М. Е. Широков, Т. В. Шульман, О суперактивации одношаговой квантовой пропускной способности с нулевой ошибкой и соответствующем свойстве квантовых измерений, *Пробл. передачи информ.*, 2014, том 50, выпуск 3, 35–50

ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том 50 2014 Вып. 3

УДК 621.391.1 : 519.72

© 2014 г. **М.Е. Широков**[1], **Т.В. Шульман**[2]

О СУПЕРАКТИВАЦИИ ОДНОШАГОВОЙ КВАНТОВОЙ ПРОПУСКНОЙ СПОСОБНОСТИ С НУЛЕВОЙ ОШИБКОЙ И СООТВЕТСТВУЮЩЕМ СВОЙСТВЕ КВАНТОВЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Дано детальное описание квантового канала низкой размерности (размерность входа равна 4, ранг Чоя равен 3), для которого имеет место суперактивация одношаговой квантовой пропускной способности с нулевой ошибкой (в симметричном виде). Этот эффект означает появление идеального (полностью обратимого) подканала у тензорного квадрата канала, не имеющего идеальных подканалов. Также описан квантовый канал с любым заданным уровнем симметричной суперактивации (в том числе и бесконечным). Показано, что эффект суперактивации одношаговой квантовой пропускной способности с нулевой ошибкой можно переформулировать в терминах теории квантовых измерений как появление неразличимого подпространства у тензорного произведения двух наблюдаемых, не имеющих неразличимых подпространств.

§ 1. Введение

Квантовые каналы связи – это линейные вполне положительные сохраняющие след отображения между пространствами ядерных операторов (матриц в конечномерном случае), являющиеся некоммутативными аналогами классических каналов передачи информации. Существуют различные протоколы передачи классической и квантовой информации по квантовому каналу, которые определяются ресурсами, используемыми при передаче, а также требованиями к точности восстановления информации, секретности и т.п. Для каждого такого протокола и заданного квантового канала существует предельная скорость безошибочной (или асимптотически безошибочной) передачи информации, которая, как и в классическом случае, называется пропускной способностью этого канала (соответствующей данному протоколу) [1,2].

Явление суперактивации состоит в том, что некоторая пропускная способность составного квантового канала может быть положительной, несмотря на то что та же самая пропускная способность отдельных каналов равна нулю. Это явление, не имеющее аналогов в классической теории передачи информации, было обнаружено в 2008 году Смитом и Ярдом для случая квантовой пропускной способности [3].

Впоследствии была показана возможность суперактивации некоторых других пропускных способностей квантового канала, в частности классической и квантовой пропускных способностей с нулевой ошибкой (как одношаговых, так и асимптотических), а также обнаружен эффект так называемой экстремальной суперактивации пропускных способностей с нулевой ошибкой [4–6].

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке научной программы РАН "Математическая теория управления и динамических систем" и Российского фонда фундаментальных исследований (номера проектов 12-01-00319а, 13-01-00295а).

[2] Работа выполнена при финансовой поддержке Датского исследовательского центра симметрии и деформации при Копенгагенском университете.

Данная статья посвящена суперактивации одношаговой квантовой пропускной способности с нулевой ошибкой. Эта пропускная способность $\bar{Q}_0(\Phi)$ (строго определенная в § 2) характеризует возможность безошибочной передачи квантовых состояний по квантовому каналу Φ при его однократном использовании. Соответствующий эффект суперактивации означает, что

$$\bar{Q}_0(\Phi_1) = \bar{Q}_0(\Phi_2) = 0, \quad \text{но} \quad \bar{Q}_0(\Phi_1 \otimes \Phi_2) > 0 \tag{1}$$

для некоторых каналов Φ_1 и Φ_2.

Свойство суперактивации (1) можно описать без использования термина "пропускная способность" как эффект появления идеального (т.е. полностью обратимого) подканала у тензорного произведения двух каналов, не имеющих идеальных подканалов. Поэтому анализ свойства (1) представляет также интерес для теории вполне положительных отображений между операторными алгебрами.

Существование квантовых каналов, для которых имеет место свойство (1), следует из существования при достаточно больших размерностях каналов, демонстрирующих так называемую экстремальную суперактивацию асимптотической пропускной способности с нулевой ошибкой. Этот результат получен в [5] неявным способом и поэтому не дает ни конкретных примеров каналов, для которых имеет место свойство (1), ни информации о минимальной размерности таких каналов.

В нашей работе [7] явно описаны каналы низкой размерности $\Phi_1 \neq \Phi_2$ (размерность входа равна 8, ранг Чоя равен 5), демонстрирующие экстремальную суперактивацию одношаговой пропускной способности с нулевой ошибкой, которая означает свойство (1) с заменой условия $\bar{Q}_0(\Phi_1) = \bar{Q}_0(\Phi_2) = 0$ на более сильное условие $\bar{C}_0(\Phi_1) = \bar{C}_0(\Phi_2) = 0$ (здесь $\bar{C}_0$ – одношаговая классическая пропускная способность с нулевой ошибкой). Выполнимость свойства (1) для таких каналов очевидна.

В настоящей статье используется тот же подход для построения *более простого* примера суперактивации (1). Оказалось, что замена условий

$$\bar{C}_0(\Phi_1) = \bar{C}_0(\Phi_2) = 0 \quad \longrightarrow \quad \bar{Q}_0(\Phi_1) = \bar{Q}_0(\Phi_2) = 0$$

позволяет существенно снизить размерность (размерность входа равна 4, ранг Чоя равен 3) и построить симметричный пример $\Phi_1 = \Phi_2$, т.е. такой канал Φ, что

$$\bar{Q}_0(\Phi) = 0, \quad \text{но} \quad \bar{Q}_0(\Phi \otimes \Phi) > 0.$$

Более того, этот канал Φ определяется посредством очень простого некоммутативного графа, что позволяет получить минимальное представление Крауса для Φ в явном виде.

В § 3 дается явное описание квантового канала Φ, для которого

$$\bar{Q}_0(\Phi) = 0, \quad \text{но} \quad \bar{Q}_0(\Phi \otimes \Phi) \geqslant \log n,$$

где n – любое натуральное число или $+\infty$ (в последнем случае Φ – бесконечномерный канал).

В § 4 показано, что у свойства суперактивации (1) есть двойственное свойство в теории квантовых измерений, состоящее в появлении неразличимых подпространств для тензорного произведения двух квантовых наблюдаемых, не имеющих неразличимых подпространств.

В Приложении рассмотрен общий метод получения представления Крауса для квантового канала с заданным некоммутативным графом.

§ 2. Суперактивация одношаговой квантовой пропускной способности с нулевой ошибкой

Пусть $\mathcal{H}$ – сепарабельное гильбертово пространство, $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ и $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$ – банаховы пространства всех ограниченных операторов в $\mathcal{H}$ и всех ядерных операторов в $\mathcal{H}$ соответственно, $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ – замкнутое выпуклое подмножество в $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$, состоящее из положительных операторов с единичным следом, которые называются *квантовыми состояниями* [1,2]. Носитель $\operatorname{supp}\rho$ состояния ρ – это ортогональное дополнение его ядра $\ker\rho$, размерность носителя будем называть рангом состояния: $\operatorname{rank}\rho=\dim\operatorname{supp}\rho$. Если $\dim\mathcal{H}=n<+\infty$, то $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ и $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$ можно отождествить с пространством $\mathfrak{M}_n$ всех $(n\times n)$-матриц (снабженным соответствующей нормой).

Пусть $\Phi\colon\mathfrak{T}(\mathcal{H}_A)\to\mathfrak{T}(\mathcal{H}_B)$ – квантовый канал, т.е. вполне положительное сохраняющее след линейное отображение [1,2]. Из теоремы Стайнспринга следует существование гильбертова пространства $\mathcal{H}_E$ и изометрии $V\colon\mathcal{H}_A\to\mathcal{H}_B\otimes\mathcal{H}_E$, таких что

$$\Phi(\rho)=\operatorname{Tr}_{\mathcal{H}_E}V\rho V^*,\qquad \rho\in\mathfrak{T}(\mathcal{H}_A).\tag{2}$$

Квантовый канал

$$\mathfrak{T}(\mathcal{H}_A)\ni\rho\mapsto\widehat{\Phi}(\rho)=\operatorname{Tr}_{\mathcal{H}_B}V\rho V^*\in\mathfrak{T}(\mathcal{H}_E)\tag{3}$$

называется *комплементарным* к каналу Φ [1,8]. Комплементарный канал определен однозначно с точностью до изометрической эквивалентности [8, Приложение].

