства $\mathfrak{S}$ влечет обратимость этого канала относительно ортогонального семейства $\{|\varphi_k^i\rangle\langle\varphi_k^i|\}_{ik}$ (содержащегося в семействе $\widehat{\mathfrak{S}}$). Поскольку каналы Φ и $\widehat{\widehat{\Phi}}$ изометрически эквивалентны, из части A) теоремы 2 следует выполнимость (iii).

Если $H(\Phi(\rho)) = +\infty$, то выберем возрастающую последовательность $\{P_n\}$ проекторов конечного ранга в $\mathscr{H}_B$, сильно сходящихся к оператору $I_{\mathscr{H}_B}$, и рассмотрим последовательность $\{\Phi_n \doteq \Pi_n \circ \Phi\}$ каналов из $\mathfrak{T}(\mathscr{H}_A)$ в $\mathfrak{T}(\mathscr{H}_B)$, где $\Pi_n(\sigma) = P_n\sigma P_n + [\operatorname{Tr}(I_{\mathscr{H}_B} - P_n)\sigma]\tau$ – канал из $\mathfrak{T}(\mathscr{H}_B)$ в себя, а τ – заданное чистое состояние из $\mathfrak{S}(\mathscr{H}_B)$. В силу леммы 2 из (i) следует, что

$$\overline{C}(\Phi_n, \rho) = I(\Phi_n, \rho)$$

при каждом n. Поскольку $H(\Phi_n(\rho)) < +\infty$, из предыдущей части доказательства этой импликации следует выполнимость (iii), а значит, и (ii) для канала Φ_n при каждом n, т.е.

$$\Phi_n(|\varphi_i^n\rangle\langle\varphi_j^n|) = 0 \quad \forall\, i \neq j, \quad \forall\, n, \tag{6.3}$$

где $\{|\varphi_i^n\rangle\}$ – базис из собственных векторов состояния ρ (зависящий от n).

Если состояние ρ не имеет кратных собственных значений, то оно имеет единственный (с точностью до перестановок и умножений на число) базис собственных векторов $\{|\varphi_i\rangle\}$, и из (6.3) следует, что

$$\Phi(|\varphi_i\rangle\langle\varphi_j|) = \lim_{n\to+\infty} \Phi_n(|\varphi_i\rangle\langle\varphi_j|) = 0 \quad \forall\, i \neq j,$$

т.е. выполнимость (ii) для канала Φ.

Если состояние ρ имеет кратные собственные значения, то требуемый базис $\{|\varphi_i\rangle\}$ можно построить следующим образом.

Для любого натурального m пусть $\mathscr{H}_m$ – прямая сумма собственных подпространств состояния ρ, соответствующих его m наибольшим собственным значениям. Пусть $d_m = \dim \mathscr{H}_m$. Можем считать, что первые d_m векторов указанного выше базиса $\{|\varphi_i^n\rangle\}$ – это базис подпространства $\mathscr{H}_m$ при каждом m.

Пусть n_k^1 – такая последовательность натуральных чисел, что существует

$$\lim_{k\to+\infty} |\varphi_i^{n_k^1}\rangle = |\varphi_i^1\rangle, \qquad i=\overline{1,d_1}$$

(существование этой последовательности и всех приведенных ниже подпоследовательностей следует из компактности единичного шара в подпространстве $\mathscr{H}_m$ при каждом m).

Для заданного $m>1$ пусть n_k^m – такая подпоследовательность последовательности n_k^{m-1}, что существует

$$\lim_{k\to+\infty} |\varphi_i^{n_k^m}\rangle = |\varphi_i^m\rangle, \qquad i=\overline{1,d_m}.$$

Из (6.3) следует, что

$$\Phi(|\varphi_i^m\rangle\langle\varphi_j^m|) = \lim_{k\to+\infty} \Phi_{n_k^m}(|\varphi_i^{n_k^m}\rangle\langle\varphi_j^{n_k^m}|) = 0 \tag{6.4}$$

для всех $i \neq j$, не превосходящих d_m.

