ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том 44 **2008** **Вып. 2**

УДК 621.391.1

© 2008 г. **М.Е. Широков, А.С. Холево**

ОБ АППРОКСИМАЦИИ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ КВАНТОВЫХ КАНАЛОВ[1]

Развит аппроксимативный метод изучения бесконечномерных квантовых каналов, который основан на исследовании свойств непрерывности энтропийных характеристик квантовых каналов и операций (вполне положительных, не увеличивающих след отображений), рассматриваемых как функции пары "канал, входное состояние". Полученные результаты применяются для нахождения достаточных условий непрерывности χ-пропускной способности как функции канала, доказательства сильной аддитивности χ-пропускной способности для определенного класса бесконечномерных каналов и аппроксимативного представления выпуклого замыкания выходной энтропии произвольного квантового канала.

§ 1. Введение

До недавнего времени в квантовой теории информации основное внимание уделялось конечномерным системам, однако в последние годы возрастает интерес и к бесконечномерным квантовым каналам (см. [1–7 и библиографию в них]). С точки зрения общей теории существенной особенностью бесконечномерных каналов является неограниченность и разрывность основных энтропийных характеристик, исключающие прямолинейное обобщение результатов конечномерной теории. Один из подходов к изучению бесконечномерных каналов состоит в надлежащей аппроксимации их каналами с непрерывными характеристиками (например, с конечномерным выходным пространством). Такой подход (неявно) был использован в работе [5], где с его помощью была установлена сильная аддитивность пропускной способности Холево (в дальнейшем называемой *χ-пропускной способностью*) для некоторых классов бесконечномерных каналов, а также показано, что выполнимость конечномерной гипотезы аддитивности влечет сильную аддитивность χ-пропускной способности для всех бесконечномерных каналов.

В настоящей статье развит аппроксимативный метод изучения свойств квантовых каналов, связанных с классической пропускной способностью, который основан на исследовании свойств непрерывности энтропийных характеристик как функций пары "канал, входное состояние". При этом оказывается, что часто канал удобно аппроксимировать *операциями* – линейными вполне положительными отображениями, не увеличивающими след (с точки зрения некоммутативной теории операция – это субмарковское отображение, тогда как канал – марковское). Таким образом, оказывается необходимым расширить определения энтропийных характеристик и исследовать их свойства непрерывности в этом расширенном контексте. В § 2 формулируются основные определения и некоторые результаты предыдущих работ, ис-

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (номер проекта 06-01-00164-а) и Совета поддержки школ при президенте РФ (номер проекта НШ-4129.2006.1).

пользуемые в данной статье. В § 3 вводится топология сильной сходимости на множестве всех квантовых операций, которая оказывается подходящей для целей аппроксимации. Показано, что именно в этой топологии известный изоморфизм Чоя – Ямилковского, сопоставляющий каналам состояния расширенной системы, оказывается гомеоморфизмом. С его помощью получен простой критерий компактности для подмножеств квантовых операций. В § 4 исследованы свойства непрерывности выпуклого замыкания выходной энтропии и χ-пропускной способности с ограничениями, получены достаточные условия непрерывности. В § 5 эти результаты применяются для решения вопросов о

1) непрерывности χ-пропускной способности как функции канала;
2) сильной аддитивности χ-пропускной способности бесконечномерных квантовых каналов;
3) аппроксимативном представлении выпуклого замыкания выходной энтропии произвольного квантового канала.

Таким образом, предложенный метод аппроксимации бесконечномерных каналов операциями в топологии сильной сходимости оказывается полезным инструментом изучения характеристик, связанных с классической пропускной способностью. В дальнейшем предполагается рассмотреть его применения к изучению других характеристик, таких как классическая пропускная способность с использованием сцепленного состояния и квантовая пропускная способность.

§ 2. Вводные понятия

Пусть $\mathcal{H}$ – сепарабельное гильбертово пространство, $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ – алгебра ограниченных операторов в $\mathcal{H}$, $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$ – банахово пространство ядерных операторов со следовой нормой $\|\cdot\|_1$.

Пусть

$$\mathfrak{T}_1(\mathcal{H}) = \{A \in \mathfrak{T}(\mathcal{H}) \mid A \geq 0, \operatorname{Tr} A \leq 1\} \quad \text{и} \quad \mathfrak{S}(\mathcal{H}) = \{A \in \mathfrak{T}_1(\mathcal{H}) \mid \operatorname{Tr} A = 1\}$$

– замкнутые выпуклые подмножества множества $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$, которые являются полными сепарабельными пространствами с метрикой, определяемой следовой нормой. Операторы из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ называются операторами плотности. Каждый оператор плотности определяет нормальное состояние на $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ (см. [8]), поэтому в дальнейшем будем его называть состоянием.

Пусть $\operatorname{co}\mathcal{A}$ (соответственно, $\overline{\operatorname{co}}\,\mathcal{A}$) – выпуклая оболочка (соответственно, выпуклое замыкание) множества $\mathcal{A}$ и $\operatorname{co} f$ (соответственно, $\overline{\operatorname{co}}\, f$) – выпуклая оболочка (соответственно, выпуклое замыкание) функции f [9]. Множество крайних точек выпуклого множества $\mathcal{A}$ обозначим $\operatorname{extr}\mathcal{A}$.

Пусть $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ – множество всех борелевских вероятностных мер на полном сепарабельном метрическом пространстве $\mathcal{A}$, снабженное топологией слабой сходимости [10, 11]. Это множество можно считать полным сепарабельным метрическим пространством [11]. Подмножество множества $\mathcal{P}(\mathcal{A})$, состоящее из мер с конечным носителем, обозначим $\mathcal{P}^{\mathrm{f}}(\mathcal{A})$. Далее будем использовать сокращения $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$ и $\widehat{\mathcal{P}} = \mathcal{P}(\operatorname{extr}\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$.

Барицентр меры $\mu \in \mathcal{P}$ – это состояние, определяемое интегралом Бохнера

$$\overline{\rho}(\mu) = \int\limits_{\mathfrak{S}(\mathcal{H})} \sigma\mu(d\sigma).$$

Для произвольного подмножества $\mathcal{A} \subset \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ пусть $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ (соответственно, $\widehat{\mathcal{P}}_{\mathcal{A}}$) – подмножество $\mathcal{P}$ (соответственно, $\widehat{\mathcal{P}}$), состоящее из всех мер с барицентром в $\mathcal{A}$.

Набор состояний $\{\rho_i\}$ с соответствующим расределением вероятностей $\{\pi_i\}$ традиционно называется *ансамблем* и обозначается $\{\pi_i, \rho_i\}$. Далее будем рассматривать ансамбль как частный случай вероятностной меры. Таким образом, запись $\{\pi_i, \rho_i\} \in \mathcal{P}_{\{\rho\}}$ означает, что $\rho = \sum\limits_i \pi_i \rho_i$.

Будем использовать следующие два расширения энтропии фон Неймана $S(\rho) = -\operatorname{Tr}\rho\log\rho$ состояния ρ на множество $\mathfrak{T}_1(\mathcal{H})$ (см. [12]):

$$S(A) = -\operatorname{Tr} A \log A \quad \text{и} \quad H(A) = S(A) - \eta(\operatorname{Tr} A), \quad \forall A \in \mathfrak{T}_1(\mathcal{H}),$$

где $\eta(x) = -x\log x$.

Из неотрицательности, вогнутости и полунепрерывности снизу энтропии фон Неймана S на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ следуют соответствующие свойства функций S и H на множестве $\mathfrak{T}_1(\mathcal{H})$. Из определений и известных свойств энтропии фон Неймана (см. [13]) нетрудно вывести следующие утверждения:

$$H(\lambda A) = \lambda H(A), \quad A \in \mathfrak{T}_1(\mathcal{H}),\ \lambda \geq 0, \tag{1}$$

$$H(A) + H(B-A) \leq H(B) \leq H(A) + H(B-A) + \operatorname{Tr} B h_2\left(\frac{\operatorname{Tr} A}{\operatorname{Tr} B}\right), \tag{2}$$

где $A, B \in \mathfrak{T}_1(\mathcal{H})$, $A \leq B$, и $h_2(x) = \eta(x) + \eta(1-x)$.

Из свойства субаддитивности энтропии фон Неймана следует неравенство

$$S(C) \leq S(\operatorname{Tr}_{\mathcal{H}} C) + S(\operatorname{Tr}_{\mathcal{K}} C) - \eta(\operatorname{Tr} C), \quad \forall C \in \mathfrak{T}_1(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}). \tag{3}$$

Относительная энтропия операторов A и B из $\mathfrak{T}_1(\mathcal{H})$ определяется выражением (см. [12])

$$H(A\,\|B) = \sum_i \langle i|\,(A\log A - A\log B + B - A)\,|i\rangle,$$

где $\{|i\rangle\}$ – ортонормированный базис из собственных векторов оператора A.

Пусть $\mathcal{H}, \mathcal{H}'$ – пара сепарабельных гильбертовых пространств, которые будем называть, соответственно, входным и выходным пространствами. Квантовая операция Φ – это линейное положительное не увеличивающее след отображение из $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$ в $\mathfrak{T}(\mathcal{H}')$, такое что двойственное отображение Φ^*: $\mathfrak{B}(\mathcal{H}') \mapsto \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ вполне положительно [8]. Выпуклое множество всех квантовых операций из $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$ в $\mathfrak{T}(\mathcal{H}')$ обозначим $\mathfrak{F}_{\leq 1}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$. Если отображение Φ сохраняет след, оно называется квантовым каналом. Выпуклое множество всех каналов из $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$ в $\mathfrak{T}(\mathcal{H}')$ обозначим $\mathfrak{F}_{=1}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$.

Поскольку функции $\rho \mapsto H_\Phi(\rho) = H(\Phi(\rho))$, $\rho \mapsto S_\Phi(\rho) = S(\Phi(\rho))$ и $\rho \mapsto H(\Phi(\rho)\|A)$, где Φ – заданная квантовая операция из $\mathfrak{F}_{\leq 1}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ и A – заданный оператор из $\mathfrak{T}_1(\mathcal{H})$, неотрицательны и полунепрерывны снизу на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, функционалы

$$\widehat{H}_\Phi(\mu) = \int\limits_{\mathfrak{S}(\mathcal{H})} H_\Phi(\rho)\mu(d\rho), \quad \widehat{S}_\Phi(\mu) = \int\limits_{\mathfrak{S}(\mathcal{H})} S_\Phi(\rho)\mu(d\rho)$$

и

$$\chi_\Phi(\mu) = \int\limits_{\mathfrak{S}(\mathcal{H})} H(\Phi(\rho)\|\Phi(\overline{\rho}(\mu)))\mu(d\rho)$$

корректно определены на множестве $\mathcal{P}$.

