М. Е. Широков, О многочастичной суперактивации пропускных способностей квантового канала, *Пробл. передачи информ.*, 2015, том 51, выпуск 2, 3–19

ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том 51 **2015** **Вып. 2**

УДК 621.391.1 : 519.7

© 2015 г. **М.Е. Широков**

О МНОГОЧАСТИЧНОЙ СУПЕРАКТИВАЦИИ ПРОПУСКНЫХ СПОСОБНОСТЕЙ КВАНТОВОГО КАНАЛА[1]

Рассмотрено обобщение понятия суперактивации пропускных способностей квантового канала связи на случай $n > 2$ каналов. Явно построен пример обобщенной суперактивации одношаговой квантовой пропускной способности при нулевой ошибке для $n = 3$. Дана интерпретация этого примера в терминах теории квантовых измерений.

§ 1. Общие замечания

Суперактивация пропускных способностей квантовых каналов – один из наиболее интересных квантовых эффектов, не имеющих классического аналога. Этот эффект означает, что объединяя два квантовых канала Φ_1 и Φ_2 с нулевой пропускной способностью C можно получить канал, у которого пропускная способность C положительна, т.е.

$$C(\Phi_1 \otimes \Phi_2) > 0 \quad \text{при том, что} \quad C(\Phi_1) = C(\Phi_2) = 0. \tag{1}$$

Эффект суперактивации был открыт Г. Смитом и Дж. Ярдом для случая квантовой пропускной способности при ε-малой ошибке [1]. Дальнейшие исследования показали возможность суперактивации некоторых других пропускных способностей квантового канала, в частности, классических и квантовых пропускных способностей при нулевой ошибке [2–5].

Естественное обобщение эффекта суперактивации (1) на случай n каналов $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ состоит в выполнимости следующего свойства:

$$C(\Phi_1 \otimes \ldots \otimes \Phi_n) > 0 \quad \text{при том, что} \quad C(\Phi_{i_1} \otimes \ldots \otimes \Phi_{i_k}) = 0 \tag{2}$$

для любых собственных поднаборов $\Phi_{i_1}, \ldots, \Phi_{i_k}$ $(k < n)$ набора $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$. Это свойство будем называть *n-частичной суперактивацией* пропускной способности C.

Свойство (2) означает, что для передачи (классической или квантовой) информации с использованием протокола, соответствующего пропускной способности C, необходимы все каналы $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$, т.е. исключение любого канала из этого набора делает остальные каналы бесполезными для передачи информации.

Очевидная сложность нахождения каналов $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$, демонстрирующих свойство (2) для заданной пропускной способности C, состоит в проверке равенства нулю пропускной способности $C(\Phi_{i_1} \otimes \ldots \otimes \Phi_{i_k})$ для любого поднабора $\Phi_{i_1}, \ldots, \Phi_{i_k}$.

Ниже будет построен пример трехчастичной суперактивации в случае, когда $C = \bar{Q}_0$ – одношаговая квантовая пропускная способность при нулевой ошибке (точное определение которой дано в § 2).

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-21-00162).

В [6] показано, как построить по заданному n такой канал Ψ_n, что

$$\bar{Q}_0(\Psi_n^{\otimes n}) = 0 \quad \text{и} \quad \bar{Q}_0(\Psi_n^{\otimes m}) > 0, \tag{3}$$

где m – натуральное число, удовлетворяющее неравенству

$$n/m \leqslant 2\ln(3/2)/\pi < 1.$$

Из (3) следует существование такого $\widetilde{n} > n$, не превосходящего m, что (2) выполнено при $n = \widetilde{n}$, $C = \bar{Q}_0$ и $\Phi_1 = \ldots = \Phi_{\widetilde{n}} = \Psi_n$. К сожалению, используемый в [6] подход не позволяет точно определить это число $\widetilde{n}$.

В данной статье мы модифицируем пример из [6] (путем подходящего расширения некоммутативного графа) и построим семейство каналов $\{\Phi_\theta\}$ с $d_A = 4$ и $d_E = 3$, обладающих следующим свойством:

$$\bar{Q}_0(\Phi_{\theta_1} \otimes \Phi_{\theta_2} \otimes \Phi_{\theta_3}) > 0 \quad \text{при том, что} \quad \bar{Q}_0(\Phi_{\theta_i} \otimes \Phi_{\theta_j}) = 0 \quad \forall i \neq j, \tag{4}$$

где $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ – положительные числа, такие что $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \pi$. Таким образом, каналы $\Phi_{\theta_1}, \Phi_{\theta_2}, \Phi_{\theta_3}$ демонстрируют трехчастичную суперактивацию одношаговой квантовой пропускной способности при нулевой ошибке.

Свойство (4) означает, что все одночастичные каналы Φ_{θ_i} и все двухчастичные каналы $\Phi_{\theta_i} \otimes \Phi_{\theta_j}$ не имеют идеальных (полностью обратимых) подканалов, но у трехчастичного канала $\Phi_{\theta_1} \otimes \Phi_{\theta_2} \otimes \Phi_{\theta_3}$ уже появляется идеальный подканал.

Используя результаты из [7, § 4], свойство суперактивации одношаговой квантовой пропускной способности при нулевой ошибке можно переформулировать в терминах теории квантовых измерений. В частности, свойство (4) означает существование таких квантовых наблюдаемых $\mathcal{M}_{\theta_1}, \mathcal{M}_{\theta_2}, \mathcal{M}_{\theta_3}$, что у всех одночастичных наблюдаемых $\mathcal{M}_{\theta_i}$ и всех двухчастичных наблюдаемых $\mathcal{M}_{\theta_i} \otimes \mathcal{M}_{\theta_j}$ нет неразличимых подпространств, а у трехчастичной наблюдаемой $\mathcal{M}_{\theta_1} \otimes \mathcal{M}_{\theta_2} \otimes \mathcal{M}_{\theta_3}$ неразличимое подпространство есть (см. следствие 2).