С помощью представления Стайнспринга (2) нетрудно получить представление Крауса

$$\Phi(\rho)=\sum_k V_k\rho V_k^*,\qquad \rho\in\mathfrak{T}(\mathcal{H}_A),\tag{4}$$

в котором $\{V_k\}$ – набор линейных ограниченных операторов из $\mathcal{H}_A$ в $\mathcal{H}_B$, такой что $\sum\limits_k V_k^*V_k=I_{\mathcal{H}_A}$. Эти операторы определяются соотношением

$$\langle\varphi|V_k\psi\rangle=\langle\varphi\otimes k|V\psi\rangle,\qquad \varphi\in\mathcal{H}_B,\quad \psi\in\mathcal{H}_A,$$

где $\{|k\rangle\}$ – некоторый ортонормированный базис в пространстве $\mathcal{H}_E$ [1, гл. 6].

Минимальным представлением Крауса канала Φ называется представление (4) с минимальным числом ненулевых слагаемых, которое является характеристикой этого канала, называемой *рангом Чоя* [1,2]. Ранг Чоя канала Φ будем далее обозначать $\dim\mathcal{H}_E$, поскольку он совпадает с минимальной размерностью пространства $\mathcal{H}_E$.

Одношаговая квантовая пропускная способность с нулевой ошибкой $\bar{Q}_0(\Phi)$ канала Φ определяется как $\sup\limits_{\mathcal{H}\in q_0(\Phi)}\log\dim\mathcal{H}$, где $q_0(\Phi)$ – множество всех подпространств $\mathcal{H}_0$ в $\mathcal{H}_A$, на которых канал Φ полностью обратим (в том смысле, что существует канал Θ, такой что $\Theta(\Phi(\rho))=\rho$ для всех состояний ρ с носителем в $\mathcal{H}_0$). Асимптотическая квантовая пропускная способность с нулевой ошибкой определяется с помощью регуляризации: $Q_0(\Phi)=\sup\limits_n n^{-1}\bar{Q}_0(\Phi^{\otimes n})$ [4–6, 9, 10].

Известно, что канал Φ полностью обратим на подпространстве $\mathcal{H}_0$ тогда и только тогда, когда сужение комплементарного канала $\widehat{\Phi}$ на подмножество $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_0)$ является *полностью деполяризующим*, т.е. $\widehat{\Phi}(\rho_1)=\widehat{\Phi}(\rho_2)$ для всех состояний ρ_1 и ρ_2 с носителем в $\mathcal{H}_0$ [1, гл. 9]. Поэтому пропускная способность $\bar{Q}_0(\Phi)$ канала Φ полностью определяется множеством $\mathcal{G}(\Phi)\doteq\widehat{\Phi}^*(\mathfrak{B}(\mathcal{H}_E))$, которое называется *некоммутативным графом* канала Φ (см. [9]).

Лемма 1. *Канал* $\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathcal{H}_A)\to\mathfrak{T}(\mathcal{H}_B)$ *полностью обратим на подпространстве* $\mathcal{H}_0\subseteq\mathcal{H}_A$, *порожденном семейством* $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$, $n\leqslant+\infty$, *ортогональных единичных векторов* (*что означает* $\bar{Q}_0(\Phi)\geqslant\log n$) *тогда и только тогда, когда*

$$\langle\varphi_i|A\varphi_j\rangle=0\quad \text{и}\quad \langle\varphi_i|A\varphi_i\rangle=\langle\varphi_j|A\varphi_j\rangle\quad \forall i,j,\quad \forall A\in\mathfrak{L}, \tag{5}$$

где $\mathfrak{L}=\mathcal{G}(\Phi)$, *или, что равносильно,* $\mathfrak{L}$ – *любое подмножество пространства* $\mathfrak{B}(\mathcal{H}_A)$, *такое что*

$$\text{w-o-cl}(\operatorname{lin}\mathfrak{L})=\text{w-o-cl}(\mathcal{G}(\Phi)), \tag{6}$$

где w-o-cl$(\cdot)$ – *замыкание в слабой операторной топологии, а* $\operatorname{lin}\mathfrak{L}$ – *линейная оболочка множества* $\mathfrak{L}$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что соотношения (5) при $\mathfrak{L}=\mathcal{G}(\Phi)$ означают, что сужение комплементарного канала $\widehat{\Phi}$ на подмножество $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_0)$ является полностью деполяризующим.

Из выполнимости соотношений (5) при любом $\mathfrak{L}$, удовлетворяющем условию (6), следует выполнимость этих соотношений при $\mathfrak{L}=\mathcal{G}(\Phi)$. ▲

Замечание 1. Поскольку подпространство $\mathfrak{L}$ в алгебре $\mathfrak{M}_n$ всех $(n\times n)$-матриц является некоммутативным графом некоторого канала тогда и только тогда, когда

$$\mathfrak{L}\ \textit{симметрично}\ (\mathfrak{L}=\mathfrak{L}^*)\ \textit{и содержит единичную матрицу} \tag{7}$$

(см. [6, лемма 2] или [7, предложение 2]), лемма 1 показывает, что канал Φ с $\dim\mathcal{H}_A=n$ и положительной (соответственно, нулевой) пропускной способностью $\bar{Q}_0(\Phi)$ можно построить, выбрав подпространство $\mathfrak{L}\subset\mathfrak{M}_n$, удовлетворяющее условию (7), для которого выполнено (соответственно, не выполнено) следующее условие:

$$\exists\,\varphi,\psi\in[\mathbb{C}^n]_1,\quad \text{такие что}\quad \langle\psi|A\varphi\rangle=0\quad\text{и}\quad\langle\varphi|A\varphi\rangle=\langle\psi|A\psi\rangle\quad\forall A\in\mathfrak{L}, \tag{8}$$

где $[\mathbb{C}^n]_1$ – единичная сфера в $\mathbb{C}^n$.

Если m – такое натуральное число, что $\dim\mathfrak{L}\leqslant m^2$, то следствие 1 из [7] и предложение 3 (см. Приложение) дают явные выражения для канала Φ, у которого $\mathcal{G}(\Phi)=\mathfrak{L}$ и $\dim\mathcal{H}_E=m$.

Суперактивация одношаговой квантовой пропускной способности с нулевой ошибкой означает, что

$$\bar{Q}_0(\Phi_1)=\bar{Q}_0(\Phi_2)=0,\quad \text{но}\quad \bar{Q}_0(\Phi_1\otimes\Phi_2)>0 \tag{9}$$

для некоторых каналов Φ_1 и Φ_2. Как уже отмечалось в § 1, существование каналов Φ_1 и Φ_2, для которых имеет место (9), следует из результата, полученного в [5], однако явные примеры таких каналов до сих пор не построены, и вопрос об их минимальной размерности остается открытым.

Ниже приведен явный пример канала Φ с $\dim\mathcal{H}_A=4$, $\dim\mathcal{H}_E=3$, $\dim\mathcal{H}_B=12$, такого что (9) выполняется при $\Phi_1=\Phi_2=\Phi$.

В силу замечания 1 проблема поиска каналов, для которых имеет место (9), сводится к проблеме поиска подпространств $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$, удовлетворяющих условию (7), таких что условие (8) не выполнено для $\mathfrak{L}=\mathfrak{L}_1$ и для $\mathfrak{L}=\mathfrak{L}_2$, но выполнено для $\mathfrak{L}=\mathfrak{L}_1\otimes\mathfrak{L}_2$. Рассмотрим симметричный пример ($\mathfrak{L}_1=\mathfrak{L}_2$) таких подпространств в $\mathfrak{M}_4$.

Пусть U – унитарный оператор в $\mathbb{C}^2$, определяемый (в каноническом базисе) матрицей

$$U=\begin{bmatrix}\eta & 0\\ 0 & \bar{\eta}\end{bmatrix},$$

где $\eta = \exp[i\pi/4]$. Рассмотрим пятимерное подпространство

$$\mathfrak{L}_0 = \left\{ M = \begin{bmatrix} A & \lambda U^* \\ \lambda U & A \end{bmatrix},\ A \in \mathfrak{M}_2,\ \lambda \in \mathbb{C} \right\}$$

в алгебре $\mathfrak{M}_4$, удовлетворяющее условию (7).