П р е д л о ж е н и е 1. *Функционалы* $\widehat{H}_\Phi(\mu)$, $\widehat{S}_\Phi(\mu)$ *и* $\chi_\Phi(\mu)$ *полунепрерывны снизу на множестве* $\mathcal{P}$. *Если* $S_\Phi(\overline{\rho}(\mu)) < +\infty$, *то*

$$\chi_\Phi(\mu) = S_\Phi(\overline{\rho}(\mu)) - \widehat{S}_\Phi(\mu). \tag{4}$$

Это предложение можно доказать, очевидным образом модифицируя рассуждение в доказательстве предложения 1 из [3].

С л е д с т в и е 1. *Пусть* $\mathcal{P}_0$ – *такое подмножество множества* $\mathcal{P}$, *что функция* S_Φ *непрерывна на множестве* $\{\overline{\rho}(\mu)\}_{\mu\in\mathcal{P}_0}$. *Тогда функционалы* $\widehat{H}_\Phi(\mu)$, $\widehat{S}_\Phi(\mu)$ *и* $\chi_\Phi(\mu)$ *непрерывны на множестве* $\mathcal{P}_0$.

Следствие 1, в частности, гарантирует непрерывность функционалов $\widehat{H}_\Phi(\mu)$, $\widehat{S}_\Phi(\mu)$ и $\chi_\Phi(\mu)$ на множестве $\mathcal{P}_{\{\rho\}}$, если $S_\Phi(\rho) < +\infty$.

Важная характеристика квантового канала Φ – это выпуклое замыкание $\overline{\mathrm{co}}\, H_\Phi$ выходной энтропии $H_\Phi (= S_\Phi)$ [7]. В данной статье рассматриваются выпуклые замыкания $\overline{\mathrm{co}}\, H_\Phi$ и $\overline{\mathrm{co}}\, S_\Phi$ функций H_Φ и S_Φ, соответственно, для произвольной квантовой операции Φ из $\mathfrak{F}_{\leq 1}(\mathcal{H},\mathcal{H}')$.

П р е д л о ж е н и е 2. *Пусть* Φ – *произвольная квантовая операция из* $\mathfrak{F}_{\leq 1}(\mathcal{H},\mathcal{H}')$ *и* ρ – *произвольное состояние из* $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$.

А) *Имеют место выражения*

$$\overline{\mathrm{co}}\, H_\Phi(\rho) = \inf_{\mu\in\mathcal{P}_{\{\rho\}}} \widehat{H}_\Phi(\mu) = \inf_{\mu\in\widehat{\mathcal{P}}_{\{\rho\}}} \widehat{H}_\Phi(\mu) \tag{5}$$

и

$$\overline{\mathrm{co}}\, S_\Phi(\rho) = \inf_{\mu\in\mathcal{P}_{\{\rho\}}} \widehat{S}_\Phi(\mu) = \inf_{\mu\in\widehat{\mathcal{P}}_{\{\rho\}}} \widehat{S}_\Phi(\mu). \tag{6}$$

Точные нижние грани в этих выражениях достигаются на некоторых мерах из $\widehat{\mathcal{P}}_{\{\rho\}}$.

Б) *Имеют место неравенства*

$$\overline{\mathrm{co}}\, H_\Phi(\rho) \leq \overline{\mathrm{co}}\, S_\Phi(\rho) \leq \overline{\mathrm{co}}\, H_\Phi(\rho) + \eta(\mathrm{Tr}\,\Phi(\rho)).$$

В) *Если* $\overline{\mathrm{co}}\, S_\Phi(\rho) < +\infty$, *то*

$$\{S_\Phi(\rho) < +\infty\} \Leftrightarrow \{\overline{\mathrm{co}}\, S_\Phi(\rho) = \mathrm{co}\, S_\Phi(\rho)\},$$

где $\mathrm{co}\, S_\Phi$ – *выпуклая оболочка функции* S_Φ, *определяемая выражением*

$$\mathrm{co}\, S_\Phi(\rho) = \inf_{\{\pi_i,\rho_i\}\in\mathcal{P}^{\mathrm{f}}_{\{\rho\}}} \sum_i \pi_i S_\Phi(\rho_i).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Все утверждения в п. А) следуют из теоремы 1 работы [14].

Неравенства в п. Б) легко выводятся с помощью выражений в п. А) и вогнутости функции η.

Импликация $\Rightarrow$ в п. В) следует из леммы 1 работы [3] и следствия 1. Поскольку множество всех состояний ρ с конечным значением $S_\Phi(\rho)$ выпукло, из $S_\Phi(\rho) = +\infty$ следует $\mathrm{co}\, S_\Phi(\rho) = +\infty$. Это наблюдение доказывает импликацию $\Leftarrow$ в п. В). ▲

Напомним, что χ-функция канала Φ определяется выражением (см. [15, 3])

$$\chi_\Phi(\rho) = \sup_{\{\pi_i,\rho_i\}\in\mathcal{P}^{\mathrm{f}}_{\{\rho\}}} \chi_\Phi(\{\pi_i,\rho_i\}) = \sup_{\mu\in\mathcal{P}_{\{\rho\}}} \chi_\Phi(\mu), \tag{7}$$

где последнее равенство следует из полунепрерывности снизу функционала χ_Φ и леммы 1 из [3].

В данной статье рассматривается χ-функция произвольной квантовой операции Φ из $\mathfrak{F}_{\leq 1}(\mathcal{H},\mathcal{H}')$. Используя предложения 1 и 2, нетрудно вывести из (7), что

$$\chi_\Phi(\rho) = S_\Phi(\rho) - \operatorname{co} S_\Phi(\rho) = S_\Phi(\rho) - \overline{\operatorname{co}}\, S_\Phi(\rho) \tag{8}$$

для произвольного состояния $\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$, такого что $S_\Phi(\rho) < +\infty$.

§ 3. Топология сильной сходимости

Множество $\mathfrak{F}_{\leq 1}(\mathcal{H},\mathcal{H}')$ всех квантовых операций из $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$ в $\mathfrak{T}(\mathcal{H}')$ можно снабдить различными топологиями, например, топологией *равномерной сходимости*, задаваемой метрикой

$$d(\Phi,\Psi) = \sup_{\rho\in\mathfrak{S}(\mathcal{H})} \|\Phi(\rho)-\Psi(\rho)\|_1,$$

или топологией, задаваемой нормой полной ограниченности [16].

Однако для аппроксимации произвольного квантового канала последовательностью квантовых операций с "гладкими характеристиками" удобно использовать более слабую топологию *сильной сходимости* на множестве $\mathfrak{F}_{\leq 1}(\mathcal{H},\mathcal{H}')$, порожденную сильной операторной топологией на множестве всех линейных ограниченных операторов из банахового пространства $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$ в $\mathfrak{T}(\mathcal{H}')$. Сильная сходимость последовательности $\{\Phi_n\} \subset \mathfrak{F}_{\leq 1}(\mathcal{H},\mathcal{H}')$ к квантовой операции $\Phi_0 \in \mathfrak{F}_{\leq 1}(\mathcal{H},\mathcal{H}')$ означает, что

$$\lim_{n\to+\infty} \Phi_n(\rho) = \Phi_0(\rho), \quad \forall \rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}).$$

Далее множество $\mathfrak{F}_{\leq 1}(\mathcal{H},\mathcal{H}')$ рассматривается как пространство с топологией сильной сходимости. Из сепарабельности множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ следует метризуемость топологического пространства $\mathfrak{F}_{\leq 1}(\mathcal{H},\mathcal{H}')$.

Замечание 1. Поскольку операторная норма любой квантовой операции из $\mathfrak{F}_{\leq 1}(\mathcal{H},\mathcal{H}')$ не превосходит 1, легко видеть, что топология сильной сходимости на множестве $\mathfrak{F}_{\leq 1}(\mathcal{H},\mathcal{H}')$ совпадает с топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$. ▲

Преимущество топологии сильной сходимости состоит в возможности аппроксимации произвольного канала Φ из $\mathfrak{F}_{=1}(\mathcal{H},\mathcal{H}')$ последовательностью квантовых операций с конечномерным выходным пространством, например, последовательностью $\{\Phi_n(\cdot) = P_n\Phi(\cdot)P_n\}$, где $\{P_n\}$ – произвольная последовательность проекторов конечного ранга из $\mathfrak{B}(\mathcal{H}')$, возрастающая к единичному оператору $I_{\mathcal{H}'}$ в сильной операторной топологии.

Следующее предложение показывает, что именно топология сильной сходимости делает множество всех операций гомеоморфным некоторому подмножеству ядерных операторов в пространстве составной системы (обобщенный изоморфизм Чоя – Ямилковского [17]).

Для заданного состояния полного ранга $\sigma = \sum_i \lambda_i |i\rangle\langle i|$ из $\mathfrak{S}(\mathcal{K})$ пусть $\mathfrak{T}(\sigma)$ – замкнутое подмножество множества $\mathfrak{T}_1(\mathcal{K})$, состоящее из всех операторов A, таких что $\left\|\dfrac{\langle i|A|j\rangle}{\sqrt{\lambda_i\lambda_j}}\right\| \leq E$, где E – единичная матрица (это означает, что $\sum_{i,j} \dfrac{\langle i|A|j\rangle}{\sqrt{\lambda_i\lambda_j}}|i\rangle\langle j| \leq I_{\mathcal{K}}$).

П р е д л о ж е н и е 3. *Пусть $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}'$ и $\mathcal{K}$ – сепарабельные гильбертовы пространства, а $|\Omega\rangle$ – единичный вектор из $\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}$, такой что $\sigma = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}|\Omega\rangle\langle\Omega|$ – состояние полного ранга в $\mathfrak{S}(\mathcal{K})$. Тогда отображение*

$$\mathfrak{Y}\colon \Phi \mapsto A_\Phi = \Phi\otimes\mathrm{Id}(|\Omega\rangle\langle\Omega|)$$

является гомеоморфизмом из $\mathfrak{F}_{\leq 1}(\mathcal{H},\mathcal{H}')$ на подмножество

$$\mathfrak{T}_1(\mathcal{H}')\otimes\mathfrak{T}(\sigma) = \{A\in\mathfrak{T}_1(\mathcal{H}'\otimes\mathcal{K})\,|\,\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}'}A\in\mathfrak{T}(\sigma)\}.$$

Сужение отображения $\mathfrak{Y}$ на множество $\mathfrak{F}_{=1}(\mathcal{H},\mathcal{H}')$ каналов является гомеоморфизмом из $\mathfrak{F}_{=1}(\mathcal{H},\mathcal{H}')$ на подмножество

$$\mathfrak{S}(\mathcal{H}')\otimes\{\sigma\} = \{\omega\in\mathfrak{S}(\mathcal{H}'\otimes\mathcal{K})\,|\,\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}'}\omega = \sigma\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Второе утверждение предложения следует из первого.

Пусть $\sigma = \sum_i \lambda_i|i\rangle\langle i|$ и $|\Omega\rangle = \sum_i \sqrt{\lambda_i}|i\rangle\otimes|i\rangle$, где $\{|i\rangle\}$ – ортонормированный базис в $\mathcal{H}\cong\mathcal{H}'\cong\mathcal{K}$.