По построению $|\varphi_i^m\rangle = |\varphi_i^{m-1}\rangle$ для $i=\overline{1,d_{m-1}}$. Таким образом, мы имеем возрастающую последовательность

$$\{|\varphi_i^1\rangle\}_{i=1}^{d_1} \subset \{|\varphi_i^2\rangle\}_{i=1}^{d_2} \subset \dots \subset \{|\varphi_i^m\rangle\}_{i=1}^{d_m} \cdots$$

ортонормированных наборов собственных векторов состояния ρ такую, что $\{|\varphi_i^m\rangle\}_{i=1}^{d_m}$ – базис в подпространстве $\mathscr{H}_m$, для которого имеет место (6.4).

Ясно, что объединение $\{|\varphi_i\rangle\}_{i=1}^{+\infty}$ всех наборов этой последовательности – это базис из собственных векторов состояния ρ такой, что $\Phi(|\varphi_i\rangle\langle\varphi_j|)=0$ для всех $i \neq j$.

Приведенное рассуждение доказывает следующую "непрерывную" версию следствия 2.

Следствие 5. *Пусть $\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathscr{H}_A)\to\mathfrak{T}(\mathscr{H}_B)$ – квантовый канал, а μ – произвольная мера из $\mathscr{P}_p(\mathfrak{S}(\mathscr{H}_A))$. Если канал Φ обратим относительно μ-почти всех чистых состояний из $\mathfrak{S}(\mathscr{H}_A)$, то канал Φ обратим относительно семейства ортогональных чистых состояний, соответствующих некоторому базису из собственных векторов состояния $\overline{\rho}(\mu) \doteq \int_{\mathfrak{S}(\mathscr{H}_A)} \rho\mu(d\rho)$.*

6.2. О комплементарном канале к бозонному гауссовскому каналу. Тот факт, что комплементарный канал к гауссовскому каналу является гауссовским, доказывается путем построения бозонной унитарной дилатации произвольного центрированного канала $\Phi_{K,\alpha}$, т.е. нахождения таких бозонных систем D и E, что канал $\Phi_{K,\alpha}$ является сужением некоторой унитарной эволюции составной бозонной системы $AD=BE$ (которая описывается симплектическим пространством $Z=Z_A\oplus Z_D=Z_B\oplus Z_E$) при условии, что система D

находится в чистом гауссовском состоянии ρ_D. Это означает, что

$$\Phi^*_{K,\alpha}(W_B(z)) = \mathrm{Tr}_{\mathscr{H}_D}(I_{\mathscr{H}_A}\otimes\rho_D)U_T^*(W_B(z)\otimes I_{\mathscr{H}_E})U_T, \qquad z\in Z_B, \tag{6.5}$$

где U_T – унитарный оператор в пространстве $\mathscr{H}_A\otimes\mathscr{H}_D\cong\mathscr{H}_B\otimes\mathscr{H}_E$, соответствующий некоторому симплектическому преобразованию

$$T = \begin{bmatrix} K & L \\ K_D & L_D \end{bmatrix} \tag{6.6}$$

пространства Z (здесь $L\colon Z_E\to Z_A$, $K_D\colon Z_B\to Z_D$, $L_D\colon Z_E\to Z_D$ – соответствующие линейные операторы); см. [1], [17], [18].

Если указанная дилатация канала $\Phi_{K,\alpha}$ построена, то комплементарный канал можно определить выражением

$$\begin{aligned}[][\widehat{\Phi}_{K,\alpha}]^*(W_E(z)) &= \mathrm{Tr}_{\mathscr{H}_D}(I_{\mathscr{H}_A}\otimes\rho_D)U_T^*(I_{\mathscr{H}_B}\otimes W_E(z))U_T \\ &= \mathrm{Tr}_{\mathscr{H}_D}(I_{\mathscr{H}_A}\otimes\rho_D)(W_A(Lz)\otimes W_D(L_Dz)) \\ &= W_A(Lz)\phi_{\rho_D}(L_Dz), \qquad z\in Z_E, \end{aligned} \tag{6.7}$$

где ϕ_{ρ_D} – характеристическая функция состояния ρ_D. Это выражение показывает, что $\widehat{\Phi}_{K,\alpha}$ – это бозонный гауссовский канал $\Phi_{L,\beta}$ с $\beta = L_D^\top\sigma_{\rho_D}L_D$, где σ_{ρ_D} – ковариационная матрица состояния ρ_D (см. [18]).