§ 2. Предварительные сведения

Пусть $\mathcal{H}$ – конечномерное унитарное пространство, $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ – алгебра всех линейных операторов в $\mathcal{H}$, $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ – замкнутое выпуклое подмножество в $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, состоящее из положительных операторов с единичным следом, которые называются *состояниями* [8, 9]. Алгебру $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ можно отождествить с алгеброй $\mathfrak{M}_n$ всех $(n \times n)$-матриц, где $n = \dim \mathcal{H}$.

Пусть $\Phi\colon \mathfrak{B}(\mathcal{H}_A) \to \mathfrak{B}(\mathcal{H}_B)$ – квантовый канал, т.е. вполне положительное сохраняющее след линейное отображение [8, 9]. Это отображение имеет представление Крауса

$$\Phi(A) = \sum_k V_k A V_k^*, \quad A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_A), \tag{5}$$

где $\{V_k\}$ – набор линейных операторов из $\mathcal{H}_A$ в $\mathcal{H}_B$, такой что $\sum_k V_k^* V_k = I_{\mathcal{H}_A}$ – тождественный оператор в $\mathcal{H}_A$. Минимальное число ненулевых слагаемых в представлении Крауса называется *рангом Чоя* канала Φ и обозначается через d_E (это связано с тем, что d_E – размерность минимального пространства-окружения $\mathcal{H}_E$ [8, гл. 6]). Будем также использовать обозначения $d_A \doteq \dim \mathcal{H}_A$ и $d_B \doteq \dim \mathcal{H}_B$.

Одношаговая квантовая пропускная способность $\bar{Q}_0(\Phi)$ при нулевой ошибке канала Φ определяется как $\sup_{\mathcal{H} \in q_0(\Phi)} \log_2 \dim \mathcal{H}$, где $q_0(\Phi)$ – множество всех подпространств $\mathcal{H}_0$ в $\mathcal{H}_A$, на которых канал Φ полностью обратим (в том смысле, что существует канал Θ, такой что $\Theta(\Phi(\rho)) = \rho$ для всех состояний ρ с носителем в $\mathcal{H}_0$).

Асимптотическая квантовая пропускная способность при нулевой ошибке определяется с помощью регуляризации: $Q_0(\Phi) = \sup_n n^{-1}\bar{Q}_0(\Phi^{\otimes n})$ [3, 10, 11].

Пропускные способности $\bar{Q}_0(\Phi)$ и $Q_0(\Phi)$ полностью определяются *некоммутативным графом* $\mathcal{G}(\Phi)$ канала Φ – подпространством алгебры $\mathfrak{B}(\mathcal{H}_A)$, порожденным всеми операторами вида $V_k^* V_j$, где V_k – операторы из представления Крауса (5) канала Φ [11]. В частности, из условий Нила – Лафлама (см. [12]) непосредственно выводится следующее утверждение.

Лемма 1. *Канал $\Phi\colon \mathfrak{B}(\mathcal{H}_A) \to \mathfrak{B}(\mathcal{H}_B)$ полностью обратим на подпространстве $\mathcal{H}_0 \subseteq \mathcal{H}_A$, порожденном семейством $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ ортогональных единичных векторов (что означает $\bar{Q}_0(\Phi) \geqslant \log n$) тогда и только тогда, когда*

$$\langle\varphi_i|A|\varphi_j\rangle = 0 \quad \text{и} \quad \langle\varphi_i|A|\varphi_i\rangle = \langle\varphi_j|A|\varphi_j\rangle \quad \forall\, i \neq j \quad \forall A \in \mathfrak{L}, \tag{6}$$

где $\mathfrak{L}$ – любое подмножество алгебры $\mathfrak{B}(\mathcal{H}_A)$, такое что $\operatorname{lin}\mathfrak{L} = \mathcal{G}(\Phi)$.

Поскольку подпространство $\mathfrak{L}$ в алгебре $\mathfrak{M}_n$ всех $(n \times n)$-матриц является некоммутативным графом некоторого канала тогда и только тогда, когда

$$\mathfrak{L} \text{ симметрично } (\mathfrak{L} = \mathfrak{L}^*) \text{ и содержит единичную матрицу} \tag{7}$$

(см. [4, лемма 2] или [7, Приложение]), лемма 1 показывает, что канал Φ с $\dim\mathcal{H}_A = n$ и положительной (соответственно, нулевой) одношаговой квантовой пропускной способностью при нулевой ошибке можно построить, выбрав подпространство $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{M}_n$, удовлетворяющее (7), для которого выполнено (соответственно, не выполнено) следующее условие:

$$\exists\,\varphi, \psi \in [\mathbb{C}^n]_1, \quad \text{такие что} \quad \langle\psi|A|\varphi\rangle = 0 \quad \text{и} \quad \langle\varphi|A|\varphi\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle \quad \forall A \in \mathfrak{L}, \tag{8}$$

где $[\mathbb{C}^n]_1$ – единичная сфера в $\mathbb{C}^n$.