Пусть $\Phi(\cdot) = \sum_k V_k(\cdot)V_k^*$ – квантовая операция из $\mathfrak{F}_{\leq 1}(\mathcal{H},\mathcal{H}')$, что означает $\sum_k V_k^*V_k \leq I_{\mathcal{H}}$. Имеем

$$\langle i|\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}'}\Phi\otimes\mathrm{Id}(|\Omega\rangle\langle\Omega|)|j\rangle = \sqrt{\lambda_i\lambda_j}\mathrm{Tr}\,\Phi(|i\rangle\langle j|) = \sqrt{\lambda_i\lambda_j}\langle j|\sum_k V_k^*V_k|i\rangle.$$

Поэтому $\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}'}\Phi\otimes\mathrm{Id}(|\Omega\rangle\langle\Omega|)\in\mathfrak{T}(\sigma)$.

Ясно, что отображение $\mathfrak{Y}$ непрерывно. Оно является инъективным, поскольку

$$\Phi\otimes\mathrm{Id}(|\Omega\rangle\langle\Omega|) = \sum_{i,j}\sqrt{\lambda_i\lambda_j}\Phi(|i\rangle\langle j|)\otimes|i\rangle\langle j|, \tag{9}$$

и следовательно, оператор $\Phi\otimes\mathrm{Id}(|\Omega\rangle\langle\Omega|)$ однозначно определяет действие квантовой операции Φ на операторы $|i\rangle\langle j|$ для всех i и j. Обобщая на бесконечномерный случай рассуждение из [18], покажем, что для каждого оператора A из $\mathfrak{T}_1(\mathcal{H}')\otimes\mathfrak{T}(\sigma)$ существует квантовая операция Φ_A из $\mathfrak{F}_{\leq 1}(\mathcal{H},\mathcal{H}')$, такая что $A = \mathfrak{Y}(\Phi_A)$.

Пусть $A = \sum_k \pi_k|\psi_k\rangle\langle\psi_k|$, где $|\psi_k\rangle = \sum_{i,j} c_{ij}^k|i\rangle\otimes|j\rangle$ – единичный вектор в $\mathcal{H}'\otimes\mathcal{K}$ при каждом k. Пусть $\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}'}A = \sum_{i,j} a_{ij}|i\rangle\langle j|$. Из равенства

$$\sum_{i,j} a_{ij}|i\rangle\langle j| = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}'}A = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}'}\sum_{k,i,j,p,t}\pi_k c_{ij}^k\overline{c_{pt}^k}|i\rangle\langle p|\otimes|j\rangle\langle t| = \sum_{k,i,j,t}\pi_k c_{ij}^k\overline{c_{it}^k}|j\rangle\langle t|$$

следует, что

$$\sum_{k,i}\pi_k c_{ij}^k\overline{c_{it}^k} = a_{jt}, \quad \forall j,t, \tag{10}$$

в частности,

$$\sum_{k,i}\pi_k|c_{ij}^k|^2 = a_{jj}, \quad \forall j. \tag{11}$$

Используя условие $\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}'}A \in \mathfrak{T}(\sigma)$ и равенство (11), нетрудно показать, что $\pi_k \sum_t |c_{ti}^k|^2 \le \lambda_i$ при всех i и k. Поэтому при каждом k можно ввести ограниченный оператор V_k из $\mathcal{H}$ в $\mathcal{H}'$, определяя его действие на векторы $\{|i\rangle\}$ следующим образом:

$$V_k|i\rangle = \sqrt{\frac{\pi_k}{\lambda_i}} \sum_t c_{ti}^k |t\rangle.$$

Непосредственная проверка показывает, что

$$A = \sum_k V_k \otimes I_{\mathcal{K}} \,|\Omega\rangle\langle\Omega|\, V_k^* \otimes I_{\mathcal{K}} = \Phi_A \otimes \mathrm{Id}(|\Omega\rangle\langle\Omega|),$$

где $\Phi_A(\cdot) = \sum_k V_k(\cdot)V_k^*$ – вполне положительное отображение из $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$ в $\mathfrak{T}(\mathcal{H}')$.

Из равенства (10) следует, что $\langle j| \sum_k V_k^* V_k |i\rangle = \dfrac{a_{ij}}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}}$. Поэтому условие $\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}'}A \in$ $\in \mathfrak{T}(\sigma)$ равносильно неравенству $\sum_k V_k^* V_k \le I_{\mathcal{H}}$, которое означает, что $\Phi_A \in \mathfrak{F}_{\le 1}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$.

Для завершения доказательства необходимо показать открытость отображения $\mathfrak{Y}$. Используя выражение (9), нетрудно видеть, что для любой последовательности $\{A_n\}$ операторов из $\mathfrak{T}_1(\mathcal{H}') \otimes \mathfrak{T}(\sigma)$, сходящейся к оператору A_0, последовательность $\{\Phi_{A_n}(|i\rangle\langle j|)\}$ ядерных операторов сходится к оператору $\Phi_{A_0}(|i\rangle\langle j|)$ (в топологии следовой нормы) для всех i и j. Поскольку операторная норма квантовой операции из $\mathfrak{F}_{\le 1}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ не превосходит 1, это гарантирует сильную сходимость последовательности $\{\Phi_{A_n}\}$ к квантовой операции Φ_{A_0}. ▲

Замечание 2. Из доказательства предложения 3 следует, что в бесконечномерном случае множество *всех* вполне положительных отображений не изоморфно множеству состояний составной квантовой системы, в отличие от конечномерного случая (см. [18]). ▲

Предложение 3 позволяет исследовать свойства подмножеств квантовых операций (соответственно, каналов), отождествляя эти подмножества с подмножествами ядерных операторов (соответственно, состояний). Например, это предложение показывает, что множество $\mathfrak{F}_{\sigma \mapsto \rho}$ всех каналов, преобразующих заданное состояние полного ранга σ в заданное произвольное состояние ρ, изоморфно множеству $C(\rho, \sigma)$ всех состояний ω из $\mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}')$, таких что $\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}'}\omega = \sigma$ и $\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\omega = \rho$.

С помощью предложения 3 легко доказать следующий критерий компактности для подмножеств квантовых операций в топологии сильной сходимости.

Следствие 2. 1) *Подмножество $\mathfrak{F}_0 \subseteq \mathfrak{F}_{\le 1}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ компактно, если существует такое состояние полного ранга σ из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, что $\{\Phi(\sigma)\}_{\Phi \in \mathfrak{F}_0}$ – компактное подмножество множества $\mathfrak{T}_1(\mathcal{H}')$.*

2) *Если подмножество $\mathfrak{F}_0 \subseteq \mathfrak{F}_{\le 1}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ компактно, то подмножество $\{\Phi(\sigma)\}_{\Phi \in \mathfrak{F}_0}$ множества $\mathfrak{T}_1(\mathcal{H}')$ является компактным для любого состояния σ из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$.*

Доказательство. 1) Для произвольного состояния $\sigma = \sum_i \lambda_i |i\rangle\langle i|$ из $\mathfrak{S}(\mathcal{K})$ множество $\mathfrak{T}(\sigma)$ является компактным подмножеством множества $\mathfrak{T}_1(\mathcal{K})$. Это следует из критерия компактности для подмножеств множества $\mathfrak{T}_1(\mathcal{K})$ (см. предложение 11 в Приложении). Действительно, если $P_n = \sum_{i=1}^{n} |i\rangle\langle i|$, то

$$\operatorname{Tr} A(I_\mathcal{K} - P_n) = \sum_{i>n} \langle i|A|i\rangle \leq \sum_{i>n} \lambda_i, \quad \forall A \in \mathfrak{T}(\sigma).$$

Поэтому компактность множества $\mathfrak{F}_0$ в топологии сильной сходимости следует из предложения 3 и следствия 6 (см. Приложение).

2) Это утверждение непосредственно следует из определения топологии сильной сходимости. ▲

Пример 1. Пусть σ – состояние полного ранга из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ и A – произвольный оператор из $\mathfrak{T}_1(\mathcal{H}')$. В силу следствия 2 множество

$$\mathfrak{F}_{\sigma\mapsto A} = \{\Phi \in \mathfrak{F}_{\leq 1}(\mathcal{H},\mathcal{H}') \,|\, \Phi(\sigma) = A\}$$

компактно в топологии сильной сходимости. Заметим, что это множество не является компактным в топологии равномерной сходимости. Заметим также, что множество *всех* вполне положительных отображений, преобразующих заданное состояние σ в заданный оператор A, не является компактным в топологии сильной сходимости.

Пример 2. Пусть σ – состояние полного ранга из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ и H' – $\mathfrak{H}$-оператор (положительный оператор с собственными значениями конечной кратности, стремящимися к $+\infty$, который можно считать гамильтонианом некоторой квантовой системы [3]) в пространстве $\mathcal{H}'$. В силу следствия 2 и леммы из [2] множество каналов

$$\{\Phi \in \mathfrak{F}_{=1}(\mathcal{H},\mathcal{H}') \,|\, \operatorname{Tr} H'\Phi(\sigma) \leq h\}$$

компактно в топологии сильной сходимости при каждом $h > 0$.

Пусть H – произвольный $\mathfrak{H}$-оператор в пространстве $\mathcal{H}$. Для заданного $k > 0$ рассмотрим множество каналов

$$\mathfrak{F}_{H,H',k} = \left\{ \Phi \in \mathfrak{F}_{=1}(\mathcal{H},\mathcal{H}') \,\middle|\, \sup_{\substack{\rho\in\mathfrak{S}(\mathcal{H}) \\ \operatorname{Tr} H\rho<+\infty}} \frac{\operatorname{Tr} H'\Phi(\rho)}{\operatorname{Tr} H\rho} \leq k \right\}. \tag{12}$$

Считая $\mathfrak{H}$-операторы H и H' гамильтонианами входной и выходной систем соответственно, $\mathfrak{F}_{H,H',k}$ можно рассматривать как множество каналов с коэффициентом усиления энергии, не превосходящим k. В силу приведенного выше наблюдения множество $\mathfrak{F}_{H,H',k}$ компактно в топологии сильной сходимости при каждом k.

§ 4. Свойства непрерывности энтропийных характеристик

Для реализации методов аппроксимации, описанных в § 1, необходимы достаточные условия сходимости исследуемых характеристик как функций пары "канал, состояние". В этом параграфе рассмотрены аналитические свойства функций $(\Phi,\rho) \mapsto \chi_\Phi(\rho)$ и $(\Phi,\rho) \mapsto \overline{\operatorname{co}} H_\Phi(\rho)$, определенных на декартовом произведении множества $\mathfrak{F}_{\leq 1}(\mathcal{H},\mathcal{H}')$ квантовых операций (с топологией сильной сходимости) и множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ (с топологией следовой нормы).