Заметим, что, расписывая (6.5) так же, как и (6.7), легко показать, что $\alpha = K_D^\top\sigma_{\rho_D}K_D$. Следовательно, $\ker\alpha = \ker K_D$ в силу невырожденности ковариационной матрицы σ_{ρ_D}. Потому следующая лемма показывает, что $\mathrm{Ran}\,L = [K(\ker\alpha)]^\perp$.

Лемма 5. *Пусть $T\colon Z_B\oplus Z_E\to Z_A\oplus Z_D$ – симплектическое преобразование, определяемое матрицей* (6.6). *Тогда*

$$[\mathrm{Ran}\,L]^\perp = K(\ker K_D), \qquad \ker K_D = \Delta_B K^\top\Delta_A([\mathrm{Ran}\,L]^\perp),$$

где $[\mathrm{Ran}\,L]^\perp$ – косоортогональное дополнение к подпространству $\mathrm{Ran}\,L\subseteq Z_A$.

Сужения операторов K и $\Delta_B K^\top\Delta_A$ на подпространства $\ker K_D$ и $[\mathrm{Ran}\,L]^\perp$ соответственно являются невырожденными и симплектическими, т.е. они сохраняют соответствующие кососимметричные формы Δ_X, $X = A, B$.

Доказательство. Заметим, что $[\mathrm{Ran}\,L]^\perp = \ker[L^\top\Delta_A]$.

Из симплектичности матрицы T следует, что (см. [18])

$$\begin{aligned} \Delta_B &= K^\top\Delta_A K + K_D^\top\Delta_D K_D, \\ 0 &= L^\top\Delta_A K + L_D^\top\Delta_D K_D, \\ \Delta_E &= L^\top\Delta_A L + L_D^\top\Delta_D L_D. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Поскольку матрица $T^\top$ также является симплектической, то

$$\begin{aligned} \Delta_A &= K\Delta_B K^\top + L\Delta_E L^\top, \\ 0 &= K_D\Delta_B K^\top + L_D\Delta_E L^\top, \\ \Delta_D &= K_D\Delta_B K_D^\top + L_D\Delta_E L_D^\top. \end{aligned} \tag{6.9}$$

Из вторых уравнений в (6.8) и (6.9) следуют включения

$$K(\ker K_D) \subseteq \ker [L^\top \Delta_A], \qquad \Delta_B K^\top \Delta_A(\ker [L^\top \Delta_A]) \subseteq \ker K_D, \tag{6.10}$$

а первые уравнения в (6.8) и (6.9) показывают, что

$$\ker K \cap \ker K_D = \{0\}, \qquad \ker [\Delta_B K^\top \Delta_A] \cap \ker [L^\top \Delta_A] = \{0\},$$

поскольку матрицы Δ_A и Δ_B невырождены. Из соображений размерности следует, что в обоих включениях в (6.10) имеют место равенства.

Последнее утверждение леммы следует из первых уравнений в (6.8) и (6.9).

6.3. Некоторые результаты из теории симплектических пространств. Везде далее Z – $2s$-мерное симплектическое пространство с невырожденной кососимметричной формой Δ (см. [1], [19], [20]). Набор векторов $\{e_1, \dots, e_s, h_1, \dots, h_s\}$ называется *симплектическим базисом* в Z, если

$$\Delta(e_k, e_l) = \Delta(h_k, h_l) = 0 \quad \text{для всех} \quad k, l, \quad \text{но} \quad \Delta(e_k, h_l) = \delta_{kl}.$$

Для любого подпространства $L \subset Z$ можно определить его косоортогональное дополнение $L^\perp = \{z \in Z \mid \Delta(z, z') = 0 \ \forall\, z' \in L\}$. Несмотря на то, что в общем случае $L \cap L^\perp \neq \{0\}$, имеют место привычные соотношения

$$[L^\perp]^\perp = L, \qquad \dim L + \dim L^\perp = \dim Z. \tag{6.11}$$

Линейное преобразование $T\colon Z \to Z$ называется *симплектическим*, если $\Delta(Tz_1, Tz_2) = \Delta(z_1, z_2)$ для всех $z_1, z_2 \in Z$. Симплектическое преобразование переводит любой симплектический базис в симплектический базис, и, наоборот, любые два симплектических базиса связаны определенным симплектическим преобразованием.

Подпространство L в Z называется *симплектическим*, если форма Δ невырождена на L; в этом случае L имеет четную размерность и может рассматриваться как самостоятельное симплектическое пространство. Будем использовать следующее простое наблюдение (см. [19], [20]).