§ 3. Пример трехчастичной суперактивации

Для заданного $\theta \in (-\pi, \pi]$ рассмотрим восьмимерное подпространство

$$\mathfrak{N}_\theta = \left\{ M = \begin{bmatrix} a & b & e & f \\ c & d & f & \bar{\gamma}e \\ g & h & a & b \\ h & \gamma g & c & d \end{bmatrix}, \quad a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{C} \right\} \tag{9}$$

алгебры $\mathfrak{M}_4$, удовлетворяющее условию (7), где $\gamma = \exp[i\theta]$.

Пусть $\widehat{\mathfrak{N}}_\theta$ – множество всех каналов, некоммутативный граф которых совпадает с $\mathfrak{N}_\theta$. В [7, Приложение] показано, как явно построить каналы из $\widehat{\mathfrak{N}}_\theta$ с $d_A = 4$ и $d_E = 3$ (поскольку $\dim\mathfrak{N}_\theta = 8 \leqslant 3^2$).

Теорема. *Пусть Φ_θ – канал из $\widehat{\mathfrak{N}}_\theta$, а $n \in \mathbb{N}$ – произвольное число.*

A) $\bar{Q}_0(\Phi_\theta) > 0$ *тогда и только тогда, когда* $\theta = \pi$ *и* $\bar{Q}_0(\Phi_\pi) = 1$;

B) *Если* $\theta_1 + \ldots + \theta_n = \pi \pmod{2\pi}$, *то* $\bar{Q}_0(\Phi_{\theta_1} \otimes \ldots \otimes \Phi_{\theta_n}) > 0$ *и канал* $\Phi_{\theta_1} \otimes \ldots \otimes \Phi_{\theta_n}$ *полностью обратим на подпространстве, порожденном векторами*[2]

$$|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|1\ldots1\rangle + i|2\ldots2\rangle\right], \quad |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|3\ldots3\rangle + i|4\ldots4\rangle\right], \tag{10}$$

где $\{|1\rangle, \ldots, |4\rangle\}$ *– канонический базис в* $\mathbb{C}^4$;

[2] Здесь и далее $|1\ldots1\rangle$ обозначает вектор $|1 \otimes \ldots \otimes 1\rangle$ и т.д.

C) *Если* $|\theta_1| + |\theta_2| < \pi$, *то* $\bar{Q}_0(\Phi_{\theta_1} \otimes \Phi_{\theta_2}) = 0$;

D) *Если* $|\theta_1| + \ldots + |\theta_n| \leqslant 2\ln(3/2)$, *то* $\bar{Q}_0(\Phi_{\theta_1} \otimes \ldots \otimes \Phi_{\theta_n}) = 0$.

Главным достижением этой теоремы по сравнению с теоремой 1 из [6] является утверждение C). Именно доказательство этого утверждения потребовало использования расширенного подпространства $\mathfrak{N}_\theta$ (вместо подпространства $\mathfrak{L}_\theta$, используемого в [6]).

Замечание. Поскольку утверждение D) доказывается с помощью достаточно грубых оценок, остальные утверждения теоремы позволяют предположить, что утверждение D) можно усилить следующим образом:

D$'$) *Если* $|\theta_1| + \ldots + |\theta_n| < \pi$, *то* $\bar{Q}_0(\Phi_{\theta_1} \otimes \ldots \otimes \Phi_{\theta_n}) = 0$.

Приведенное ниже доказательство утверждения C), т.е. утверждения D$'$) при $n = 2$, не обобщается на случай произвольного n, что оставляет открытым вопрос о доказательстве гипотезы D$'$).

Теорема дает следующий пример трехчастичной суперактивации одношаговой квантовой пропускной способности при нулевой ошибке.

Следствие 1. *Пусть* $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ *– такие положительные числа, что* $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \pi$. *Тогда*

$$\bar{Q}_0(\Phi_{\theta_1} \otimes \Phi_{\theta_2} \otimes \Phi_{\theta_3}) > 0 \quad \text{при том, что} \quad \bar{Q}_0(\Phi_{\theta_i} \otimes \Phi_{\theta_j}) = 0 \quad \forall i \neq j.$$

Канал $\Phi_{\theta_1} \otimes \Phi_{\theta_2} \otimes \Phi_{\theta_3}$ *полностью обратим на подпространстве, порожденном векторами*

$$|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|111\rangle + i|222\rangle\right], \quad |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|333\rangle + i|444\rangle\right]. \tag{11}$$

Если бы гипотеза D$'$) была справедлива при некотором $n > 2$, то аналогичное утверждение имело бы место для $n+1$ каналов $\Phi_{\theta_1}, \ldots, \Phi_{\theta_{n+1}}$, что дало бы пример $(n+1)$-частичной суперактивации одношаговой квантовой пропускной способности при нулевой ошибке.

При каждом θ можно выбрать базис $\{M_k^\theta\}_{k=1}^8$ подпространства $\mathfrak{N}_\theta$, состоящий из таких положительных операторов, что $\sum\limits_{k=1}^{8} M_k^\theta = I_{\mathcal{H}_A}$ (это следует из того, что подпространство $\mathfrak{N}_\theta$ удовлетворяет условию (7), см. [7]). Поскольку этот базис образует разложение единицы, его можно считать квантовой наблюдаемой $\mathcal{M}_\theta$. Используя предложение 1 из [7] и лемму 1, следствие 1 можно сформулировать следующим образом.