Предложение 4. *Функции $(\Phi,\rho) \mapsto \chi_\Phi(\rho)$ и $(\Phi,\rho) \mapsto \overline{\operatorname{co}} H_\Phi(\rho)$ полунепрерывны снизу на множестве $\mathfrak{F}_{\leq 1}(\mathcal{H},\mathcal{H}') \times \mathfrak{S}(\mathcal{H})$.*

Доказательство. Полунепрерывность снизу функции $(\Phi,\rho) \mapsto \chi_\Phi(\rho)$ можно доказать с помощью простой модификации рассуждений в доказательстве полунепрерывности снизу функции $\rho \mapsto \chi_\Phi(\rho)$ (см. [5, предложение 3]).

Доказательство полунепрерывности снизу функции $(\Phi, \rho) \mapsto \overline{\mathrm{co}}\, H_\Phi(\rho)$ основано на утверждении приведенной ниже леммы 1 и критерии компактности для подмножеств множества $\mathcal{P}$.

Предположим, что функция $(\Phi, \rho) \mapsto \overline{\mathrm{co}}\, H_\Phi(\rho)$ не является полунепрерывной снизу. Это означает существование таких последовательностей $\{\Phi_n\} \subset \mathfrak{F}_{\leq 1}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ и $\{\rho_n\} \subset \mathfrak{S}(\mathcal{H})$, сходящихся к операции Φ_0 и к состоянию ρ_0 соответственно, что

$$\lim_{n\to+\infty} \overline{\mathrm{co}}\, H_{\Phi_n}(\rho_n) < \overline{\mathrm{co}}\, H_{\Phi_0}(\rho_0). \tag{13}$$

При каждом $n > 0$ предложение 2 гарантирует существование меры $\mu_n \in \mathcal{P}_{\{\rho_n\}}$, такой что

$$\overline{\mathrm{co}}\, H_{\Phi_n}(\rho_n) = \widehat{H}_{\Phi_n}(\mu_n).$$

В силу критерия компактности для подмножеств множества $\mathcal{P}$ (предложение 2 из [3]) последовательность $\{\mu_n\}_{n>0}$ относительно компактна, и следовательно, существует подпоследовательность $\{\mu_{n_k}\}_k$, сходящаяся к некоторой мере μ_0. Из непрерывности отображения $\mu \mapsto \overline{\rho}(\mu)$ следует, что $\mu_0 \in \mathcal{P}_{\{\rho_0\}}$. Используя лемму 1, получаем

$$\liminf_{k\to+\infty} \overline{\mathrm{co}}\, H_{\Phi_{n_k}}(\rho_{n_k}) = \liminf_{k\to+\infty} \widehat{H}_{\Phi_{n_k}}(\mu_{n_k}) \geq \widehat{H}_{\Phi_0}(\mu_0) \geq \overline{\mathrm{co}}\, H_{\Phi_0}(\rho_0),$$

что противоречит (13). ▲

Лемма 1. *Функционал* $(\Phi, \mu) \mapsto \widehat{H}_\Phi(\mu)$ *полунепрерывен снизу на множестве* $\mathfrak{F}_{\leq 1}(\mathcal{H}, \mathcal{H}') \times \mathcal{P}$.

Доказательство. Предположим, что существуют такие последовательности $\{\Phi_n\} \subset \mathfrak{F}_{\leq 1}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ и $\{\mu_n\} \subset \mathcal{P}$, сходящиеся к операции Φ_0 и к мере μ_0 соответственно, что

$$\lim_{n\to+\infty} \widehat{H}_{\Phi_n}(\mu_n) < \widehat{H}_{\Phi_0}(\mu_0). \tag{14}$$

При каждом n пусть $\nu_n = \mu_n \circ \Phi_n^{-1}$ – образ меры μ_n при отображении Φ_n. В силу теоремы 6.1 из [11] для доказательства сходимости последовательности $\{\nu_n\}$ мер из $\mathcal{P}(\mathfrak{T}_1(\mathcal{H}'))$ к мере $\nu_0 = \mu_0 \circ \Phi_0^{-1}$ достаточно показать, что

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_{\mathfrak{T}_1(\mathcal{H}')} f(A)\nu_n(dA) = \int\limits_{\mathfrak{T}_1(\mathcal{H}')} f(A)\nu_0(dA) \tag{15}$$

для любой ограниченной равномерно непрерывной функции f на множестве $\mathfrak{T}_1(\mathcal{H}')$. По построению последовательности $\{\nu_n\}$ соотношение (15) равносильно следующему:

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_{\mathfrak{S}(\mathcal{H})} f(\Phi_n(\rho))\mu_n(d\rho) = \int\limits_{\mathfrak{S}(\mathcal{H})} f(\Phi_0(\rho))\mu_0(d\rho). \tag{16}$$

В силу теоремы Прохорова (см. [10, 11]) компактность последовательности $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ (с учетом сепарабельности и полноты пространства $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$) гарантирует ее *плотность*, которая означает существование для каждого $\varepsilon > 0$ такого компакта

$\mathcal{C}_\varepsilon \subset \mathfrak{S}(\mathcal{H})$, что $\mu_n(\mathcal{C}_\varepsilon) > 1-\varepsilon$ для всех $n \geq 0$. При каждом n имеем

$$\left|\int\limits_{\mathfrak{S}(\mathcal{H})} f(\Phi_n(\rho))\mu_n(d\rho) - \int\limits_{\mathfrak{S}(\mathcal{H})} f(\Phi_0(\rho))\mu_0(d\rho)\right| \leq$$

$$\leq \left|\int\limits_{\mathcal{C}_\varepsilon} f(\Phi_n(\rho))\mu_n(d\rho) - \int\limits_{\mathcal{C}_\varepsilon} f(\Phi_0(\rho))\mu_0(d\rho)\right| + 2\varepsilon \sup_{A\in\mathfrak{T}_1(\mathcal{H})} |f(A)| \leq$$

$$\leq \sup_{\rho\in\mathcal{C}_\varepsilon} |f(\Phi_n(\rho)) - f(\Phi_0(\rho))| +$$

$$+ \left|\int\limits_{\mathcal{C}_\varepsilon} f(\Phi_0(\rho))\mu_n(d\rho) - \int\limits_{\mathcal{C}_\varepsilon} f(\Phi_0(\rho))\mu_0(d\rho)\right| + 2\varepsilon \sup_{A\in\mathfrak{T}_1(\mathcal{H})} |f(A)|.$$

Первое слагаемое в правой части этого неравенства стремится к нулю при $n \to +\infty$ в силу равномерной непрерывности функции f и равномерной сходимости последовательности $\{\Phi_n\}$ к квантовой операции Φ_0 на компакте $\mathcal{C}_\varepsilon$, которая следует из сильной сходимости (см. замечание 1). Второе слагаемое сходится к нулю при $n \to +\infty$ в силу слабой сходимости последовательности $\{\mu_n\}$ к мере μ_0. Поскольку ε произвольно, это наблюдение доказывает (16), а значит, и (15). Из слабой сходимости последовательности $\{\nu_n = \mu_n \circ \Phi_n^{-1}\}$ к мере $\nu_0 = \mu_0 \circ \Phi_0^{-1}$ и полунепрерывности снизу функционала $\widehat{H}(\nu) = \int\limits_{\mathfrak{T}_1(\mathcal{H}')} H(A)\nu(dA)$ на множестве $\mathcal{P}(\mathfrak{T}_1(\mathcal{H}'))$ (которая следует из неотрицательности и полунепрерывности снизу функции $H(A)$ на множестве $\mathfrak{T}_1(\mathcal{H}')$) следует

$$\liminf_{n\to+\infty} \widehat{H}_{\Phi_n}(\mu_n) = \liminf_{n\to+\infty} \widehat{H}(\nu_n) \geq \widehat{H}(\nu_0) = \widehat{H}_{\Phi_0}(\mu_0),$$

что противоречит (14). ▲

В силу вогнутости энтропии и выпуклости относительной энтропии из предложения 4 вытекает следующее наблюдение.

Следствие 3. *Для произвольного состояния σ из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ функции*

$$\Phi \mapsto \chi_\Phi(\sigma) \quad \textit{и} \quad \Phi \mapsto \overline{\mathrm{co}}\, H_\Phi(\sigma)$$

являются полунепрерывными снизу выпуклой и вогнутой функциями на множестве $\mathfrak{F}_{\leq 1}(\mathcal{H},\mathcal{H}')$ соответственно.

В силу следствия 3 функция $\Phi \mapsto \overline{\mathrm{co}}\, H_\Phi(\sigma)$ достигает своей точной нижней грани на любом выпуклом компактном подмножестве множества $\mathfrak{F}_{=1}(\mathcal{H},\mathcal{H}')$ в некоторой крайней точке этого подмножества. Следовательно, множество $\mathfrak{F}_{\sigma\mapsto\rho}$ всех каналов, преобразующих заданное состояние полного ранга σ из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ в заданное состояние ρ из $\mathfrak{S}(\mathcal{H}')$ (см. пример 1 в § 3), содержит такой канал $\Phi_{\sigma,\rho}$, что

$$\overline{\mathrm{co}}\, H_{\Phi_{\sigma,\rho}}(\sigma) \leq \overline{\mathrm{co}}\, H_\Phi(\sigma), \quad \forall \Phi \in \mathfrak{F}_{\sigma\mapsto\rho}.$$

Если $\rho \cong \sigma$, то $\Phi_{\sigma,\rho}(\cdot) = U(\cdot)U^*$ и $\overline{\mathrm{co}}\, H_{\Phi_{\sigma,\rho}}(\sigma) = 0$, где U – любое унитарное отображение пространства $\mathcal{H}$ на пространство $\mathcal{H}'$, такое что $U\sigma U^* = \rho$. В общем случае канал $\Phi_{\sigma,\rho}$ – это образ некоторой крайней точки выпуклого компакта $\mathcal{C}(\sigma,\rho)$ (определенного перед следствием 2) при отображении $\mathfrak{Y}^{-1}$, который в определенном смысле является каналом с минимальным шумом, преобразующим состояние σ в состояние ρ.

Предложения 2,Б) и 4 и соотношение (8) позволяют получить следующее условие непрерывности[2] функций $(\Phi, \rho) \mapsto \chi_{\Phi}(\rho)$ и $(\Phi, \rho) \mapsto \overline{\mathrm{co}}\, H_{\Phi}(\rho)$.