Т е о р е м а 1. *Условие* (8) *не выполняется для* $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_0$, *но выполняется для* $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_0 \otimes \mathfrak{L}_0$ *с векторами*

$$|\varphi_t\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|1\rangle \otimes |1\rangle + e^{it} |2\rangle \otimes |2\rangle \right], \quad |\psi_t\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|3\rangle \otimes |3\rangle + e^{it} |4\rangle \otimes |4\rangle \right], \tag{10}$$

где $\{|k\rangle\}_{k=1}^4$ *– канонический базис в* $\mathbb{C}^4$, *а* t *– фиксированное число из* $[0, 2\pi)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Далее будем отождествлять $\mathbb{C}^4$ и $\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2$.

Предположим, что существуют единичные векторы $\varphi = [x_1, x_2]$ и $\psi = [y_1, y_2]$, $x_i, y_i \in \mathbb{C}^2$, такие что $\langle\psi|M\varphi\rangle = 0$ и $\langle\psi|M\psi\rangle = \langle\varphi|M\varphi\rangle$ для всех $M \in \mathfrak{L}_0$. Тогда имеют место равенства

$$\langle y_1|Ax_1\rangle + \langle y_2|Ax_2\rangle = 0 \quad \forall A \in \mathfrak{M}_2, \tag{11}$$
$$\langle y_1|U^*x_2\rangle + \langle y_2|Ux_1\rangle = 0, \tag{12}$$
$$\langle y_1|Ay_1\rangle + \langle y_2|Ay_2\rangle = \langle x_1|Ax_1\rangle + \langle x_2|Ax_2\rangle \quad \forall A \in \mathfrak{M}_2, \tag{13}$$
$$\langle y_1|U^*y_2\rangle + \langle y_2|Uy_1\rangle = \langle x_1|U^*x_2\rangle + \langle x_2|Ux_1\rangle. \tag{14}$$

Если $x_1 \nparallel x_2$, то найдется $A_0 \in \mathfrak{M}_2$, такой что $y_1 = A_0x_1$ и $y_2 = A_0x_2$. Поэтому из (11) получаем $\langle y_1|y_1\rangle + \langle y_2|y_2\rangle = 0$, т.е. $y_1 = y_2 = 0$. Аналогично, если $y_1 \nparallel y_2$, то из (11) следует, что $x_1 = x_2 = 0$.

Таким образом, имеем $x_1 \parallel x_2$ и $y_1 \parallel y_2$. Покажем несовместность уравнений (11)–(14), рассматривая следующие случаи:

1) $x_2 = 0$, $x_1 \neq 0$. В этом случае из (11) следует, что $\langle y_1|Ax_1\rangle = 0$ для всех $A \in \mathfrak{M}_2$, что дает $y_1 = 0$. Тогда из (13) следует, что $\langle x_1|Ax_1\rangle = \langle y_2|Ay_2\rangle$ для всех $A \in \mathfrak{M}_2$, а это возможно, только если $x_1 \parallel y_2$. Поэтому в силу приведенной ниже леммы 2 из (12) следует, что $y_2 = 0$. Таким образом, получаем $y_1 = y_2 = 0$;

2) $y_2 = 0$, $y_1 \neq 0$. Аналогично случаю 1) получаем $x_1 = x_2 = 0$;

3) $x_2 \neq 0$, $y_2 \neq 0$. В этом случае $x_1 = \mu x_2$, $y_1 = \nu y_2$, и из (13) следует равенство

$$(1 + |\mu|^2)\langle x_2|Ax_2\rangle = (1 + |\nu|^2)\langle y_2|Ay_2\rangle \quad \forall A \in \mathfrak{M}_2,$$

которое возможно, только если $x_2 \parallel y_2$. Поэтому $x_1 = \alpha y_2$ и $x_2 = \beta y_2$ (в дополнение к $y_1 = \nu y_2$). Можем считать, что $x_1 \neq 0$ и $y_1 \neq 0$, поскольку в противном случае из (11) следует, что $\langle y_2|Ax_2\rangle = 0$ для всех $A \in \mathfrak{M}_2$, а это возможно, только если $x_2 = 0$ или $y_2 = 0$.

Из (11) получаем, что $(\bar\nu\alpha + \beta)\langle y_2|y_2\rangle = 0$, а значит,

$$\beta = -\bar\nu\alpha. \tag{15}$$

Из леммы 2 получаем, что $z_0 = \langle y_2|Uy_2\rangle$ – ненулевое комплексное число. Поэтому из (14) и (15) следует, что $\mathrm{Re}(\nu z_0) = \mathrm{Re}(\alpha\bar\beta z_0) = -|\alpha|^2 \,\mathrm{Re}(\nu z_0)$, а значит,

$$\mathrm{Re}(\nu z_0) = 0. \tag{16}$$

Из (12) и (15) получаем равенство

$$\bar\nu\beta\bar z_0 + \alpha z_0 = \alpha(-\bar\nu^2\bar z_0 + z_0) = 0.$$

Поскольку $\alpha \neq 0$ (в силу $x_1 \neq 0$), имеем $\nu^2 z_0 = \bar{z}_0$. Отсюда следует, что νz_0 – вещественное число. Поэтому (16) показывает, что $\nu = 0$ вопреки предположению, что $y_1 \neq 0$.

Невыполнимость условия (8) для $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_0$ доказана.

Покажем, что

$$\langle \psi_t | M_1 \otimes M_2 \varphi_t \rangle = 0 \quad \forall M_1, M_2 \in \mathfrak{L}_0 \tag{17}$$

и

$$\langle \psi_t | M_1 \otimes M_2 \psi_t \rangle = \langle \varphi_t | M_1 \otimes M_2 \varphi_t \rangle \quad \forall M_1, M_2 \in \mathfrak{L}_0, \tag{18}$$

где φ_t и ψ_t – определенные в (10) векторы. Поскольку мы отождествляем $\mathbb{C}^4$ с $\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2$, эти векторы представляются в виде

$$|\varphi_t\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|e_1, 0\rangle \otimes |e_1, 0\rangle + e^{it} |e_2, 0\rangle \otimes |e_2, 0\rangle \right],$$
$$|\psi_t\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|0, e_1\rangle \otimes |0, e_1\rangle + e^{it} |0, e_2\rangle \otimes |0, e_2\rangle \right],$$

где $\{|e_i\rangle\}$ – канонический базис в $\mathbb{C}^2$.

Полагая $\alpha_1 = 1$ и $\alpha_2 = e^{it}$, имеем

$$M_1 \otimes M_2 |\varphi_t\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^{2} \alpha_i |A_1 e_i, \lambda_1 U e_i\rangle \otimes |A_2 e_i, \lambda_2 U e_i\rangle, \tag{19}$$

и следовательно,

$$\langle \psi_t | M_1 \otimes M_2 \varphi_t \rangle = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} \bar{\alpha}_i \alpha_j \langle 0, e_i | \otimes \langle 0, e_i | \cdot |A_1 e_j, \lambda_1 U e_j\rangle \otimes |A_2 e_j, \lambda_2 U e_j\rangle =$$
$$= \frac{1}{2} \lambda_1 \lambda_2 \sum_{i,j=1}^{2} \bar{\alpha}_i \alpha_j \langle e_i | U e_j \rangle \langle e_i | U e_j \rangle = \frac{1}{2} \lambda_1 \lambda_2 \left[\eta^2 |\alpha_1|^2 + \bar{\eta}^2 |\alpha_2|^2 \right] = 0,$$

что показывает выполнимость условия (17). Из (19) следует, что

$$\langle \varphi_t | M_1 \otimes M_2 \varphi_t \rangle = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} \bar{\alpha}_i \alpha_j \langle e_i, 0 | \otimes \langle e_i, 0 | \cdot |A_1 e_j, \lambda_1 U e_j\rangle \otimes |A_2 e_j, \lambda_2 U e_j\rangle =$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} \bar{\alpha}_i \alpha_j \langle e_i | A_1 e_j \rangle \langle e_i | A_2 e_j \rangle. \tag{20}$$