Следствие 2. *Пусть* $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ *– такие положительные числа, что* $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \pi$. *Тогда у всех одночастичных наблюдаемых* $\mathcal{M}_{\theta_i}$ *и всех двухчастичных наблюдаемых* $\mathcal{M}_{\theta_i} \otimes \mathcal{M}_{\theta_j}$ *нет неразличимых подпространств, а у трехчастичной наблюдаемой* $\mathcal{M}_{\theta_1} \otimes \mathcal{M}_{\theta_2} \otimes \mathcal{M}_{\theta_3}$ *есть неразличимое подпространство, порожденное векторами* (11).[3]

Отметим также, что теорема дает пример суперактивации двухшаговой квантовой пропускной способности при нулевой ошибке (т.е. величины $\frac{1}{2}\bar{Q}_0(\Phi^{\otimes 2})$, которая определяет скорость безошибочной передачи квантовых состояний при одновременном использовании двух копий канала).

[3] Подпространство $\mathcal{H}_0$ называется *неразличимым* для наблюдаемой $\mathcal{M}$, если применение этой наблюдаемой к любому состоянию с носителем в $\mathcal{H}_0$ дает одно и то же распределение вероятностей исходов измерения [7].

С л е д с т в и е 3. *Пусть* θ_1 *и* θ_2 *– такие положительные числа, что* $\theta_1+\theta_2 = \pi/2$. *Тогда* $\bar{Q}_0([\Phi_{\theta_1}\otimes\Phi_{\theta_2}]^{\otimes 2})>0$ *при том, что*

$$\bar{Q}_0(\Phi_{\theta_1}^{\otimes 2})=\bar{Q}_0(\Phi_{\theta_2}^{\otimes 2})=\bar{Q}_0(\Phi_{\theta_1}\otimes\Phi_{\theta_2})=0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы. Подпространство $\mathfrak{N}_\theta$ является расширением четырехмерного подпространства $\mathfrak{L}_\theta$, используемого в [6], т.е. $\mathfrak{L}_\theta\subset\mathfrak{N}_\theta$ при каждом θ, а значит, $\bar{Q}_0(\Phi_{\theta_1}\otimes\ldots\otimes\Phi_{\theta_n})\leqslant\bar{Q}_0(\Psi_{\theta_1}\otimes\ldots\otimes\Psi_{\theta_n})$ для любых каналов $\Psi_{\theta_1}\in\widehat{\mathfrak{L}}_{\theta_1},\ldots,$ $\Psi_{\theta_n}\in\widehat{\mathfrak{L}}_{\theta_n}$ (это следует из леммы 1).

Поэтому равенство $\bar{Q}_0(\Phi_\theta)=0$ при $\theta\neq\pi$, неравенство $\bar{Q}_0(\Phi_\pi)\leqslant 1$ и утверждение D) следуют из соответствующих утверждений теоремы 1 из [6].

Используя лемму 1, нетрудно проверить, что канал Φ_π полностью обратим на подпространстве, порожденном векторами $|\varphi\rangle=[1,i,0,0]^\top$ и $|\psi\rangle=[0,0,1,i]^\top$, что доказывает $\bar{Q}_0(\Phi_\pi)=1$.

Для доказательства утверждения B) в силу леммы 1 достаточно показать, что для любых $M_1\in\mathfrak{N}_{\theta_1},\ldots,M_n\in\mathfrak{N}_{\theta_n}$ имеют место равенства

$$\langle\psi|X|\varphi\rangle=0 \quad \text{и} \quad \langle\psi|X|\psi\rangle=\langle\varphi|X|\varphi\rangle, \tag{12}$$

где $X=M_1\otimes\ldots\otimes M_n$, а φ и ψ – векторы, определенные в (10).

Пусть $a_k,b_k,\ldots,h_k$ – элементы матрицы M_k (см. (9)). Имеем

$$\begin{aligned}2\langle\psi|X|\varphi\rangle&=\langle 3\ldots3|X|1\ldots1\rangle+i\langle 3\ldots3|X|2\ldots2\rangle-i\langle 4\ldots4|X|1\ldots1\rangle+\\&+\langle 4\ldots4|X|2\ldots2\rangle=g_1\ldots g_n(1+\gamma_1\ldots\gamma_n)+h_1\ldots h_n(i-i)=0,\end{aligned}$$

поскольку $\gamma_1\ldots\gamma_n=-1$ в силу условия $\theta_1+\ldots+\theta_n=\pi \pmod{2\pi}$,

$$\begin{aligned}2\langle\varphi|X|\varphi\rangle&=\langle 1\ldots1|X|1\ldots1\rangle+i\langle 1\ldots1|X|2\ldots2\rangle-i\langle 2\ldots2|X|1\ldots1\rangle+\\&+\langle 2\ldots2|X|2\ldots2\rangle=a_1\ldots a_n+i(b_1\ldots b_n-c_1\ldots c_n)+d_1\ldots d_n\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}2\langle\psi|X|\psi\rangle&=\langle 3\ldots3|X|3\ldots3\rangle+i\langle 3\ldots3|X|4\ldots4\rangle-i\langle 4\ldots4|X|3\ldots3\rangle+\\&+\langle 4\ldots4|X|4\ldots4\rangle=a_1\ldots a_n+i(b_1\ldots b_n-c_1\ldots c_n)+d_1\ldots d_n.\end{aligned}$$

Это доказывает выполнимость обоих равенств в (12).

Для доказательства утверждения C) необходимо показать, что подпространство $\mathfrak{N}_{\theta_1}\otimes\mathfrak{N}_{\theta_2}$ не удовлетворяет условию (8), если $|\theta_1|+|\theta_2|<\pi$. В случае $\theta_1=\theta_2=0$ это следует из утверждения D). Поэтому в силу симметрии можем считать, что $\theta_2\neq 0$.