Предложение 5. *Пусть $\{\Phi_n\}$ – последовательность операций из $\mathfrak{F}_{\leq 1}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$, сильно сходящаяся к каналу Φ_0, и $\{\rho_n\}$ – последовательность состояний из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, сходящаяся к состоянию ρ_0. Если*

$$\lim_{n\to+\infty} H_{\Phi_n}(\rho_n) = H_{\Phi_0}(\rho_0) < +\infty,$$

то

$$\lim_{n\to+\infty} \overline{\mathrm{co}}\, H_{\Phi_n}(\rho_n) = \lim_{n\to+\infty} \overline{\mathrm{co}}\, S_{\Phi_n}(\rho_n) = \overline{\mathrm{co}}\, H_{\Phi_0}(\rho_0) \quad \text{и} \quad \lim_{n\to+\infty} \chi_{\Phi_n}(\rho_n) = \chi_{\Phi_0}(\rho_0).$$

В качестве примера использования этого условия рассмотрим компактное множество $\mathfrak{F}_{H,H',k} \times \mathcal{K}_{H,h}$, где $\mathfrak{F}_{H,H',k}$ – компактное подмножество множества $\mathfrak{F}_{=1}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$, состоящее из каналов с ограниченным коэффициентом усиления энергии (определенное в примере 2), и $\mathcal{K}_{H,h}$ – компактное подмножество множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, состоящее из состояний с ограниченной средней энергией (определяемое неравенством $\mathrm{Tr}\, H\rho \leq h$). Предположим, что $\mathrm{Tr}\exp(-\lambda H') < +\infty$ для всех $\lambda > 0$. Используя наблюдение из [19] (представленное в предложении 6.6 в [13]), нетрудно показать, что функция $(\Phi, \rho) \mapsto H_{\Phi}(\rho)$ непрерывна на множестве $\mathfrak{F}_{H,H',k} \times \mathcal{K}_{H,h}$ при любых k и h. Предложение 5 гарантирует непрерывность функций $(\Phi, \rho) \mapsto \overline{\mathrm{co}}\, H_{\Phi}(\rho)$ и $(\Phi, \rho) \mapsto \chi_{\Phi}(\rho)$ на множестве $\mathfrak{F}_{H,H',k} \times \mathcal{K}_{H,h}$.

Специальный выбор аппроксимирующих последовательностей позволяет гарантировать сходимость функций $\overline{\mathrm{co}}\, H_{\Phi}$, $\overline{\mathrm{co}}\, S_{\Phi}$ и χ_{Φ} без дополнительных условий.

Предложение 6. *Пусть $\{\Phi_n\}$ – последовательность операций, сильно сходящаяся к каналу Φ_0. Соотношения*

$$\lim_{n\to+\infty} \overline{\mathrm{co}}\, H_{\Phi_n}(\rho) = \lim_{n\to+\infty} \overline{\mathrm{co}}\, S_{\Phi_n}(\rho) = \overline{\mathrm{co}}\, H_{\Phi_0}(\rho) \quad \text{и} \quad \lim_{n\to+\infty} \chi_{\Phi_n}(\rho) = \chi_{\Phi_0}(\rho)$$

имеют место для любого состояния ρ из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ в следующих случаях:

А) *$\Phi_n(\cdot) = P_n\Phi_0(\cdot)P_n$ для некоторой последовательности $\{P_n\}$ проекторов из $\mathfrak{B}(\mathcal{H}')$, сильно возрастающей к единичному оператору $I_{\mathcal{H}'}$;*

Б) *$\Phi_n(\rho) \leq \Phi_0(\rho)$ для всех ρ из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$.*

Доказательство. А) Для произвольного состояния ρ из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ из леммы 3 работы [12] и свойства монотонности относительной энтропии следует, что $\overline{\mathrm{co}}\, H_{\Phi_n}(\rho) \leq \overline{\mathrm{co}}\, H_{\Phi_0}(\rho)$ и $\chi_{\Phi_n}(\rho) \leq \chi_{\Phi_0}(\rho)$ соответственно. Поэтому указанные предельные соотношения следуют из предложения 4.

Б) Для произвольного состояния ρ из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ из неравенства (2) и приведенной ниже леммы 2 следует, что $\overline{\mathrm{co}}\, H_{\Phi_n}(\rho) \leq \overline{\mathrm{co}}\, H_{\Phi_0}(\rho)$ и $\chi_{\Phi_n}(\rho) \leq \chi_{\Phi_0}(\rho) + \eta(\mathrm{Tr}\,\Phi_n(\rho)) + h_2(\mathrm{Tr}\,\Phi_n(\rho))$ соответственно. Поэтому указанные предельные соотношения следуют из предложения 4. ▲

Лемма 2. *Пусть $\{\pi_i, A_i\}$ и $\{\pi_i, B_i\}$ – (конечные) ансамбли операторов из $\mathfrak{T}_1(\mathcal{H})$, такие что $A_i \leq B_i$, $\forall i$. Тогда*

$$\sum_i \pi_i H(A_i \,\|\, A) \leq \sum_i \pi_i H(B_i \,\|\, B) + \eta(\mathrm{Tr}\, A) + \mathrm{Tr}\, B h_2\left(\frac{\mathrm{Tr}\, A}{\mathrm{Tr}\, B}\right),$$

где $A = \sum_i \pi_i A_i$ и $B = \sum_i \pi_i B_i$.

[2] Предложение 5 является обобщением теоремы 1 из [6].

Доказательство. Предположим сначала, что $H(B) < +\infty$. Тогда, используя неравенство (2) и вогнутость функций H, h_2 и η, получаем

$$\sum_i \pi_i H(B_i \,\|\, B) = S(B) - \sum_i \pi_i S(B_i) =$$

$$= \left[H(B) - \sum_i \pi_i H(B_i)\right] + \left[\eta(\mathrm{Tr}\, B) - \sum_i \pi_i \eta(\mathrm{Tr}\, B_i)\right] \geq$$

$$\geq \left[H(A) - \sum_i \pi_i H(A_i)\right] - \sum_i \pi_i \mathrm{Tr}\, B_i h_2\left(\frac{\mathrm{Tr}\, A_i}{\mathrm{Tr}\, B_i}\right) +$$

$$+ \left[\eta(\mathrm{Tr}\, B) - \sum_i \pi_i \eta(\mathrm{Tr}\, B_i)\right] + \left[H(B-A) - \sum_i \pi_i H(B_i - A_i)\right] \geq$$

$$\geq \left[S(A) - \sum_i \pi_i S(A_i)\right] - \left[\eta(\mathrm{Tr}\, A) - \sum_i \pi_i \eta(\mathrm{Tr}\, A_i)\right] -$$

$$- \sum_i \pi_i \mathrm{Tr}\, B_i h_2\left(\frac{\mathrm{Tr}\, A_i}{\mathrm{Tr}\, B_i}\right) \geq \sum_i \pi_i H(A_i \,\|\, A) - \mathrm{Tr}\, B h_2\left(\frac{\mathrm{Tr}\, A}{\mathrm{Tr}\, B}\right) - \eta(\mathrm{Tr}\, A).$$

В случае $H(B) = +\infty$, применяя приведенное выше наблюдение к ансамблям $\{\pi_i, P_n A_i P_n\}$ и $\{\pi_i, P_n B_i P_n\}$ при каждом n, где $\{P_n\}$ – произвольная последовательность проекторов конечного ранга, сильно возрастающая к единичному оператору $I_{\mathcal{H}}$, получаем неравенство

$$\sum_i \pi_i H(P_n A_i P_n \,\|\, P_n A P_n) \leq$$

$$\leq \sum_i \pi_i H(P_n B_i P_n \,\|\, P_n B P_n) + \eta(\mathrm{Tr}\, P_n A) + \mathrm{Tr}\, P_n B h_2\left(\frac{\mathrm{Tr}\, P_n A}{\mathrm{Tr}\, P_n B}\right).$$

Переходя в этом неравенстве к пределу с помощью леммы 4 из [12], получаем утверждение леммы. ▲

Замечание 3. Из теоремы 1 работы [6] и предложения 6, A) следует, что χ-функция (соответственно, выпуклое замыкание выходной энтропии) произвольного квантового канала представима в виде точной верхней грани возрастающей последовательности вогнутых (соответственно, выпуклых) *непрерывных* ограниченных функций.

§ 5. Некоторые применения метода аппроксимации

5.1. О непрерывности χ-пропускной способности как функции канала. Напомним, что χ-пропускная способность квантового канала $\Phi \in \mathfrak{F}_{=1}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ с ограничением, определяемым произвольным подмножеством $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{S}(\mathcal{H})$, определяется выражением (см. [2,3])

$$\overline{C}(\Phi, \mathcal{A}) = \sup_{\{\pi_i, \rho_i\} \in \mathcal{P}^{\mathrm{f}}_{\mathcal{A}}} \sum_i \pi_i H(\Phi(\rho_i) \| \Phi(\overline{\rho})) = \sup_{\rho \in \mathcal{A}} \chi_\Phi(\rho). \tag{17}$$

Используя полунепрерывность снизу относительной энтропии, нетрудно показать, что функция $\mathfrak{F}_{=1}(\mathcal{H}, \mathcal{H}') \ni \Phi \mapsto \overline{C}(\Phi, \mathcal{A})$ полунепрерывна снизу, т.е.

$$\liminf_{n \to +\infty} \overline{C}(\Phi_n, \mathcal{A}) \geq \overline{C}(\Phi_0, \mathcal{A}) \tag{18}$$

для произвольной последовательности $\{\Phi_n\}$ каналов из $\mathfrak{F}_{=1}(\mathcal{H},\mathcal{H}')$, сильно сходящейся к каналу Φ_0. Существуют примеры, для которых имеет место строгое неравенство в (18) даже при равномерной сходимости последовательности $\{\Phi_n\}$ к каналу Φ_0, причем разность между правой и левой частями может быть сколь угодно большой [5].

Если последовательность $\{\Phi_n\}$, такая что можно доказать неравенство $\overline{C}(\Phi_n,\mathcal{A})\leq$ $\leq\overline{C}(\Phi_0,\mathcal{A})$ при каждом n, то из (18) следует, что

$$\lim_{n\to+\infty}\overline{C}(\Phi_n,\mathcal{A})=\overline{C}(\Phi_0,\mathcal{A}). \tag{19}$$

Например, в силу свойства монотонности относительной энтропии это соотношение имеет место, если $\Phi_n=\Pi_n\circ\Phi_0$ при каждом n, где $\{\Pi_n\}$ – последовательность каналов из $\mathfrak{F}_{=1}(\mathcal{H}',\mathcal{H}')$, сильно сходящаяся к тождественному каналу.

Результаты §4 позволяют получить следующее условие непрерывности для χ-пропускной способности.

Предложение 7. *Пусть $\{\Phi_n\}$ – последовательность каналов из $\mathfrak{F}_{=1}(\mathcal{H},\mathcal{H}')$, сильно сходящаяся к каналу Φ_0, и $\mathcal{A}$ – компактное подмножество множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$.*

Если $\lim\limits_{n\to+\infty}H_{\Phi_n}(\rho_n)=H_{\Phi_0}(\rho_0)<+\infty$ для произвольной последовательности $\{\rho_n\}$ состояний из $\mathcal{A}$, сходящейся к состоянию ρ_0, то имеет место (19).