Поскольку

$$M_1 \otimes M_2 |\psi_t\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^{2} \alpha_i |\lambda_1 U^* e_i, A_1 e_i\rangle \otimes |\lambda_2 U^* e_i, A_2 e_i\rangle,$$

имеем

$$\langle \psi_t | M_1 \otimes M_2 \psi_t \rangle = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} \bar{\alpha}_i \alpha_j \langle 0, e_i | \otimes \langle 0, e_i | \cdot |\lambda_1 U^* e_j, A_1 e_j\rangle \otimes |\lambda_2 U^* e_j, A_2 e_j\rangle =$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} \bar{\alpha}_i \alpha_j \langle e_i | A_1 e_j \rangle \langle e_i | A_2 e_j \rangle.$$

Из этого равенства и (20) следует (18). ▲

Лемма 2. *Если y – ненулевой вектор в $\mathbb{C}^2$, то $\langle y|Uy\rangle \neq 0$.*

Доказательство. Пусть $y = [y_1, y_2]$, тогда $Uy = [\eta y_1, \bar{\eta} y_2]$ и $\langle y|Uy\rangle = |y_1|^2\eta + |y_2|^2\bar{\eta} \neq 0$ (поскольку $\eta = \exp[i\pi/4]$). ▲

Из теоремы 1 (с учетом леммы 1) и предложения 2 из [7] получаем

Следствие 1. *Существует псевдодиагональный*[3] *канал Φ с $\dim \mathcal{H}_A = 4$, $\dim \mathcal{H}_E = 3$, $\dim \mathcal{H}_B = 12$, такой что $\mathcal{G}(\Phi) = \mathfrak{L}_0$, и следовательно,*

$$\bar{Q}_0(\Phi) = 0, \quad \textit{но} \quad \bar{Q}_0(\Phi \otimes \Phi) > 0.$$

Канал $\Phi \otimes \Phi$ при каждом фиксированном $t \in [0, 2\pi)$ полностью обратим на двумерном подпространстве $\mathcal{H}_t = \mathrm{lin}\{|\varphi_t\rangle, |\psi_t\rangle\}$, где φ_t, ψ_t – определенные в (10) векторы.

Замечание 2. Нетрудно видеть, что подпространство $\mathfrak{L}_0$ не является транзитивным. Поэтому в силу леммы 2 из [7] соответствующий канал Φ имеет положительную одношаговую классическую пропускную способность с нулевой ошибкой. Значит, этот канал не дает пример экстремальной суперактивации одношаговой пропускной способности с нулевой ошибкой (в отличие от каналов, рассмотренных в [7]).

Для получения минимального представления Крауса канала с описанными в следствии 1 свойствами необходимо найти базис $\{A_i\}_{i=1}^5$ подпространства $\mathfrak{L}_0$, такой что $A_i \geqslant 0$ для всех i и $\sum\limits_{i=1}^{5} A_i = I_4$. В качестве такого базиса можно взять следующий набор матриц:

$$A_1 = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \bar{\eta} & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \eta \\ \eta & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \bar{\eta} & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\bar{\eta} & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -\eta \\ -\eta & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\bar{\eta} & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \frac{5}{9}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 3 \end{bmatrix}, \quad A_5 = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ -\sqrt{3} & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & 3 \end{bmatrix}.$$

Следует также выбрать набор $\{|\psi_i\rangle\}_{i=1}^5$ единичных векторов из $\mathbb{C}^3$, такой что набор $\{|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\}_{i=1}^5$ матриц из $\mathfrak{M}_3$ линейно независим. Пусть

$$|\psi_1\rangle = |1\rangle, \quad |\psi_2\rangle = |2\rangle, \quad |\psi_3\rangle = |3\rangle, \quad |\psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1+3\rangle, \quad |\psi_5\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|2+3\rangle,$$

где $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ – канонический базис в $\mathbb{C}^3$.

Замечая, что $r_i = \mathrm{rank}\, A_i = 3$ при $i = 1, 2$ и $r_i = \mathrm{rank}\, A_i = 2$ при $i = 3, 4, 5$, и применяя предложение 3 (см. Приложение), можно получить минимальное представление Крауса псевдодиагонального канала Φ, описанного в следствии 1. Прямое

[3] Канал $\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathcal{H}_A) \to \mathfrak{T}(\mathcal{H}_B)$ называется псевдодиагональным, если он имеет представление

$$\Phi(\rho) = \sum_{i,j} c_{ij} \langle\psi_i|\rho|\psi_j\rangle |i\rangle\langle j|, \quad \rho \in \mathfrak{T}(\mathcal{H}_A),$$

в котором $\{c_{ij}\}$ – матрица Грама некоторого набора единичных векторов, $\{|\psi_i\rangle\}$ – такой набор векторов в $\mathcal{H}_A$, что $\sum\limits_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| = I_{\mathcal{H}_A}$, а $\{|i\rangle\}$ – ортонормированный базис в $\mathcal{H}_B$ [11].

вычисление дает следующие операторы Крауса:

$$V_1=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}\sqrt{6} & 0 & \sqrt{6}\bar{\eta} & 0\\ 0 & \alpha & 0 & \beta\\ 0 & \bar{\beta} & 0 & \alpha\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 1 & \sqrt{3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{3}\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\end{bmatrix}, \quad V_2=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ \sqrt{6} & 0 & -\sqrt{6}\bar{\eta} & 0\\ 0 & \alpha & 0 & -\beta\\ 0 & -\bar{\beta} & 0 & \alpha\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 1 & -\sqrt{3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -\sqrt{3}\end{bmatrix},$$

$$V_3=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 2\sqrt{5} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\sqrt{5} & 0\\ 1 & \sqrt{3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{3}\\ 1 & -\sqrt{3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -\sqrt{3}\end{bmatrix},$$

где $\alpha = \dfrac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ и $\beta = \eta\dfrac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ ($\eta = e^{i\pi/4}$). Таким образом, $\Phi(\rho) = \sum\limits_{k=1}^{3} V_k\rho V_k^*$ – минимальное представление Крауса канала Φ.

§ 3. Суперактивация с $\bar{Q}_0(\Phi\otimes\Phi) \geqslant \log n$

Обобщение рассмотренной выше конструкции дает следующий результат.

Теорема 2. *Пусть* $\dim\mathcal{H}_A = 2n \leqslant +\infty$, $\{|k\rangle\}_{k=1}^{2n}$ *– ортонормированный базис в* $\mathcal{H}_A$, *а* m *– минимальное натуральное число, такое что* $n^2-n+4 \leqslant m^2$, *если* $n<+\infty$, *и* $m=+\infty$, *если* $n=+\infty$.

Существует псевдодиагональный канал $\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathcal{H}_A)\to\mathfrak{T}(\mathcal{H}_B)$ *с* $\dim\mathcal{H}_E = m$, *такой что* $\bar{Q}_0(\Phi) = 0$, *а канал* $\Phi\otimes\Phi$ *полностью обратим на подпространстве в* $\mathcal{H}_A\otimes\mathcal{H}_A$, *порожденном векторами*

$$|\varphi_k^t\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|2k-1\rangle\otimes|2k-1\rangle + e^{it}|2k\rangle\otimes|2k\rangle\right], \quad k=1,2,\dots,n, \tag{21}$$

где t *– фиксированное число в* $[0,2\pi)$, *а значит,* $\bar{Q}_0(\Phi\otimes\Phi)\geqslant\log n$.

Доказательство. Предположим сначала, что $n<+\infty$. Рассмотрим подпространство

$$\mathfrak{L}_n = \left\{ M = \begin{bmatrix} A & \lambda_{12}U^* & \dots & \lambda_{1n}U^*\\ \lambda_{21}U & A & \dots & \lambda_{2n}U^*\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \lambda_{n1}U & \lambda_{n2}U & \dots & A\end{bmatrix}, \quad A\in\mathfrak{M}_2, \quad \lambda_{ij}\in\mathbb{C}\right\} \tag{22}$$

в $\mathfrak{M}_{2n}$, где U – унитарный оператор в $\mathbb{C}^2$, определенный в § 2 (имеющий матрицу $\mathrm{diag}\{\eta,\bar{\eta}\}$ в каноническом базисе в $\mathbb{C}^2$, $\eta=\exp[i\pi/4]$).