Далее будем использовать изоморфизм

$$\mathbb{C}^n\otimes\mathbb{C}^m\ni x\otimes y \;\longleftrightarrow\; [x_1y,\ldots,x_ny]^\top\in\underbrace{\mathbb{C}^m\oplus\ldots\oplus\mathbb{C}^m}_{n} \tag{13}$$

и соответствующий изоморфизм

$$\mathfrak{M}_n\otimes\mathfrak{M}_m\ni A\otimes B \;\longleftrightarrow\; [a_{ij}B]\in\mathfrak{M}_{nm}. \tag{14}$$

Пусть U_1,U_2,V_1,V_2 – унитарные операторы в $\mathbb{C}^2$, имеющие (в каноническом базисе) матрицы

$$U_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&\gamma_1\end{bmatrix},\quad V_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&\gamma_2\end{bmatrix},\quad U_2=V_2=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}.$$

Отождествляя $\mathbb{C}^4$ с $\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2$, матрицы $M_1 \in \mathfrak{N}_{\theta_1}$ и $M_2 \in \mathfrak{N}_{\theta_2}$ можно представить в виде

$$M_1 = \begin{bmatrix} A_1 & e_1 U_1^* + f_1 U_2^* \\ g_1 U_1 + h_1 U_2 & A_1 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} A_2 & e_2 V_1^* + f_2 V_2^* \\ g_2 V_1 + h_2 V_2 & A_2 \end{bmatrix},$$

или, в соответствии с (14), в виде

$$M_1 = I_2 \otimes A_1 + |2\rangle\langle 1| \otimes [g_1 U_1 + h_1 U_2] + |1\rangle\langle 2| \otimes [e_1 U_1^* + f_1 U_2^*]$$

и

$$M_2 = I_2 \otimes A_2 + |2\rangle\langle 1| \otimes [g_2 V_1 + h_2 V_2] + |1\rangle\langle 2| \otimes [e_2 V_1^* + f_2 V_2^*],$$

где A_1 и A_2 – произвольные матрицы, а I_2 – единичная матрица из $\mathfrak{M}_2$.

Предположим, что в $\mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{C}^4$ существуют ортогональные единичные векторы φ и ψ, такие что

$$\langle\psi|M_1 \otimes M_2|\varphi\rangle = 0 \quad \text{и} \quad \langle\psi|M_1 \otimes M_2|\psi\rangle = \langle\varphi|M_1 \otimes M_2|\varphi\rangle \tag{15}$$

для всех $M_1 \in \mathfrak{N}_{\theta_1}$ и $M_2 \in \mathfrak{N}_{\theta_2}$.

В силу приведенных выше выражений для M_1 и M_2 имеем

$$\begin{aligned} &M_1 \otimes M_2 = [I_2 \otimes I_2] \otimes [A_1 \otimes A_2] + [I_2 \otimes |2\rangle\langle 1|] \otimes [A_1 \otimes [g_2 V_1 + h_2 V_2]] + \\ &\quad + [I_2 \otimes |1\rangle\langle 2|] \otimes [A_1 \otimes [e_2 V_1^* + f_2 V_2^*]] + [|2\rangle\langle 1| \otimes I_2] \otimes [[g_1 U_1 + h_1 U_2] \otimes A_2] + \dots \end{aligned}$$

Поскольку $\mathfrak{M}_2 \otimes \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}_4$, полагая $e_i = f_i = g_i = h_i = 0$, $i = 1, 2$, из (15) получаем

$$\langle\psi|I_4 \otimes A|\varphi\rangle = 0 \quad \text{и} \quad \langle\psi|I_4 \otimes A|\psi\rangle = \langle\varphi|I_4 \otimes A|\varphi\rangle \quad \forall A \in \mathfrak{M}_4.$$

В соответствии с (13) и (14) имеем

$$I_4 \otimes A = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A \end{bmatrix}, \quad |\varphi\rangle = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad |\psi\rangle = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix},$$

где x_i, y_i – векторы из $\mathbb{C}^4$. Поэтому приведенные выше соотношения можно переписать в виде

$$\sum_{i=1}^4 \langle y_i|A|x_i\rangle = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^4 \langle y_i|A|y_i\rangle = \sum_{i=1}^4 \langle x_i|A|x_i\rangle \quad \forall A \in \mathfrak{M}_4,$$

что равносильно операторным равенствам

$$\sum_{i=1}^4 |y_i\rangle\langle x_i| = 0 \tag{16}$$

и

$$\sum_{i=1}^4 |y_i\rangle\langle y_i| = \sum_{i=1}^4 |x_i\rangle\langle x_i|. \tag{17}$$

Полагая $e_i = f_i = g_1 = h_1 = 0$, $i = 1, 2$, $A_2 = 0$, $(g_2, h_2) = (1, 0)$ и $(g_2, h_2) = (0, 1)$, из (15) получаем

$$\langle\psi|[I_2 \otimes |2\rangle\langle 1|] \otimes [A_1 \otimes V_k]|\varphi\rangle = 0$$

и

$$\langle\psi|[I_2\otimes|2\rangle\langle 1|]\otimes[A_1\otimes V_k]|\psi\rangle=\langle\varphi|[I_2\otimes|2\rangle\langle 1|]\otimes[A_1\otimes V_k]|\varphi\rangle$$

для всех A_1 из $\mathfrak{M}_2$ и $k=1,2$. В соответствии с (14) имеем

$$[I_2\otimes|2\rangle\langle 1|]\otimes[A_1\otimes V_k]=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\ A_1\otimes V_k&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&A_1\otimes V_k&0\end{bmatrix},$$