Доказательство. Для доказательства (19) достаточно показать, что предположение

$$\lim_{n\to+\infty}\overline{C}(\Phi_n,\mathcal{A})>\overline{C}(\Phi_0,\mathcal{A})$$

приводит к противоречию. Для каждого n пусть ρ_n – такое состояние из $\mathcal{A}$, что

$$\chi_{\Phi_n}(\rho_n)>\overline{C}(\Phi_n,\mathcal{A})-1/n. \tag{20}$$

Компактность множества $\mathcal{A}$ гарантирует существование подпоследовательности $\{\rho_{n_k}\}$, сходящейся к некоторому состоянию $\rho_0\in\mathcal{A}$. В силу условия имеем $\lim\limits_{k\to+\infty}H_{\Phi_{n_k}}(\rho_{n_k})=H_{\Phi_0}(\rho_0)<+\infty$, и из предложения 5 следует, что

$$\lim_{k\to+\infty}\chi_{\Phi_{n_k}}(\rho_{n_k})=\chi_{\Phi_0}(\rho_0)\leq\overline{C}(\Phi_0,\mathcal{A}).$$

Это соотношение с учетом (20) приводит к противоречию.

Используя предложение 7, можно показать, что χ-пропускная способность канала с энергетическим ограничением непрерывна на множестве каналов с ограниченным коэффициентом усиления энергии, рассмотренном в примере 2.

Следствие 4. *Пусть H и H' – $\mathfrak{H}$-операторы в пространствах $\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}'$ соответственно, такие что* $\operatorname{Tr}\exp(-\lambda H')<+\infty$ *для всех $\lambda>0$. Функция $\Phi\mapsto$ $\mapsto\overline{C}(\Phi,\mathcal{K}_{H,h})$ непрерывна на множестве $\mathfrak{F}_{H,H',k}$ (определенном в* (12)).

Доказательство. В силу леммы из [2] множество $\mathcal{K}_{H,h}$ компактно. Пусть h и k – фиксированные положительные числа. Для произвольных последовательностей $\{\Phi_n\}\subset\mathfrak{F}_{H,H',k}$ и $\{\rho_n\}\subset\mathcal{K}_{H,h}$ последовательность $\{\Phi_n(\rho_n)\}$ лежит в множестве $\mathcal{K}_{H',kh}$, на котором энтропия непрерывна в силу наблюдения из [19] (см. [13, предложение 6.6]). ▲

Для произвольного квантового канала $\Phi\in\mathfrak{F}_{=1}(\mathcal{H},\mathcal{H}')$ и произвольного *выпуклого* подмножества $\mathcal{A}\subseteq\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, такого что $\overline{C}(\Phi,\mathcal{A})<+\infty$, существует единственное состояние $\Omega(\Phi,\mathcal{A})$ в $\mathfrak{S}(\mathcal{H}')$, называемое выходным оптимальным средним для

$\mathcal{A}$-ограниченного канала Φ (см. [6, предложение 1]). Это состояние наследует основные свойства образа среднего состояния оптимального ансамбля для конечномерного $\mathcal{A}$-ограниченного канала Φ [20, 15]. Если существует оптимальная мера μ для $\mathcal{A}$-ограниченного канала Φ (см. определение в [3]), то $\Omega(\Phi, \mathcal{A}) = \Phi(\overline{\rho}(\mu))$. Интересно отметить, что непрерывность функции $\Phi \mapsto \overline{C}(\Phi, \mathcal{A})$ на некотором множестве каналов гарантирует непрерывность функции $\Phi \mapsto \Omega(\Phi, \mathcal{A})$ на этом множестве.

Предложение 8. *Пусть $\{\Phi_n\}$ – последовательность каналов из $\mathfrak{F}_{=1}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$, сильно сходящаяся к каналу Φ_0, и $\mathcal{A}$ – выпуклое подмножество множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$.*

Если $\lim\limits_{n\to+\infty} \overline{C}(\Phi_n, \mathcal{A}) = \overline{C}(\Phi_0, \mathcal{A}) < +\infty$, то $\lim\limits_{n\to+\infty} \Omega(\Phi_n, \mathcal{A}) = \Omega(\Phi_0, \mathcal{A})$.

Доказательство. В силу предложения 1 из [6] для произвольного $\varepsilon > 0$ существует ансамбль $\{\pi_i, \rho_i\}$ со средним состоянием в $\mathcal{A}$, такой что

$$\chi_{\Phi_0}(\{\pi_i, \rho_i\}) \geq \overline{C}(\Phi_0, \mathcal{A}) - \varepsilon \quad \text{и} \quad \left\| \sum_i \pi_i \Phi_0(\rho_i) - \Omega(\Phi_0, \mathcal{A}) \right\|_1 < \varepsilon. \tag{21}$$

Из полунепрерывности снизу относительной энтропии следует, что

$$\chi_{\Phi_n}(\{\pi_i, \rho_i\}) \geq \chi_{\Phi_0}(\{\pi_i, \rho_i\}) - \varepsilon$$

для всех достаточно больших n. По условию

$$\overline{C}(\Phi_n, \mathcal{A}) \leq \overline{C}(\Phi_0, \mathcal{A}) + \varepsilon$$

для всех достаточно больших n.

Таким образом, для всех достаточно больших n имеем

$$0 \leq \overline{C}(\Phi_n, \mathcal{A}) - \chi_{\Phi_n}(\{\pi_i, \rho_i\}) \leq \overline{C}(\Phi_0, \mathcal{A}) - \chi_{\Phi_0}(\{\pi_i, \rho_i\}) + 2\varepsilon \leq 3\varepsilon,$$

и используя предложение 3 из [6], получаем

$$\frac{1}{2} \left\| \sum_i \pi_i \Phi_n(\rho_i) - \Omega(\Phi_n, \mathcal{A}) \right\|_1^2 \leq H\left(\sum_i \pi_i \Phi_n(\rho_i) \,\|\, \Omega(\Phi_n, \mathcal{A}) \right) \leq$$
$$\leq \overline{C}(\Phi_n, \mathcal{A}) - \chi_{\Phi_n}(\{\pi_i, \rho_i\}) \leq 3\varepsilon. \tag{22}$$

В силу сильной сходимости последовательности $\{\Phi_n\}$ к каналу Φ_0 имеем

$$\left\| \sum_i \pi_i \Phi_n(\rho_i) - \sum_i \pi_i \Phi_0(\rho_i) \right\|_1 \leq \varepsilon \tag{23}$$

для всех достаточно больших n.

Используя (21), (22) и (23), получаем

$$\|\Omega(\Phi_n, \mathcal{A}) - \Omega(\Phi_0, \mathcal{A})\|_1 \leq \left\| \Omega(\Phi_n, \mathcal{A}) - \sum_i \pi_i \Phi_n(\rho_i) \right\|_1 +$$
$$+ \left\| \sum_i \pi_i \Phi_n(\rho_i) - \sum_i \pi_i \Phi_0(\rho_i) \right\|_1 + \left\| \sum_i \pi_i \Phi_0(\rho_i) - \Omega(\Phi_0, \mathcal{A}) \right\|_1 \leq 2\varepsilon + \sqrt{6\varepsilon}$$

для всех достаточно больших n. ▲

5.2. Об аддитивности χ-пропускной способности. В [5] метод аппроксимации существенно использовался в доказательстве утверждения о том, что из конечномерной гипотезы аддитивности следует сильная аддитивность χ-пропускной способности для всех бесконечномерных квантовых каналов, а также позволил вывести сильную аддитивность χ-пропускной способности для двух бесконечномерных квантовых каналов, один из которых является прямой суммой тождественного канала и канала, разрушающего сцепленность, из соответствующих конечномерных результатов[3] [15, 21].

В [7] сильная аддитивность χ-пропускной способности для двух бесконечномерных квантовых каналов, один из которых является комплементарным к каналу, разрушающему сцепленность, доказана *при условии*, что выходная энтропия обоих каналов конечна на множестве чистых входных состояний. Это условие существенно, поскольку именно совпадение выходных энтропий двух комплементарных каналов на множестве чистых состояний обеспечивает "передачу" свойств аддитивности между парами комплементарных каналов (см. [22, доказательство теоремы 1]) и бесконечные значения этих выходных энтропий делают такую передачу невозможной. Однако условие конечности выходной энтропии на множестве чистых состояний для заданного канала является труднопроверяемым, что препятствует использованию приведенного выше результата. Более того, это условие не выполнено для большого класса бесконечномерных каналов. Ниже будет показано, что метод аппроксимации позволяет преодолеть проблему бесконечной выходной энтропии и доказать сильную аддитивность χ-пропускной способности для двух бесконечномерных квантовых каналов, один из которых является комплементарным к каналу, разрушающему сцепленность, даже в случае, когда выходные энтропии этих каналов бесконечны на всем множестве входных состояний.

Предложение 9. *Пусть $\Phi \in \mathfrak{F}_{=1}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ – канал, комплементарный каналу, разрушающему сцепленность, и $\Psi \in \mathfrak{F}_{=1}(\mathcal{K}, \mathcal{K}')$ – произвольный канал. Тогда сильная аддитивность χ-пропускной способности имеет место для каналов Φ и Ψ.*

Доказательство. Используя лемму 5 и предложение 6 из [5] можно свести доказатество к случаю $\dim\mathcal{K} < +\infty$ и $\dim\mathcal{K}' < +\infty$. В силу предложения 6 из [5] достаточно доказать неравенство

$$\chi_{\Phi\otimes\Psi}(\omega) \leq \chi_{\Phi}(\omega^{\mathcal{H}}) + \chi_{\Psi}(\omega^{\mathcal{K}}) \tag{24}$$

для произвольного состояния ω из $\mathfrak{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})$, такого что $\mathrm{rank}\,\omega^{\mathcal{H}} < +\infty$. Пусть ω – такое состояние и $\mathcal{H}_\omega = \mathrm{supp}\,\omega^{\mathcal{H}}$ – соответствующее конечномерное подпространство.

Пусть $\Phi(\rho) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}''} V\rho V^*$, где V – изометрия Стайнспринга из $\mathcal{H}$ в $\mathcal{H}'\otimes\mathcal{H}''$ [8, 22]. По условию комлементарный канал $\widehat{\Phi}(\rho) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}'} V\rho V^*$ является разрушающим сцепленность.

Пусть $\{P_n\}$ – произвольная последовательность проекторов конечного ранга из $\mathfrak{B}(\mathcal{H}'')$, сильно возрастающая к единичному оператору $I_{\mathcal{H}''}$. Рассмотрим квантовые операции

$$\Phi_n(\rho) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}''} I_{\mathcal{H}'}\otimes P_n \cdot V\rho V^* \cdot I_{\mathcal{H}'}\otimes P_n = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}''} I_{\mathcal{H}'}\otimes P_n \cdot V\rho V^*, \quad \rho\in\mathfrak{S}(\mathcal{H}),$$

и

$$\widehat{\Phi}_n(\rho) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}'} I_{\mathcal{H}'}\otimes P_n \cdot V\rho V^* \cdot I_{\mathcal{H}'}\otimes P_n = P_n\widehat{\Phi}(\rho)P_n, \quad \rho\in\mathfrak{S}(\mathcal{H}).$$

Пусть $\widehat{\Psi}$ – канал, комплементарный каналу Ψ. Заметим, что сужение квантовой операции $\widehat{\Phi}_n$ на множество $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_\omega)$ является конечномерной квантовой операцией,

[3] Заметим, что непосредственное обобщение доказательств этих результатов на бесконечномерный случай не представляется возможным. Например, доказательство теоремы 2 в [21] основано на конечности выходной энтропии и возможности разложения произвольного несцепленного состояния в *дискретную* выпуклую комбинацию чистых состояний-произведений, что не имеет места в бесконечномерном случае [4].