Подпространство $\mathfrak{L}_n$ удовлетворяет условию (7) и $\dim\mathfrak{L}_n=n^2-n+4$. Поэтому в силу предложения 2 из [7] существует псевдодиагональный канал Φ с $\dim\mathcal{H}_A=2n$ и $\dim\mathcal{H}_E=m$, такой что $\mathcal{G}(\Phi)=\mathfrak{L}_n$.

Докажем, что $\bar{Q}_0(\Phi)=0$, показав невыполнимость условия (8) для $\mathfrak{L}=\mathfrak{L}_n$.

Предположим, что существуют единичные векторы $\varphi=[x_1,x_2,\dots,x_n]$ и $\psi==[y_1,y_2,\dots,y_n]$, $x_i,y_i\in\mathbb{C}^2$, такие что $\langle\psi|M\varphi\rangle=0$ и $\langle\psi|M\psi\rangle=\langle\varphi|M\varphi\rangle$ для всех $M\in\mathfrak{L}_n$. Тогда имеют место равенства

$$\sum_{i=1}^n\langle y_i|Ax_i\rangle=0\quad\forall A\in\mathfrak{M}_2,\tag{23}$$

$$\langle y_i|U^*x_k\rangle=0,\quad\forall k>1,\quad i<k,\tag{24}$$

$$\langle y_i|Ux_k\rangle=0,\quad\forall k<n,\quad i>k,\tag{25}$$

$$\sum_{i=1}^n\langle y_i|Ay_i\rangle=\sum_{i=1}^n\langle x_i|Ax_i\rangle\quad\forall A\in\mathfrak{M}_2.\tag{26}$$

Заметим, что (26) равносильно равенству

$$\sum_{i=1}^n|y_i\rangle\langle y_i|=\sum_{i=1}^n|x_i\rangle\langle x_i|.\tag{27}$$

Достаточно показать, что

$$\text{либо}\quad x_1\parallel x_2\parallel x_3\parallel\dots\parallel x_n,\quad\text{либо}\quad y_1\parallel y_2\parallel y_3\parallel\dots\parallel y_n,\tag{28}$$

поскольку тогда из (27) будет следовать, что $x_i\parallel y_j$ для всех i,j, а это в силу леммы 2 несовместимо с (24) и (25) (если $x_i=y_i=0$ для всех $i\neq k$, то $\langle y_k|x_k\rangle=\langle\psi|\varphi\rangle=0$).

Будем считать, что векторы φ и ψ имеют по крайней мере две ненулевые компоненты (иначе (28) тривиально выполняется).

Пусть k – такое число, что $x_i=y_i=0$ для всех $i<k$ и либо $x_k\neq0$, либо $y_k\neq0$.

В силу симметрии можно считать, что $x_k\neq0$. Тогда из (25) следует, что

$$y_{k+1}\parallel y_{k+2}\parallel\dots\parallel y_n.\tag{29}$$

Если $y_k=0$, то (29) равносильно (28). Если $y_k\neq0$, то возможны следующие случаи:

1) $x_i\neq0$ и $y_j\neq0$, где $i>j>k$. В этом случае из (24) при $k=i$ следует, что

$$y_k\parallel y_{k+1}\parallel\dots\parallel y_{i-1}.$$

Это вместе с (29) дает (28) (поскольку $y_j\neq0$ и $i\geqslant k+2$);

2) $x_i\neq0$ и $y_j\neq0$, где $j>i>k$. Поскольку $x_k\neq0$ и $y_k\neq0$, этот случай сводится к предыдущему перестановкой φ и ψ;

3) $x_i=y_i=0$ для всех $i>k$, кроме $i=\ell>k$. В этом случае из (23) следует, что

$$\langle y_k|Ax_k\rangle+\langle y_\ell|Ax_\ell\rangle=0\quad\forall A\in\mathfrak{M}_2.$$

Если $x_k\nparallel x_\ell$, то найдется $A_0\in\mathfrak{M}_2$, такой что $y_k=A_0x_k$ и $y_\ell=A_0x_\ell$. Поэтому из предыдущего равенства следует, что $\langle y_k|y_k\rangle+\langle y_\ell|y_\ell\rangle=0$ вопреки предположению $y_k\neq0$. Значит, $x_k\parallel x_\ell$, и имеет место (28).

Невыполнимость условия (8) для $\mathfrak{L}=\mathfrak{L}_n$ доказана.

Покажем, что

$$\langle\varphi_k^t|M_1\otimes M_2\varphi_\ell^t\rangle = 0 \quad \forall M_1, M_2 \in \mathfrak{L}_n, \quad k\neq\ell, \tag{30}$$

и

$$\langle\varphi_k^t|M_1\otimes M_2\varphi_k^t\rangle = \langle\varphi_\ell^t|M_1\otimes M_2\varphi_\ell^t\rangle \quad \forall M_1, M_2 \in \mathfrak{L}_n, \quad k\neq\ell, \tag{31}$$

для семейства $\{\varphi_k^t\}_{k=1}^n$ векторов (21). В силу леммы 1 эти соотношения означают полную обратимость канала $\Phi\otimes\Phi$ на подпространстве, порожденном этим семейством.

Пусть $|\xi_i^k\rangle = |0,\dots,0,e_i,0,\dots,0\rangle$ – вектор из $\mathbb{C}^{2n} = [\mathbb{C}^2\oplus\mathbb{C}^2\oplus\dots\oplus\mathbb{C}^2]$, где вектор e_i находится на k-й позиции ($\{e_1,e_2\}$ – канонический базис в $\mathbb{C}^2$). Тогда

$$|\varphi_k^t\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|\xi_1^k\rangle\otimes|\xi_1^k\rangle + e^{it}|\xi_2^k\rangle\otimes|\xi_2^k\rangle\right], \quad k=1,2,\dots,n.$$

Полагая $\alpha_1 = 1$ и $\alpha_2 = e^{it}$, имеем

$$M_1\otimes M_2|\varphi_k^t\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{j=1}^{2}\alpha_j|\psi(1,k,j)\rangle\otimes|\psi(2,k,j)\rangle, \tag{32}$$

где

$$|\psi(r,k,j)\rangle = |\lambda_{1k}^r U^*e_j, \lambda_{2k}^r U^*e_j,\dots,\lambda_{[k-1]k}U^*e_j, A^re_j, \lambda_{[k+1]k}^r Ue_j,\dots,\lambda_{nk}^r Ue_j\rangle,$$

$r=1,2$ (A^r, λ_{ij}^r соответствуют матрице M_r). Если $\ell>k$, то

$$\begin{aligned}\langle\varphi_\ell^t|M_1\otimes M_2\varphi_k^t\rangle &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2}\bar{\alpha}_i\alpha_j\langle\xi_i^\ell|\otimes\langle\xi_i^\ell|\cdot|\psi(1,k,j)\rangle\otimes|\psi(2,k,j)\rangle = \\ &= \frac{1}{2}\lambda_{\ell k}^1\lambda_{\ell k}^2\sum_{i,j=1}^{2}\bar{\alpha}_i\alpha_j\langle e_i|Ue_j\rangle\langle e_i|Ue_j\rangle = \frac{1}{2}\lambda_{\ell k}^1\lambda_{\ell k}^2\left[\eta^2|\alpha_1|^2+\bar{\eta}^2|\alpha_2|^2\right] = 0.\end{aligned}$$

Поэтому (30) выполнено для $\ell>k$, а значит, и для всех $\ell\neq k$. Из (32) следует, что

$$\begin{aligned}\langle\varphi_k^t|M_1\otimes M_2\varphi_k^t\rangle &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2}\bar{\alpha}_i\alpha_j\langle\xi_i^k|\otimes\langle\xi_i^k|\cdot|\psi(1,k,j)\rangle\otimes|\psi(2,k,j)\rangle = \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2}\bar{\alpha}_i\alpha_j\langle e_i|A^1e_j\rangle\langle e_i|A^2e_j\rangle\end{aligned} \tag{33}$$

и что

$$\begin{aligned}\langle\varphi_\ell^t|M_1\otimes M_2\varphi_\ell^t\rangle &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2}\bar{\alpha}_i\alpha_j\langle\xi_i^\ell|\otimes\langle\xi_i^\ell|\cdot|\psi(1,\ell,j)\rangle\otimes|\psi(2,\ell,j)\rangle = \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2}\bar{\alpha}_i\alpha_j\langle e_i|A^1e_j\rangle\langle e_i|A^2e_j\rangle.\end{aligned}$$

Из этого равенства и (33) следует (31).