и следовательно, предыдущие равенства представляются в виде

$$\langle y_2|A\otimes V_k|x_1\rangle+\langle y_4|A\otimes V_k|x_3\rangle=0\quad\forall A\in\mathfrak{M}_2,\quad k=1,2, \tag{18}$$

и

$$\begin{aligned}&\langle y_2|A\otimes V_k|y_1\rangle+\langle y_4|A\otimes V_k|y_3\rangle=\\ &\ =\langle x_2|A\otimes V_k|x_1\rangle+\langle x_4|A\otimes V_k|x_3\rangle\quad\forall A\in\mathfrak{M}_2,\quad k=1,2.\end{aligned} \tag{19}$$

Аналогично, полагая $e_i=f_i=g_2=h_2=0$, $i=1,2$, $A_1=0$, $(g_1,h_1)=(1,0)$ и $(g_1,h_1)=(0,1)$, из (15) получаем равенства

$$\langle y_3|U_k\otimes A|x_1\rangle+\langle y_4|U_k\otimes A|x_2\rangle=0\quad\forall A\in\mathfrak{M}_2,\quad k=1,2, \tag{20}$$

и

$$\begin{aligned}&\langle y_3|U_k\otimes A|y_1\rangle+\langle y_4|U_k\otimes A|y_2\rangle=\\ &\ =\langle x_3|U_k\otimes A|x_1\rangle+\langle x_4|U_k\otimes A|x_2\rangle\quad\forall A\in\mathfrak{M}_2,\quad k=1,2.\end{aligned} \tag{21}$$

В силу симметрии условия (15) относительно φ и ψ из (18) и (20) следует, соответственно, что

$$\langle x_2|A\otimes V_k|y_1\rangle+\langle x_4|A\otimes V_k|y_3\rangle=0\quad\forall A\in\mathfrak{M}_2,\quad k=1,2, \tag{22}$$

и

$$\langle x_3|U_k\otimes A|y_1\rangle+\langle x_4|U_k\otimes A|y_2\rangle=0\quad\forall A\in\mathfrak{M}_2,\quad k=1,2. \tag{23}$$

Наконец, полагая $A_1=A_2=0$ и выбирая соответствующие значения e_i,f_i,g_i,h_i, $i=1,2$, из (15) получаем равенства

$$\begin{aligned}&\langle y_4|U_k\otimes V_l|x_1\rangle=\langle x_4|U_k\otimes V_l|y_1\rangle=0,&&k,l=1,2, &(24)\\ &\langle y_4|U_k\otimes V_l|y_1\rangle=\langle x_4|U_k\otimes V_l|x_1\rangle,&&k,l=1,2, &(25)\\ &\langle y_3|U_k\otimes V_l^*|x_2\rangle=\langle x_3|U_k\otimes V_l^*|y_2\rangle=0,&&k,l=1,2, &(26)\\ &\langle y_3|U_k\otimes V_l^*|y_2\rangle=\langle x_3|U_k\otimes V_l^*|x_2\rangle,&&k,l=1,2. &(27)\end{aligned}$$

Покажем, что система (16)–(27) не имеет нетривиальных решений.

Предварительно докажем ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 2. A) *Из уравнений* (16), (17) *следует, что все векторы* x_i,y_i, $i=\overline{1,4}$, *лежат в некотором двумерном подпространстве пространства* $\mathbb{C}^4$.

B) *Если* $x_{i_0}=y_{i_0}=0$ *при некотором* i_0, *то из уравнений* (16), (17) *следует, что все векторы* x_i,y_i, $i=\overline{1,4}$, *коллинеарны.*

Доказательство. A) Рассмотрим (4×4)-матрицы

$$X=[\langle x_i|x_j\rangle],\quad Y=[\langle y_i|y_j\rangle],\quad Z=[\langle x_i|y_j\rangle].$$

Нетрудно видеть, что из (16) следует равенство $XY = 0$, а (17) показывает, что $X^2 = ZZ^*$ и $Y^2 = Z^*Z$. Поэтому $\operatorname{rank} X = \operatorname{rank} Y \leqslant 2$.

Поскольку в силу (17) множества $\{x_i\}_{i=1}^4$ и $\{y_i\}_{i=1}^4$ имеют одинаковую линейную оболочку, из последнего неравенства следует, что размерность этой линейной оболочки не превосходит 2.

B) То же самое рассуждение с (3×3)-матрицами X, Y, Z показывает, что $\operatorname{rank} X = \operatorname{rank} Y \leqslant 1$.

Л е м м а 3. A) *Условие*

$$\langle z_4 | U_k \otimes V_l | z_1 \rangle = 0, \quad k, l = 1, 2, \tag{28}$$

выполнено тогда и только тогда, когда пара (z_1, z_4) *имеет один из следующих видов*:

$$1)\ z_1 = \begin{bmatrix}\mu_1\\ s\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}, \quad z_4 = \begin{bmatrix}\bar\mu_1\\ -s\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}c\\ d\end{bmatrix};$$

$$2)\ z_1 = \begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}\mu_2\\ s\end{bmatrix}, \quad z_4 = \begin{bmatrix}c\\ d\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}\bar\mu_2\\ -s\end{bmatrix};$$

$$3)\ z_1 = a\begin{bmatrix}\mu_1\\ 1\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}\mu_2\\ s\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}\mu_1\\ -1\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}\mu_2\\ -s\end{bmatrix}, \quad z_4 = c\begin{bmatrix}\bar\mu_1\\ 1\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}\bar\mu_2\\ -s\end{bmatrix} + d\begin{bmatrix}\bar\mu_1\\ -1\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}\bar\mu_2\\ s\end{bmatrix};$$

$$4)\ z_1 = h\begin{bmatrix}\mu_1\\ s\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}\mu_2\\ t\end{bmatrix}, \quad z_4 = \begin{bmatrix}\bar\mu_1\\ -s\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}c\\ d\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}\bar\mu_2\\ -t\end{bmatrix};$$

$$5)\ z_1 = \begin{bmatrix}\mu_1\\ -s\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}c\\ d\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}\mu_2\\ -t\end{bmatrix}, \quad z_4 = h\begin{bmatrix}\bar\mu_1\\ s\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}\bar\mu_2\\ t\end{bmatrix},$$