разрушающей сцепленность. Используя предложение 2,В) и повторяя рассуждение из доказательства теоремы 2 работы [21], можно показать существование такой последовательности $\{\sigma_n\} \subset \mathfrak{S}(\mathcal{K})$, сходящейся к состоянию $\omega^{\mathcal{K}}$, что для каждого n имеет место неравенство

$$\overline{\mathrm{co}}\, S_{\widehat{\Phi}_n\otimes\widehat{\Psi}}(\omega) = \mathrm{co}\, S_{\widehat{\Phi}_n\otimes\widehat{\Psi}}(\omega) \geq \overline{\mathrm{co}}\, S_{\widehat{\Phi}_n}(\omega^{\mathcal{H}}) + \alpha_n \overline{\mathrm{co}}\, S_{\widehat{\Psi}}(\sigma_n), \tag{25}$$

где $\alpha_n = \inf\limits_{\rho\in\mathfrak{S}(\mathcal{H}_\omega)} \mathrm{Tr}\,\widehat{\Phi}_n(\rho)$.

Поскольку

$$S_{\widehat{\Phi}_n}(\rho) = S_{\Phi_n}(\rho), \quad \forall\rho \in \mathrm{extr}\,\mathfrak{S}(\mathcal{H}), \quad S_{\widehat{\Psi}}(\sigma) = S_{\Psi}(\sigma), \quad \forall\sigma \in \mathrm{extr}\,\mathfrak{S}(\mathcal{K}),$$

и

$$S_{\widehat{\Phi}_n\otimes\widehat{\Psi}}(\omega) = S_{\Phi_n\otimes\Psi}(\omega), \quad \forall\omega \in \mathrm{extr}\,\mathfrak{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}),$$

из предложения 2,А) следует, что неравенство (25) равносильно следующему:

$$\overline{\mathrm{co}}\, S_{\Phi_n\otimes\Psi}(\omega) \geq \overline{\mathrm{co}}\, S_{\Phi_n}(\omega^{\mathcal{H}}) + \alpha_n \overline{\mathrm{co}}\, S_{\Psi}(\sigma_n). \tag{26}$$

Из неравенства (3) следует, что

$$S_{\Phi_n\otimes\Psi}(\omega) \leq S_{\Phi_n}(\omega^{\mathcal{H}}) + S(\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}'}\Phi_n\otimes\Psi(\omega)) - \varepsilon_n, \tag{27}$$

где $\varepsilon_n = \eta(\mathrm{Tr}\,\Phi_n(\omega^{\mathcal{H}}))$.

Используя (8), (26) и (27), получаем

$$\begin{aligned}
&\chi_{\Phi_n\otimes\Psi}(\omega) = S_{\Phi_n\otimes\Psi}(\omega) - \overline{\mathrm{co}}\, S_{\Phi_n\otimes\Psi}(\omega) \leq \\
&\leq S_{\Phi_n}(\omega^{\mathcal{H}}) - \overline{\mathrm{co}}\, S_{\Phi_n}(\omega^{\mathcal{H}}) + S(\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}'}\Phi_n\otimes\Psi(\omega)) - \overline{\mathrm{co}}\, S_{\Psi}(\sigma_n) + \\
&+ (1-\alpha_n)\overline{\mathrm{co}}\, S_{\Psi}(\sigma_n) \leq \chi_{\Phi_n}(\omega^{\mathcal{H}}) + \chi_{\Psi}(\omega^{\mathcal{K}}) + [(1-\alpha_n)S_{\Psi}(\sigma_n)] + \\
&+ \left[S(\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}'}\Phi_n\otimes\Psi(\omega)) - S_{\Psi}(\omega^{\mathcal{K}})\right] + \left[\overline{\mathrm{co}}\, S_{\Psi}(\omega^{\mathcal{K}}) - \overline{\mathrm{co}}\, S_{\Psi}(\sigma_n)\right].
\end{aligned}$$

Последовательность квантовых операций $\{\Phi_n\}$ сильно сходится к каналу Φ и удовлетворяет условию Б) предложения 6. Предложения 6,Б) и 4 позволяют доказать неравенство (24) предельным переходом в последнем неравенстве, поскольку слагаемые в квадратных скобках стремятся к нулю при $n \to +\infty$ в силу предполагаемой конечномерности пространств $\mathcal{H}_\omega$ и $\mathcal{K}'$. ▲

Пример 3. В силу предложения 9 сильная аддитивность χ-пропускной способности имеет место для произвольного канала Ψ и канала Φ^a_p, рассмотренного в примере из [7], с произвольной плотностью вероятности $p(t)$ и $a \leq +\infty$. Это, в частности, означает, что классическая пропускная способность канала Φ^a_p с произвольным ограничением совпадает с χ-пропускной способностью.

5.3. Аппроксимативное представление выпуклого замыкания выходной энтропии. Выпуклое замыкание выходной энтропии (ВЗВЭ) квантового канала – важная характеристика, связанная с классической пропускной способностью этого канала [6]. Это понятие также играет существенную роль в теории сцепленности: важная мера сцепленности состояния составной квантовой системы – сцепленность формирования (Entanglement of Formation = EoF) – совпадает с ВЗВЭ частичного следа [23].

В силу предложения 2 ВЗВЭ квантового канала $\Phi \in \mathfrak{F}_{=1}(\mathcal{H},\mathcal{H}')$ представляется выражением

$$\overline{\mathrm{co}}\, H_\Phi(\rho) = \inf_{\mu\in\widehat{\mathcal{P}}_{\{\rho\}}} \int\limits_{\mathrm{extr}\,\mathfrak{S}(\mathcal{H})} H_\Phi(\sigma)\mu(d\sigma), \quad \rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}). \tag{28}$$

В [6] показано, что для произвольного состояния ρ с конечной выходной энтропией $H_\Phi(\rho)$ точную нижнюю грань в этом выражении можно брать только по множеству атомических мер, что означает

$$\overline{\mathrm{co}}\, H_\Phi(\rho) = \inf_{\{\pi_i,\rho_i\}\in\widehat{\mathcal{P}}_{\{\rho\}}} \sum_i \pi_i H_\Phi(\rho_i) \tag{29}$$

(где точная нижная грань берется по множеству всех счетных ансамблей $\{\pi_i, \rho_i\}$ чистых состояний со средним состоянием ρ).

Однако вопрос о справедливости выражения (29) для произвольного состояния ρ остается открытым. Второй пример в замечании 2 из [14] показывает, что положительное решение этого вопроса невозможно получить, используя только общие аналитические свойства (выходной) энтропии. Для заданного канала Φ справедливость выражения (29) для всех состояний ρ равносильна полунепрерывности снизу правой части этого выражения как функции на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$.

Таким образом, в случае произвольного квантового канала Φ необходимо использовать выражение (28), в которое входит точная нижняя грань по множеству *всех* мер с заданным барицентром ρ. Это приводит к некоторым техническим проблемам при работе с ВЗВЭ. Более того, это выражение выглядит неестественно с физической точки зрения, поскольку для состояния ρ с *конечной* средней энергией, которое можно приготовить в физическом эксперименте, множество мер с барицентром ρ содержит меры, носитель которых включает в себя состояния с *бесконечной* средней энергией[4].

В этом разделе будет получено представление для ВЗВЭ произвольного квантового канала $\Phi \in \mathfrak{F}_{=1}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ в виде предела возрастающей последовательности *непрерывных* ограниченных выпуклых функций на $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, каждая из которых определяется выражением типа (29).

Пусть $n > 1$ – фиксированное натуральное число. Рассмотрим функцию

$$H^n_\Phi(\rho) = -\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \log \lambda_i + \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) \log \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right),$$

где $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ – множество n максимальных собственных значений состояния $\Phi(\rho)$, которую можно назвать усеченной выходной энтропией. В силу леммы 4 из [12] последовательность $\{H^n_\Phi\}$ непрерывных ограниченных функций на $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ не убывает и поточечно сходится к выходной энтропии H_Φ.

Пусть

$$\check{H}^n_\Phi(\rho) = \inf_{\{\pi_i,\rho_i\}\in\widehat{\mathcal{P}}_{\{\rho\}}} \sum_i \pi_i H^n_\Phi(\rho_i), \quad \forall \rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}).$$

В силу предложения 5 из [14] функция $\check{H}^n_\Phi$ $(= (H^n_\Phi)_*)$ является выпуклым *непрерывным* расширением функции $\operatorname{extr}\mathfrak{S}(\mathcal{H}) \ni \rho \mapsto H^n_\Phi(\rho)$ на множество $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$[5].

Последовательность $\{\check{H}^n_\Phi\}_n$ выпуклых непрерывных ограниченных функций на $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ не убывает и мажорируется функцией $\overline{\mathrm{co}}\, H_\Phi$. Результаты раздела 5.2 позволяют доказать следующее утверждение[6].

[4] Любой счетный ансамбль, среднее состояние которого имеет конечную среднюю энергию, состоит из состояний с конечной средней энергией.

[5] Поскольку в общем случае функция H^n_Φ не является вогнутой на $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, нельзя утверждать, что $\check{H}^n_\Phi = \overline{\mathrm{co}}\, H^n_\Phi$.

[6] Это утверждение не является тривиальным, поскольку множество $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ не компактно.

П р е д л о ж е н и е 10. *Для произвольного канала* $\Phi \in \mathfrak{F}_{=1}(\mathcal{H},\mathcal{H}')$ *функция* $\overline{\mathrm{co}}\, H_\Phi$ *является пределом возрастающей последовательности* $\{\check{H}^n_\Phi\}_n$ *выпуклых непрерывных ограниченных функций на* $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$.

Замечание 4. Это предложение не позволяет доказать справедливость выражения (29). Существуют такие возрастающие последовательности $\{f_n\}$ вогнутых непрерывных ограниченных функций на $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, сходящиеся к (вогнутой полунепрерывной снизу) ограниченной функции f, что

$$\lim_{n\to+\infty} \inf_{\{\pi_i,\rho_i\}\in\widehat{\mathcal{P}}_{\{\rho\}}} \sum_i \pi_i f_n(\rho_i) = 0 \quad \text{и} \quad \inf_{\{\pi_i,\rho_i\}\in\widehat{\mathcal{P}}_{\{\rho\}}} \sum_i \pi_i f(\rho_i) = 1$$

для некоторого состояния $\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ (см. [14, второй пример в замечании 2]).

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу приведенного выше наблюдения достаточно показать, что

$$\liminf_{n\to+\infty} \check{H}^n_\Phi(\rho) \geq \overline{\mathrm{co}}\, H_\Phi(\rho) \tag{30}$$

для произвольного состояния $\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$.