Лемма 6. *Если L – симплектическое подпространство в Z, то $L^\perp$ также является симплектическим подпространством в Z и $Z = L + L^\perp$ (т.е. $Z = \mathrm{lin}(L \cup L^\perp)$ и $L \cap L^\perp = \{0\}$).*

Объединение симплектических базисов в L и в $L^\perp$ является симплектическим базисом в Z.

Подпространство L в Z называется *изотропным*, если форма Δ равна нулю на L. В этом случае L имеет размерность $\leqslant s$. Будем использовать следующий известный результат.

Лемма 7. *Если L – изотропное подпространство в Z, то существует симплектический базис $\{\widetilde{e}_k, \widetilde{h}_k\}$ в Z такой, что $\{\widetilde{e}_1, \dots, \widetilde{e}_d\}$ – базис в L.*

Доказательство. Пусть $\{e_k, h_k\}$ – любой симплектический базис в Z, а L' – изотропное подпространство в Z, порожденное векторами $e_1, \dots, e_d$. Поскольку изотропные подпространства L и L' имеют одинаковую размерность, существует симплектическое преобразование T такое, что $L = T(L')$ (см. [20]). Базис $\{\widetilde{e}_k = Te_k, \widetilde{h}_k = Th_k\}$ обладает требуемыми свойствами.

Теперь мы можем доказать лемму, используемую в § 4.

Лемма 8. *Для любого подпространства* $L \subset Z$ *существует симплектический базис в* Z, *у которого* $\dim L$ *векторов лежат в* L.

Доказательство. Если подпространство L является симплектическим или изотропным, то утверждение леммы следует соответственно из леммы 6 (с замечанием после нее) и леммы 7.

Если подпространство L не является ни симплектическим, ни изотропным, то $L_1 = L \cap L^{\perp} = \{z \in L \mid \Delta(z,z') = 0 \ \forall\, z' \in L\}$ – нетривиальное подпространство в L. Пусть L_2 – такое подпространство, что $L = L_1 + L_2$, т.е. $L = \operatorname{lin}(L_1 \cup L_2)$ и $L_1 \cap L_2 = \{0\}$. Тогда подпространство L_2 является симплектическим. Действительно, если существует такой вектор $z_0 \in L_2$, что $\Delta(z_0,z) = 0$ для всех $z \in L_2$, то $\Delta(z_0, z+z') = 0$ для всех $z' \in L_1$, $z \in L_2$, откуда следует, что $z_0 \in L_1$, и поэтому $z_0 = 0$.

В силу леммы 6 подпространство $L_2^{\perp}$ является симплектическим. Легко видеть, что оно содержит изотропное подпространство L_1. В силу леммы 7 существует симплектический базис $\{e_k, h_k\}$ в $L_2^{\perp}$ такой, что $\{e_1, \dots, e_d\} \subset L_1$, где $d = \dim L_1$. Объединяя этот базис и любой симплектический базис в L_2, получаем базис с требуемыми свойствами.

Автор благодарен участникам семинара “Квантовая вероятность, статистика, информация” под руководством А. С. Холево (МИРАН) за интерес к работе и полезные замечания.

Список литературы

[1] А. С. Холево, *Квантовые системы, каналы, информация*, МЦНМО, М., 2010, 328 с.; англ. пер.: A. S. Holevo, *Quantum systems, channels, information. A mathematical introduction*, De Gruyter Stud. Math. Phys., **16**, De Gruyter, Berlin, 2012, xiv+349 pp.

[2] M. Junge, C. Palazuelos, *Channel capacities via p-summing norms*, arXiv: 1305.1020.

[3] C. Adami, N. J. Cerf, “Von Neumann capacity of noisy quantum channels”, *Phys. Rev. A*, **56**:5 (1997), 3470–3483.

[4] М. А. Нильсен, И. Л. Чанг, *Квантовые вычисления и квантовая информация*, Мир, М., 2006, 824 с.; пер. с англ.: M. A. Nielsen, I. L. Chuang, *Quantum computation and quantum information*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000, xxvi+676 pp.