где $\mu_k = \sqrt{\gamma_k}$, $k = 1, 2$, *и* $a, b, c, d, h \in \mathbb{C}$, $s = \pm 1$, $t = \pm 1$.

B) *Из выполнимости* (24), (25) *для векторов* x_i, y_i, $i = 1, 4$, *следует, что*

$$\langle y_4 | U_k \otimes V_l | y_1 \rangle = \langle x_4 | U_k \otimes V_l | x_1 \rangle = 0, \quad k, l = 1, 2.$$

Л е м м а 4. A) *Условие*

$$\langle z_3 | U_k \otimes V_l^* | z_2 \rangle = 0, \quad k, l = 1, 2, \tag{29}$$

выполнено тогда и только тогда, когда пара (z_2, z_3) *имеет один из следующих видов*:

$$1)\ z_2 = \begin{bmatrix}\mu_1\\ s\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}, \quad z_3 = \begin{bmatrix}\bar\mu_1\\ -s\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}c\\ d\end{bmatrix};$$

$$2)\ z_2 = \begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}\bar\mu_2\\ s\end{bmatrix}, \quad z_3 = \begin{bmatrix}c\\ d\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}\mu_2\\ -s\end{bmatrix};$$

$$3)\ z_2 = a\begin{bmatrix}\mu_1\\ 1\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}\bar\mu_2\\ s\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}\mu_1\\ -1\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}\bar\mu_2\\ -s\end{bmatrix}, \quad z_3 = c\begin{bmatrix}\bar\mu_1\\ -1\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}\mu_2\\ s\end{bmatrix} + d\begin{bmatrix}\bar\mu_1\\ 1\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}\mu_2\\ -s\end{bmatrix};$$

$$4)\ z_2 = h\begin{bmatrix}\mu_1\\ s\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}\bar\mu_2\\ t\end{bmatrix}, \quad z_3 = \begin{bmatrix}\bar\mu_1\\ -s\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}c\\ d\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}\mu_2\\ -t\end{bmatrix};$$

$$5)\ z_2 = \begin{bmatrix}\mu_1\\ -s\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}c\\ d\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}\bar\mu_2\\ -t\end{bmatrix}, \quad z_3 = h\begin{bmatrix}\bar\mu_1\\ s\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}\mu_2\\ t\end{bmatrix},$$

где $\mu_k = \sqrt{\gamma_k}$, $k = 1, 2$, *и* $a, b, c, d, h \in \mathbb{C}$, $s = \pm 1$, $t = \pm 1$.

B) *Из выполнимости* (26), (27) *для векторов* x_i, y_i, $i = 2, 3$, *следует, что*

$$\langle y_3 | U_k \otimes V_l^* | y_2 \rangle = \langle x_3 | U_k \otimes V_l^* | x_2 \rangle = 0, \quad k, l = 1, 2.$$

Доказательство лемм 3, 4 дано в Приложении.

Лемма 5. *Если* $|\theta_1| + |\theta_2| < \pi$, *то* $\langle x|U_1|x\rangle \neq 0$ *и* $\langle x|V_1|x\rangle \neq 0$ *для любого ненулевого вектора* $x \in \mathbb{C}^2$.

Доказательство. Поскольку $\theta_1, \theta_2 \neq \pi$, то $\langle x|U_1|x\rangle = |x_1|^2 + \gamma_1|x_2|^2 \neq 0$ и $\langle x|V_1|x\rangle = |x_1|^2 + \gamma_2|x_2|^2 \neq 0$ для любого вектора $|x\rangle = [x_1, x_2]^\top \neq 0$. ▲

Лемма 6. *Если* $|\theta_1| + |\theta_2| < \pi$, *то* $\langle y|U_1 \otimes V_1|y\rangle \neq 0$ *и* $\langle y|U_1 \otimes V_1^*|y\rangle \neq 0$ *для любого ненулевого вектора* $y \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$.

Доказательство. Поскольку $U_1 \otimes V_1 = \mathrm{diag}\{1, \gamma_2, \gamma_1, \gamma_1\gamma_2\}$, то равенство $\langle y|U_1 \otimes V_1|y\rangle = 0$ для вектора $|y\rangle = [y_1, y_2, y_3, y_4]^\top$ означает, что

$$|y_1|^2 + |y_2|^2\gamma_2 + |y_3|^2\gamma_1 + |y_4|^2\gamma_1\gamma_2 = 0.$$

В силу условия $|\theta_1| + |\theta_2| < \pi$ числа $0, 1, \gamma_2, \gamma_1, \gamma_1\gamma_2$ являются крайними точками выпуклого пятиугольника на комплексной плоскости, поэтому последнее равенство возможно, только если $y_i = 0$ для всех i.