Пусть $\{P_n\}$ – последовательность проекторов из $\mathfrak{B}(\mathcal{H}')$, сильно возрастающая к единичному оператору $I_{\mathcal{H}'}$, такая что $\mathrm{rank}\, P_n = n$. Рассмотрим последовательность $\{\Phi_n(\cdot) = P_n\Phi(\cdot)P_n\}$ операций из $\mathfrak{F}_{\leq 1}(\mathcal{H},\mathcal{H}')$.

Пусть ρ – произвольное чистое состояние из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$. Если $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ и $\{\lambda_i^n\}_{i=1}^n$ – наборы максимальных собственных значений (взятых в порядке убывания) операторов $\Phi(\rho)$ и $\Phi_n(\rho)$, тогда из вариационного принципа Рица следует, что $\lambda_i \geq \lambda_i^n$ при каждом $i = \overline{1,n}$. Поэтому, используя (2), получаем

$$H^n_\Phi(\rho) = H(\{\lambda_i\}_{i=1}^n) \geq H(\{\lambda_i^n\}_{i=1}^n) = H_{\Phi_n}(\rho).$$

Следовательно,

$$\inf_{\{\pi_i,\rho_i\}\in\widehat{\mathcal{P}}_{\{\rho\}}} \sum_i \pi_i H^n_\Phi(\rho_i) \geq \inf_{\{\pi_i,\rho_i\}\in\widehat{\mathcal{P}}_{\{\rho\}}} \sum_i \pi_i H_{\Phi_n}(\rho_i), \quad \forall \rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}).$$

Поскольку функция H_{Φ_n} вогнута, непрерывна и ограничена на $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, следствие 10 из [14] гарантирует совпадение правой части последнего неравенства с $\overline{\mathrm{co}}\, H_{\Phi_n}(\rho)$.

Последовательность $\{\Phi_n\}$ удовлетворяет условию A) предложения 6. Следовательно, для произвольного состояния ρ из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ получаем

$$\liminf_{n\to+\infty} \inf_{\{\pi_i,\rho_i\}\in\widehat{\mathcal{P}}_{\{\rho\}}} \sum_i \pi_i H^n_\Phi(\rho_i) \geq \lim_{n\to+\infty} \overline{\mathrm{co}}\, H_{\Phi_n}(\rho) = \overline{\mathrm{co}}\, H_\Phi(\rho),$$

что эквивалентно (30). ▲

С л е д с т в и е 5. *Пусть* $\Phi \in \mathfrak{F}_{=1}(\mathcal{H},\mathcal{H}')$ *– произвольный канал и* $\mathcal{A}$ *– компактное подмножество множества* $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, *на котором выходная энтропия* H_Φ *непрерывна. Тогда возрастающая последовательность* $\{\check{H}^n_\Phi\}$ *непрерывных функций сходится к функции* $\overline{\mathrm{co}}\, H_\Phi$ *равномерно на* $\mathcal{A}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из теоремы 1 работы [6] следует непрерывность функции $\overline{\mathrm{co}}\, H_\Phi$ на множестве $\mathcal{A}$. Поэтому утверждение следствия вытекает из предложения 10 и леммы Дини. ▲

Следствие 5 показывает, что для произвольного гауссовского канала Φ последовательность $\{\check{H}^n_\Phi\}$ обеспечивает равномерную аппроксимацию функции $\overline{\mathrm{co}}\, H_\Phi$ на множестве состояний с ограниченной средней энергией (см. [3, замечание после предложения 3]).

Пусть $\mathcal{H}$ и $\mathcal{K}$ – сепарабельные гильбертовы пространства. Рассмотрим канал $\Theta : \mathfrak{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}) \ni \omega \mapsto \mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}\omega \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$. Сцепленность формирования EoF состояния $\omega \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})$ можно определить выражением (см. [6])

$$E_{\mathrm{F}}(\omega) = \overline{\mathrm{co}}\, H_\Theta(\omega) = \inf_{\mu\in\widehat{\mathcal{P}}_{\{\omega\}}} \int\limits_{\mathrm{extr}\,\mathfrak{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})} H_\Theta(\sigma)\mu(d\sigma).$$

Предложение 10 показывает, что E_{F} совпадает с пределом возрастающей последовательности выпуклых непрерывных ограниченных функций

$$\breve{H}^n_\Theta(\omega) = \inf_{\{\pi_i,\omega_i\}\in\widehat{\mathcal{P}}_{\{\omega\}}} \sum_i \pi_i H^n_\Theta(\omega_i).$$

Это доказывает предположение о принадлежности функции E_{F} классу $\widehat{P}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}))$ [14].

В силу следствия 5 (с учетом предложения 3 из [1]) последовательность $\{\breve{H}^n_\Theta\}$ обеспечивает равномерную аппроксимацию функции E_{F} на множестве состояний составной квантовой системы с ограниченной средней энергией.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Приведенный ниже критерий компактности для подмножеств множества $\mathfrak{T}_1(\mathcal{H})$ можно доказать посредством незначительной модификации рассуждений в доказательстве критерия компактности для подмножеств множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, представленного в [3, Приложение].

Предложение 11. *Замкнутое подмножество $\mathcal{A} \subset \mathfrak{T}_1(\mathcal{H})$ является компактным тогда и только тогда, когда для произвольного $\varepsilon > 0$ существует проектор конечного ранга P_ε, такой что $\mathrm{Tr}\,(I_{\mathcal{H}} - P_\varepsilon)A < \varepsilon$ для всех $A \in \mathcal{A}$.*

Следствие 6. *Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – подмножества множеств $\mathfrak{T}_1(\mathcal{H})$ и $\mathfrak{T}_1(\mathcal{K})$ соответственно. Подмножество $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ множества $\mathfrak{T}_1(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})$, состоящее из всех операторов C, таких что $\mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}C \in \mathcal{A}$ и $\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}C \in \mathcal{B}$, компактно тогда и только тогда, когда компактны множества $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.*

Доказательство. Из компактности множества $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ следует компактность множеств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ в силу непрерывности частичного следа.

Если множества $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ компактны, то в силу предложения 11 для произвольного $\varepsilon > 0$ существуют проекторы конечного ранга P_ε и Q_ε, такие что

$$\mathrm{Tr}\,P_\varepsilon A > \mathrm{Tr}\,A - \varepsilon,\ \forall A \in \mathcal{A}, \quad \text{и} \quad \mathrm{Tr}\,Q_\varepsilon B > \mathrm{Tr}\,B - \varepsilon,\ \forall B \in \mathcal{B}.$$

Поскольку $C^{\mathcal{H}} = \mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}C \in \mathcal{A}$ и $C^{\mathcal{K}} = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}C \in \mathcal{B}$ для любого $C \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$, имеем

$$\mathrm{Tr}\,((P_\varepsilon\otimes Q_\varepsilon)\cdot C) = \mathrm{Tr}\,((P_\varepsilon\otimes I_{\mathcal{K}})\cdot C) - \mathrm{Tr}\,(P_\varepsilon\otimes(I_{\mathcal{K}} - Q_\varepsilon)\cdot C) \geq$$
$$\geq \mathrm{Tr}\,P_\varepsilon C^{\mathcal{H}} - \mathrm{Tr}\,(I_{\mathcal{K}} - Q_\varepsilon)C^{\mathcal{K}} > \mathrm{Tr}\,C - 2\varepsilon.$$

Из предложения 11 следует компактность множества $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$. ▲

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Eisert J., Simon C., Plenio M.B.* The Quantification of Entanglement in Infinite-Dimensional Quantum Systems // J. Phys. A. 2002. V. 35. № 17. P. 3911–3923.
2. *Холево А.С.* Классические пропускные способности квантового канала с ограничением на входе // Теория вероятностей и ее применения. 2003. Т. 48. № 2. С. 359–374.

3. *Холево А.С., Широков М.Е.* Непрерывные ансамбли и классическая пропускная способность квантовых каналов бесконечной размерности // Теория вероятностей и ее применения. 2005. Т. 50. № 1. С. 98–114.
4. *Вернер Р.Ф., Холево А.С., Широков М.Е.* О понятии сцепленности в гильбертовых пространствах // УМН. 2005. Т.60. № 2. С. 153–154; e-print quant-ph/0504204.
5. *Shirokov M.E.* The Holevo Capacity of Infinite Dimensional Channels and the Additivity Problem // Commun. Math. Phys. 2006. V.262. P. 137–159.
6. *Широков М.Е.* О свойствах квантовых каналов, связанных с классической пропускной способностью // Теория вероятностей и ее применения. 2007. Т. 52. № 2. С. 301–335.
7. *Shirokov M.E.* The Convex Closure of the Output Entropy of Infinite Dimensional Channels and the Additivity Problem // e-print quant-ph/0608090, 2006.
8. *Холево А.С.* Статистическая структура квантовой теории. Ижевск: Ин-т компьтерных исследований, 2003.
9. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
10. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, Физматлит, 1977.
11. *Parthasarathy K.* Probability Measures on Metric Spaces. New York – London: Academic Press, 1967.
12. *Lindblad G.* Expectation and Entropy Inequalities for Finite Quantum Systems // Comm. Math. Phys. 1974. V. 39. № 2. P. 111–119.
13. *Ohya M., Petz D.* Quantum Entropy and Its Use. Texts and Monographs in Physics. Berlin: Springer-Verlag, 1993.
14. *Shirokov M.E.* Properties of Probability Measures on the Set of Quantum States and Their Applications // e-print math-ph/0607019.
15. *Holevo A.S., Shirokov M.E.* On Shor's Channel Extension and Constrained Channels // Commun. Math. Phys. 2004. V. 249. № 2. P. 417–430.
16. *Paulsen V.I.* Completely Bounded Maps and Operators Algebras. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
17. *Choi M.D.* Completely Positive Linear Maps on Complex Matrices // Linear Algebra and Its Application. 1975. V. 10. P. 285–290.
18. *Horodecki M., Horodecki P., Horodecki R.* General Teleportation Channel, Singlet Fraction, and Quasidistillation // Phys. Rev. A. 1999. V. 60. № 3. P. 1888–1898.
19. *Wehrl A.* General Properties of Entropy // Rev. Mod. Phys. 1978. V. 50. P. 221–250.
20. *Schumacher B., Westmoreland M.* Optimal Signal Ensembles // Phys. Rev. A. 2001. V. 63. № 2. P. 2308–2312.
21. *Shor P.W.* Additivity of the Classical Capacity of Entanglement Breaking Quantum Channel // J. Math. Physics. 2002. V. 43. P. 4334–4340.
22. *Холево А.С.* Комплементарные каналы и проблема аддитивности // Теория вероятностей и ее применения. 2006. Т. 51. № 1. С. 134–143.
23. *Bennett C.H., DiVincenzo D.P., Smolin J.A., Wootters W.K.* Mixed State Entanglement and Quantum Error Correction // Phys. Rev. A. 1996. V. 54. P. 3824–3851.

Широков Максим Евгеньевич
Холево Александр Семенович
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
`msh@mi.ras.ru`
`holevo@mi.ras.ru`

Поступила в редакцию
11.12.2007