[5] М. Е. Широков, “Условия совпадения классической пропускной способности и классической пропускной способности с использованием сцепленности квантового канала”, *Пробл. передачи информ.*, **48**:2 (2012), 3–20; англ. пер.: M. E. Shirokov, “Conditions for coincidence of the classical capacity and entanglement-assisted capacity of a quantum channel”, *Problems Inform. Transmission*, **48**:2 (2012), 85–101.

[6] Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман, *Теория линейных операторов в гильбертовом пространтве*, 2-е изд., Наука, М., 1966, 543 с.; англ. пер. 1-го изд.: N. I. Akhiezer, I. M. Glazman, *Theory of linear operators in Hilbert space*, v. I, II, Frederick Ungar Publishing Co., New York, 1961, 1963, xi+147 pp., v+218 pp.

[7] А. С. Холево, “Некоторые оценки для количества информации, передаваемого квантовым каналом связи”, *Пробл. передачи информ.*, **9**:3 (1973), 3–11; англ. пер.: A. S. Holevo, “Some estimates of information transmitted through quantum communication channel”, *Problems Inform. Transmission*, **9**:3 (1973), 177–183.

[8] А. С. Холево, "Комплементарные каналы и проблема аддитивности", *ТВП*, **51**:1 (2006), 133–143; англ. пер.: A. S. Holevo, "Complementary channels and the additivity problem", *Theory Probab. Appl.*, **51**:1 (2007), 92–100.

[9] М. Е. Широков, "Условия обратимости квантового канала и их применение", *Матем. сб.*, **204**:8 (2013), 137–160; англ. пер.: M. E. Shirokov, "Reversibility conditions for quantum channels and their applications", *Sb. Math.*, **204**:8 (2013), 1215–1237.

[10] А. С. Холево, М. Е. Широков, "О классических пропускных способностях бесконечномерных квантовых каналов", *Пробл. передачи информ.*, **49**:1 (2013), 19–36; англ. пер.: A. S. Holevo, M. E. Shirokov, "On classical capacities of infinite-dimensional quantum channels", *Problems Inform. Transmission*, **49**:1 (2013), 15–31.

[11] А. С. Холево, М. Е. Широков, "Непрерывные ансамбли и пропускная способность квантовых каналов бесконечной размерности", *ТВП*, **50**:1 (2005), 98–114; англ. пер.: A. S. Holevo, M. E. Shirokov, "Continuous ensembles and the capacity of infinite-dimensional quantum channels", *Theory Probab. Appl.*, **50**:1 (2005), 86–98.

[12] T. S. Cubitt, M. B. Ruskai, G. Smith, "The structure of degradable quantum channels", *J. Math. Phys.*, **49**:10 (2008), 102104, 27 pp.

[13] A. Jenčová, D. Petz, "Sufficiency in quantum statistical inference", *Comm. Math. Phys.*, **263**:1 (2006), 259–276.

[14] A. Jenčová, "Reversibility conditions for quantum operations", *Rev. Math. Phys.*, **24**:7 (2012), 1250016, 26 pp.

[15] B. Schumacher, M. D. Westmoreland, "Optimal signal ensembles", *Phys. Rev. A*, **63**:2 (2001), 022308.

[16] J. Eisert, M. M. Wolf, "Gaussian quantum channels", *Quantum information with continuous variables of atoms and light*, Imp. Coll. Press, London, 2007, 23–42.

[17] F. Caruso, J. Eisert, V. Giovannetti, A. S. Holevo, "Multi-mode bosonic Gaussian channels", *New J. Phys.*, **10** (2008), 083030.

[18] A. S. Holevo, *On extreme Bosonic linear channels*, arXiv: 1111.3552.

[19] В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, 4-е изд., Эдиториал УРСС, М., 2000; англ. пер. 1-го изд.: V. I. Arnol'd, *Mathematical methods of classical mechanics*, Grad. Texts in Math., **60**, Springer-Verlag, New York, 1978, xvi+462 pp.

[20] А. И. Кострикин, Ю. И. Манин, *Линейная алгебра и геометрия*, 2-е изд., Наука, М., 1986, 304 с.; англ. пер.: A. I. Kostrikin, Yu. I. Manin, *Linear algebra and geometry*, Algebra, Logic and Applications, **1**, Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1989, x+309 pp.

Максим Евгеньевич Широков
(Maxim E. Shirokov)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: msh@mi.ras.ru

Поступила в редакцию
07.10.2013