Рассмотрим случай $n=+\infty$. Пусть $\mathcal{H}_A$ – сепарабельное гильбертово пространство, представленное в виде счетной прямой суммы двумерных пространств $\mathbb{C}^2$. Каждый оператор в $\mathfrak{B}(\mathcal{H}_A)$ представляется бесконечной блочной матрицей, удовлетворяющей определенному условию "ограниченности".

Пусть $\mathcal{L}_*$ – множество всех бесконечных блочных матриц M, определенных в (22) с $n = +\infty$, удовлетворяющих условию

$$\Lambda^2 = \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j \neq i} |\lambda_{ij}|^2 < +\infty. \tag{34}$$

Это условие гарантирует ограниченность соответствующего оператора в силу легко проверяемого неравенства

$$\|M\|^2_{\mathfrak{B}(\mathcal{H}_A)} \leqslant 2\big[\|A\|^2_{\mathfrak{B}(\mathbb{C}^2)} + \Lambda^2\big]. \tag{35}$$

Пусть $\overline{\mathcal{L}}_*$ – замыкание $\mathcal{L}_*$ по операторной норме. Ясно, что $\overline{\mathcal{L}}_*$ – симметричное подпространство в $\mathfrak{B}(\mathcal{H}_A)$, содержащее единичный оператор $I_{\mathcal{H}_A}$. Используя неравенство (35), нетрудно показать сепарабельность подпространства $\overline{\mathcal{L}}_*$ в топологии операторной нормы (в качестве счетного плотного подмножества в $\overline{\mathcal{L}}_*$ можно взять множество всех матриц M, в которых A и все λ_{ij} имеют рациональные компоненты).

Из симметричности и сепарабельности подпространства $\overline{\mathcal{L}}_*$ следует (см. доказательство предложения 2 в [7]) существование счетного набора $\{\widetilde{M}_i\}_{i=2}^{+\infty} \subset \overline{\mathcal{L}}_*$ положительных операторов, порождающего $\overline{\mathcal{L}}_*$ (в том смысле, что замыкание по операторной норме всех линейных комбинаций операторов $\widetilde{M}_i$ совпадает с $\overline{\mathcal{L}}_*$). Пусть $M_i = 2^{-i}\|\widetilde{M}_i\|^{-1}\widetilde{M}_i$, $i = 2, 3, \ldots$ Поскольку $I_{\mathcal{H}_A} \in \overline{\mathcal{L}}_*$ и ряд $\sum_{i=2}^{+\infty} M_i$ сходится в топологии операторной нормы, положительный оператор $M_1 = I_{\mathcal{H}_A} - \sum_{i=2}^{+\infty} M_i$ лежит в $\overline{\mathcal{L}}_*$. Поэтому $\{M_i\}_{i=1}^{+\infty}$ – счетное подмножество положительных операторов, порождающее подпространство $\overline{\mathcal{L}}_*$, такое что

$$\sum_{i=1}^{+\infty} M_i = I_{\mathcal{H}_A}, \tag{36}$$

где ряд сходится в топологии операторной нормы.

Пусть $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^{+\infty}$ – ортонормированный базис в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_B$. Рассмотрим унитальное вполне положительное отображение

$$\mathfrak{B}(\mathcal{H}_B) \ni X \mapsto \Psi^*(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} \langle e_i|Xe_i\rangle M_i \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_A).$$

Очевидно, что все операторы M_i лежат в $\operatorname{Ran}\Psi^* \doteq \Psi^*(\mathfrak{B}(\mathcal{H}_B))$. Поскольку ряд в (36) сходится в топологии операторной нормы, $\operatorname{Ran}\Psi^* \subseteq \overline{\mathcal{L}}_*$. Следовательно, $\operatorname{Ran}\Psi^*$ – плотное подмножество в $\overline{\mathcal{L}}_*$.

Преддвойственное отображение

$$\mathfrak{T}(\mathcal{H}_A) \ni \rho \mapsto \Psi(\rho) = \sum_{i=1}^{+\infty} [\operatorname{Tr} M_i\rho] |e_i\rangle\langle e_i| \in \mathfrak{T}(\mathcal{H}_B)$$

является квантовым каналом, разрушающим сцепленность [1, гл. 6]. Пусть Φ – комплементарный канал к каналу Ψ. Это означает, что Φ – псевдодиагональный канал (см. [11]) и $\mathcal{G}(\Phi) = \operatorname{Ran}\Psi^*$.

Для доказательства равенства $\bar{Q}_0(\Phi) = 0$ в силу леммы 1 достаточно показать, что условие (8) не выполнено при $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_*$ (поскольку $\mathfrak{L}_*$ и $\operatorname{Ran}\Psi^*$ – плотные помножества в $\overline{\mathfrak{L}}_*$). Это можно сделать, повторяя рассуждение в доказательстве такого же утверждения в случае $n<+\infty$.

Векторы, определенные в (21) при $n=+\infty$, представляются в виде

$$|\varphi_k^t\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[|\xi_1^k\rangle\otimes|\xi_1^k\rangle+e^{it}|\xi_2^k\rangle\otimes|\xi_2^k\rangle\right],\quad k=1,2,3,\ldots,$$

где $|\xi_i^k\rangle=|0,\ldots,0,e_i,0,0,\ldots\rangle$ – вектор из $\mathcal{H}_A=[\mathbb{C}^2\oplus\mathbb{C}^2\oplus\ldots\oplus\mathbb{C}^2\oplus\ldots]$, содержащий вектор e_i на k-й позиции ($\{e_1,e_2\}$ – канонический базис в $\mathbb{C}^2$).

Поскольку $\operatorname{Ran}\Psi^*$ – плотное подмножество в $\overline{\mathfrak{L}}_*$, $\operatorname{Ran}[\Psi^*\otimes\Psi^*]$ – плотное подмножество в $\overline{\mathfrak{L}}_*\bar{\otimes}\overline{\mathfrak{L}}_*$ (где $\bar{\otimes}$ – пространственное тензорное произведение). Поэтому для доказательства полной обратимости канала $\Phi\otimes\Phi$ на подпространстве, порожденном семейством векторов $\{|\varphi_k^t\rangle\}_{k=1}^{+\infty}$, в силу леммы 1 достаточно показать, что соотношение (5) выполнено для любой пары $|\varphi_k^t\rangle,|\varphi_\ell^t\rangle$ и $\mathfrak{L}=\{M_1\otimes M_2\mid M_1,M_2\in\mathfrak{L}_*\}$. Это делается точно так же, как и при проверке аналогичных соотношений в случае $n<+\infty$. ▲

§ 4. Об одном свойстве квантовых измерений

В этом параграфе будет показано, что в теории квантовых измерений есть эффект, двойственный эффекту суперактивации одношаговой квантовой пропускной способности с нулевой ошибкой.

В соответствии с основными постулатами квантовой механики любое измерение квантовой системы, ассоциированной с гильбертовым пространством $\mathcal{H}$, описывается положительной операторнозначной мерой, также называемой (обобщенной) *квантовой наблюдаемой* [1,2]. Квантовая наблюдаемая с конечным или счетным множеством исходов – это дискретное разложение единицы в $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, т.е. набор $\{M_i\}_{i=1}^m$, $m\leqslant+\infty$, положительных операторов в $\mathcal{H}$, таких что $\sum_{i=1}^m M_i=I_{\mathcal{H}}$. Наблюдаемая называется *точной*, если она соответствует ортогональному разложению единицы (в этом случае наблюдаемая $\{M_i\}_{i=1}^m$ состоит из взаимно ортогональных проекторов).

Если в квантовой системе, находящейся в заданном состоянии ρ, производится измерение, соответствующее наблюдаемой $\mathcal{M}=\{M_i\}_{i=1}^m$, то вероятность i-го исхода равна $\operatorname{Tr}M_i\rho$. Поэтому можно рассматривать наблюдаемую $\mathcal{M}$ как квантово-классический канал

$$\mathfrak{S}(\mathcal{H})\ni\rho\mapsto\pi_{\mathcal{M}}(\rho)=\{\operatorname{Tr}M_i\rho\}_{i=1}^m\in\mathfrak{P}_m,$$

где $\mathfrak{P}_m$ – множество всех распределений вероятностей с m исходами.

В теории квантовых измерений широко используется понятие *информационной полноты* наблюдаемой и его модификации [12–14]. Наблюдаемая $\mathcal{M}$ называется информационно полной, если распределения вероятностей $\pi_{\mathcal{M}}(\rho_1)$ и $\pi_{\mathcal{M}}(\rho_2)$ различны для любых двух различных состояний ρ_1 и ρ_2.

С информационной неполнотой наблюдаемой связано следующее понятие.

Определение. Подпространство $\mathcal{H}_0\subset\mathcal{H}$ называется *неразличимым* для наблюдаемой $\mathcal{M}$, если $\pi_{\mathcal{M}}(\rho_1)=\pi_{\mathcal{M}}(\rho_2)$ для любых состояний ρ_1 и ρ_2 с носителем в $\mathcal{H}_0$.

Если $\mathcal{M}=\{M_i\}$ – точная наблюдаемая, то все ее неразличимые подпространства – образы проекторов M_i ранга $\geqslant 2$. Поэтому точная наблюдаемая не имеет неразличимых подпространств тогда и только тогда, когда она состоит из проекторов ранга 1. Для неточных наблюдаемых это утверждение неверно (см. пример после следствия 2).

Для описания неразличимых подпространств заданной наблюдаемой будем использовать следующее

П р е д л о ж е н и е 1. *Пусть* $\mathcal{M} = \{M_i\}_{i=1}^m$, $m \leqslant +\infty$, *– наблюдаемая в гильбертовом пространстве* $\mathcal{H}$, *а* $\mathcal{H}_0$ *– подпространство в* $\mathcal{H}$. *Следующие утверждения равносильны*:

(i) $\mathcal{H}_0$ *– неразличимое подпространство для наблюдаемой* $\mathcal{M}$;
(ii) $\langle\psi|M_i\varphi\rangle = 0$ *для всех* i *и любых ортогональных векторов* φ, ψ *из* $\mathcal{H}_0$;
(iii) *Существует ортонормированный базис* $\{|\varphi_k\rangle\}$ *в* $\mathcal{H}_0$, *такой что*

$$\langle\varphi_k|M_i\varphi_j\rangle = 0 \quad \textit{и} \quad \langle\varphi_k|M_i\varphi_k\rangle = \langle\varphi_j|M_i\varphi_j\rangle \quad \forall i,j,k.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что подпространство $\mathcal{H}_0$ неразличимо для наблюдаемой $\mathcal{M}$ тогда и только тогда, когда квантовый канал

$$\mathfrak{T}(\mathcal{H}) \ni \rho \mapsto \sum_{i=1}^{m} [\operatorname{Tr} M_i\rho] |i\rangle\langle i| \in \mathfrak{T}(\mathcal{H}_m), \tag{37}$$

где $\{|i\rangle\}$ – ортонормированный базис в m-мерном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_m$, имеет полностью деполяризующее сужение на подмножество $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_0) \subset \mathfrak{S}(\mathcal{H})$. Поэтому утверждение предложения следует из известной характеристики полностью деполяризующих каналов [1]. ▲

Отсутствие неразличимых подпространств у квантовой наблюдаемой можно считать показателем ее качества. Поэтому, если две наблюдаемые $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ не имеют неразличимых подпространств, естественно возникает вопрос о существовании неразличимых подпространств у их тензорного произведения $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$.[4] Этот вопрос тесно связан с эффектом суперактивации одношаговой квантовой пропускной способности с нулевой ошибкой.

П р е д л о ж е н и е 2. *Пусть* $\mathcal{H}_A^1, \mathcal{H}_A^2$ *– конечномерные гильбертовы пространства. Следующие утверждения равносильны*:

(i) *Существуют каналы* $\Phi_1 \colon \mathfrak{T}(\mathcal{H}_A^1) \to \mathfrak{T}(\mathcal{H}_B^1)$ *и* $\Phi_2 \colon \mathfrak{T}(\mathcal{H}_A^2) \to \mathfrak{T}(\mathcal{H}_B^2)$ *с размерностями* $\dim \mathcal{G}(\Phi_1) = m_1$ *и* $\dim \mathcal{G}(\Phi_2) = m_2$, *такие что*

$$\bar{Q}_0(\Phi_1) = \bar{Q}_0(\Phi_2) = 0 \quad \textit{и} \quad \bar{Q}_0(\Phi_1 \otimes \Phi_2) \geqslant \log n;$$

(ii) *Существуют наблюдаемые* $\mathcal{M}_1 = \{M_i^1\}_{i=1}^{m_1}$ *и* $\mathcal{M}_2 = \{M_i^2\}_{i=1}^{m_2}$ *в пространствах* $\mathcal{H}_A^1$ *и* $\mathcal{H}_A^2$, *не имеющие неразличимых подпространств, такие что наблюдаемая* $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$ *имеет* n*-мерное неразличимое подпространство.*

Если $\Phi_1 = \Phi_2$ *в* (i), *то* $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2$ *в* (ii), *и наоборот.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Наблюдаемая $\mathcal{M} = \{M_i\}_{i=1}^m$ имеет n-мерное неразличимое подпространство тогда и только тогда, когда одношаговая квантовая пропускная способность с нулевой ошибкой комплементарного канала к каналу (37) не меньше чем $\log n$, в частности, наблюдаемая $\mathcal{M}$ не имеет неразличимых подпространств тогда и только тогда, когда данная пропускная способность равна нулю. Это следует из леммы 1 и предложения 1, поскольку множество значений двойственного канала к каналу (37) совпадает с подпространством в $\mathfrak{B}(\mathcal{H}_A)$, порожденным семейством операторов $\{M_i\}_{i=1}^m$.

Из этого замечания непосредственно следует, что (ii) $\Rightarrow$ (i).

(i) $\Rightarrow$ (ii). В силу доказательства предложения 2 из [7] существуют базисы $\{A_i^1\}_{i=1}^{m_1}$ и $\{A_i^2\}_{i=1}^{m_2}$ подпространств $\mathcal{G}(\Phi_1)$ и $\mathcal{G}(\Phi_2)$, состоящие из положительных операторов, таких что $\sum_{i=1}^{m_1} A_i^1 = I_{\mathcal{H}_A^1}$ и $\sum_{i=1}^{m_2} A_i^2 = I_{\mathcal{H}_A^2}$. Рассматривая эти базисы как наблюдае-

[4] Если $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ – неразличимые подпространства для наблюдаемых $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$, то легко видеть, что $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ – неразличимое подпространство для наблюдаемой $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$, но при этом у наблюдаемой $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$ могут быть *сцепленные* неразличимые подпространства.

мые $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ и используя приведенное выше замечание, нетрудно показать выполнимость (ii). ▲

Замечание 3. Приведенное выше доказательство показывает, что импликация (ii) $\Rightarrow$ (i) в предложении 2 имеет место и для бесконечномерных гильбертовых пространств $\mathcal{H}_A^1, \mathcal{H}_A^2$ и $n \leqslant \infty$. Соответствующее обобщение импликации (i) $\Rightarrow$ (ii) нетрудно получить, если некоммутативные графы $\mathcal{G}(\Phi_1), \mathcal{G}(\Phi_2)$ сепарабельны (по операторной норме). Для этого вместо предложения 2 из [7] надо использовать рассуждение, приведенное в конце доказательства теоремы 2.

Предложение 2 и следствие 1 дают следующий результат.

Следствие 2. *Существует квантовая наблюдаемая $\mathcal{M} = \{M_i\}_{i=1}^5$ в четырехмерном гильбертовом пространстве, не имеющая неразличимых подпространств, такая что наблюдаемая $\mathcal{M} \otimes \mathcal{M}$ имеет непрерывное семейство двумерных неразличимых подпространств.*

Явный пример такой наблюдаемой $\mathcal{M}$ дает разложение единицы $\{A_i\}_{i=1}^5$, представленное после следствия 1. В этом случае каждое двумерное подпространство в $\mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{C}^4$, порожденное векторами (10), является неразличимым для $\mathcal{M} \otimes \mathcal{M}$.

Из предложения 2 (вместе с замечанием 3) и теоремы 2 вытекает следующее наблюдение.

Следствие 3. *Пусть $n \in \mathbb{N}$ или $n = +\infty$. Существует квантовая наблюдаемая $\mathcal{M} = \{M_i\}_{i=1}^{n^2-n+4}$ в $2n$-мерном гильбертовом пространстве, не имеющая неразличимых подпространств, такая что наблюдаемая $\mathcal{M} \otimes \mathcal{M}$ имеет непрерывное семейство n-мерных неразличимых подпространств.*[5]

Замечание 4. Рассмотренный выше эффект появления (сцепленных) неразличимых подпространств у тензорного произведения двух наблюдаемых $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$, не имеющих неразличимых подпространств, *не имеет места для точных наблюдаемых* $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ (поскольку тензорное произведение двух наблюдаемых, состоящих из взаимно ортогональных проекторов ранга 1 – это наблюдаемая, состоящих из взаимно ортогональных проекторов ранга 1).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Представление Крауса квантового канала с заданным некоммутативным графом. Модификацией следствия 1 из [7] является следующее

Предложение 3. *Пусть $\mathfrak{L}$ – подпространство в $\mathfrak{M}_n$, $n \geqslant 2$, удовлетворяющее условию* (7), *а $\{A_i\}_{i=1}^d$ – базис в $\mathfrak{L}$, такой что $A_i \geqslant 0$ для всех i и $\sum_{i=1}^d A_i = I_n$.*[6] *Пусть m – натуральное число, удовлетворяющее неравенству $d = \dim \mathfrak{L} \leqslant m^2$, а $\{|\psi_i\rangle\}_{i=1}^d$ – такой набор единичных векторов из $\mathbb{C}^m$, что $\{|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\}_{i=1}^d$ – линейно независимый набор матриц в $\mathfrak{M}_m$.*

При каждом $k = \overline{1,m}$ пусть V_k – линейный оператор из $\mathcal{H}_A \doteq \mathbb{C}^n$ в пространство $\mathcal{H}_B \doteq \bigoplus_{i=1}^d \mathbb{C}^{r_i}$, где $r_i = \operatorname{rank} A_i$, определяемый формулой

$$V_k = \sum_{i=1}^d \langle k|\psi_i\rangle W_i A_i^{1/2},$$

[5] Если $n = +\infty$, то $n^2 - n + 4 = +\infty$, а под n-мерным гильбертовым пространством (подпространством) следует понимать сепарабельное гильбертово пространство (подпространство).

[6] Существование базиса $\{A_i\}_{i=1}^d$ с указанными свойствами для любого подпространства $\mathfrak{L}$, удовлетворяющего условию (7), показано в доказательстве предложения 2 из [7].

где $\{|k\rangle\}$ – канонический базис в $\mathbb{C}^m$, а W_i – частичная изометрия из $\mathcal{H}_A$ в $\mathcal{H}_B$ с начальным подпространством $\operatorname{Ran} A_i$ *и конечным подпространством $\mathbb{C}^{r_i}$. Тогда канал*

$$\mathfrak{M}_n \ni \rho \mapsto \Phi(\rho) = \sum_{k=1}^{m} V_k \rho V_k^* \in \mathfrak{M}_{r_1+\ldots+r_d} \tag{38}$$

является псевдодиагональным, и его некоммутативный граф $\mathcal{G}(\Phi)$ совпадает с $\mathfrak{L}$.

Доказательство. В доказательстве следствия 1 из [7] показано, что канал

$$\mathfrak{M}_n \ni \rho \mapsto \Psi(\rho) = \sum_{i=1}^{d} [\operatorname{Tr} A_i \rho] |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \in \mathfrak{M}_m$$

имеет представление Стайнспринга

$$\Psi(\rho) = \operatorname{Tr}_{\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^d} V \rho V^*,$$

где

$$V : |\varphi\rangle \mapsto \sum_{i=1}^{d} A_i^{1/2} |\varphi\rangle \otimes |i\rangle \otimes |\psi_i\rangle$$

– изометрия из $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^m$ (здесь $\{|i\rangle\}$ – канонический базис в $\mathbb{C}^d$).

Поскольку Ψ – канал, разрушающий сцепленность, и $\Psi^*(\mathfrak{M}_m) = \mathfrak{L}$, комплементарный канал

$$\widehat{\Psi}(\rho) = \operatorname{Tr}_{\mathbb{C}^m} V \rho V^*$$

является псевдодиагональным (см. [11]), и $\mathcal{G}(\widehat{\Psi}) = \mathfrak{L}$. Его представление Крауса имеет вид $\widehat{\Psi}(\rho) = \sum\limits_{k=1}^{m} \widetilde{V}_k \rho \widetilde{V}_k^*$, где операторы $\widetilde{V}_k$ определяются соотношением

$$\langle\phi|\widetilde{V}_k \varphi\rangle = \langle\phi \otimes k | V\varphi\rangle, \quad \varphi \in \mathbb{C}^n, \quad \phi \in \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^d,$$

так что

$$\widetilde{V}_k |\varphi\rangle = \sum_{i=1}^{d} \langle k|\psi_i\rangle A_i^{1/2} |\varphi\rangle \otimes |i\rangle.$$

Отождествляя $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^d$ с $\bigoplus\limits_{i=1}^{d} \mathbb{C}^n$, нетрудно показать, что канал Φ, определенный в (38), изометрически эквивалентен каналу $\widehat{\Psi}$ (см. [8, Приложение]), и следовательно, $\mathcal{G}(\Phi) = \mathcal{G}(\widehat{\Psi}) = \mathfrak{L}$.

Авторы благодарны А.С. Холево и участникам семинара “Квантовая вероятность, статистика, информация” (Математический институт им. В.А. Стеклова РАН) за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Холево А.С.* Квантовые системы, каналы, информация. М.: МЦНМО, 2010.
2. *Нильсен М.А., Чанг И.* Квантовые вычисления и квантовая информация. М.: Мир, 2006.
3. *Smith G., Yard J.* Quantum Comminication with Zero-Capacity Channels // Science. 2008. V. 321. № 5897. P. 1812–1815.

4. *Cubitt T.S., Chen J., Harrow A.W.* Superactivation of the Asymptotic Zero-Error Classical Capacity of a Quantum Channel // IEEE Trans. Inform. Theory. 2011. V. 57. № 2. P. 8114–8126.
5. *Cubitt T.S., Smith G.* An Extreme Form of Superactivation for Quantum Zero-Error Capacities // IEEE Trans. Inform. Theory. 2012. V. 58. № 3. P. 1953–1961.
6. *Duan R.* Superactivation of Zero-Error Capacity of Noisy Quantum Channels // `arXiv: 0906.2527 [quant-ph]`, 2009.
7. *Shirokov M.E., Shulman T.V.* On Superactivation of Zero-Error Capacities and Reversibility of a Quantum Channel // `arXiv:1309.2610v5 [quant-ph]`, 2013.
8. *Холево А.С.* Комплементарные каналы и проблема аддитивности // Теория вероятностей и ее применения. 2006. Т. 51. № 1. С. 133–143.
9. *Duan R., Severini S., Winter A.* Zero-Error Communication via Quantum Channels, Noncommutative Graphs, and a Quantum Lovász Number // IEEE Trans. Inform. Theory. 2013. V. 59. № 2. P. 1164–1174.
10. *Medeiros R.A.C., de Assis F.M.* Quantum Zero-Error Capacity // Int. J. Quantum Inform. 2005. V. 3. № 1. P. 135–139.
11. *Cubitt T.S., Ruskai M.B., Smith G.* The Structure of Degradable Quantum Channels // J. Math. Phys. 2008. V. 49. № 10. P. 102104 (27).
12. *Busch P.* Informationally Complete Sets of Physical Quantities // Int. J. Theor. Phys. 1991. V. 30. № 9. P. 1217–1227.
13. *Carmeli C., Heinosaari T., Schultz J., Toigo A.* Tasks and Premises in Quantum State Determination // J. Phys. A. 2014. V. 47. № 7. P. 075302 (24).
14. *Prugovečki E.* Information-Theoretical Aspects of Quantum Measurement // Int. J. Theor. Phys. 1977. V. 16. № 5. P. 321–331.

Широков Максим Евгеньевич
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
msh@mi.ras.ru
Шульман Татьяна Викторовна
Университет Копенгагена, Дания
shulman@math.ku.dk

Поступила в редакцию
03.03.2014