Аналогично доказывается, что из $\langle y|U_1 \otimes V_1^*|y\rangle = 0$ следует $y = 0$. ▲

Лемма 7. *Пусть* p *и* q *– комплексные числа, такие что* $|p|^2 + |q|^2 = 1$. *Если* $\{|x_i\rangle\}_{i=1}^4$ *и* $\{|y_i\rangle\}_{i=1}^4$ *– некоторое решение системы* (16)–(27), *то* $\{|px_i - qy_i\rangle\}_{i=1}^4$ *и* $\{|\bar{q}x_i + \bar{p}y_i\rangle\}_{i=1}^4$ *– также решение системы* (16)–(27).

Доказательство. Достаточно показать инвариантность условия

$$\langle\varphi|A|\psi\rangle = \langle\psi|A|\varphi\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle - \langle\varphi|A|\varphi\rangle = 0$$

относительно “вращения” $|\varphi\rangle \mapsto p|\varphi\rangle - q|\psi\rangle$, $|\psi\rangle \mapsto \bar{q}|\varphi\rangle + \bar{p}|\psi\rangle$. ▲

Лемма 8. *Если* $|\theta_1| + |\theta_2| < \pi$, *то система* (16)–(27) *не имеет нетривиальных решений вида* $|x_i\rangle = \alpha_i|z\rangle$ *и* $|y_i\rangle = \beta_i|z\rangle$, $i = \overline{1,4}$.

Доказательство. Предположим, что $|x_i\rangle = \alpha_i|z\rangle$ и $|y_i\rangle = \beta_i|z\rangle$, $i = \overline{1,4}$, – нетривиальное решение системы (16)–(27). Тогда из равенства (16) следует, что $|\alpha\rangle = [\alpha_1, \ldots, \alpha_4]^\top$ и $|\beta\rangle = [\beta_1, \ldots, \beta_4]^\top$ – ортогональные ненулевые векторы с одинаковой нормой. В силу леммы 6 из уравнений (24)–(27) и вторых утверждений лемм 3, 4 следует, что

$$\alpha_1\alpha_4 = \alpha_1\beta_4 = \beta_1\alpha_4 = \beta_1\beta_4 = \alpha_2\alpha_3 = \alpha_2\beta_3 = \beta_2\alpha_3 = \beta_2\beta_3 = 0.$$

Это возможно, только если одна из пар $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_4, \beta_4)$ и одна из пар $(\alpha_2, \beta_2), (\alpha_3, \beta_3)$ – нулевые.

Предположим, что $\alpha_1 = \beta_1 = 0$. Тогда $|\alpha_4| + |\beta_4| > 0$, поскольку в противном случае $\langle\beta|\alpha\rangle \neq 0$, и в силу леммы 7 можно считать, что $\alpha_4 \neq 0$. Из (22) при $A = U_1$ и из (23) при $A = V_1$ следует в силу леммы 6, что $\alpha_4\beta_2 = \alpha_4\beta_3 = 0$, что дает $\beta_2 = \beta_3 = 0$. Поэтому условие $\langle\beta|\alpha\rangle = 0$ может выполняться, только если $|\beta\rangle = 0$.

Аналогично можно показать, что предположение $\alpha_4 = \beta_4 = 0$ приводит к противоречию. ▲

Пусть $\{x_i\}_1^4$ и $\{y_i\}_1^4$ – нетривиальное решение системы (16)–(27).

Если $x_i \nparallel y_i$ для некоторого i, то из (24)–(27) и вторых утверждений лемм 3, 4 следует, что

$$\langle y_{5-i}|W_i|x_i\rangle = \langle x_{5-i}|W_i|y_i\rangle = \langle x_{5-i}|W_i|x_i\rangle = \langle y_{5-i}|W_i|y_i\rangle = 0,$$

где $W_1 = U_1 \otimes V_1$, $W_2 = U_1 \otimes V_1^*$, $W_3 = U_1^* \otimes V_1$, $W_4 = U_1^* \otimes V_1^*$. Поскольку $x_{5-i}, y_{5-i} \in \mathrm{lin}\{x_i, y_i\}$ в силу части A) леммы 2, то из этих равенств следует, что $\langle x_{5-i}|W_i|x_{5-i}\rangle = \langle y_{5-i}|W_i|y_{5-i}\rangle = 0$. Лемма 6 показывает, что $x_{5-i} = y_{5-i} = 0$. В силу части B) леммы 2 это противоречит предположению $x_i \nparallel y_i$.

Поэтому $x_i \parallel y_i$ для всех $i = \overline{1,4}$. В силу леммы 8 можем далее считать, что

$$|x_i\rangle = \alpha_i|z_i\rangle \text{ и } |y_i\rangle = \beta_i|z_i\rangle, \text{ где } |z_i\rangle \text{ – неколлинеарные векторы}^4. \tag{30}$$

Из части B) леммы 2 следует, что $|\alpha_i| + |\beta_i| > 0$, $i = \overline{1,4}$. Уравнения (16), (17) принимают вид

$$\sum_{i=1}^{4} \bar{\beta}_i \alpha_i |z_i\rangle\langle z_i| = 0, \tag{31}$$

$$\sum_{i=1}^{4} \left[|\beta_i|^2 - |\alpha_i|^2\right] |z_i\rangle\langle z_i| = 0. \tag{32}$$

В силу леммы 7 можно считать, что $\beta_1 = 0$ и $\alpha_1 \neq 0$. Возможны два случая:

1) Если $\beta_i\alpha_i \neq 0$ для всех $i > 1$, то из (31) и леммы 9 (см. Приложение) следует, что $z_2 \parallel z_3 \parallel z_4$. Тогда из (32) вытекает равенство

$$|\alpha_1|^2 |z_1\rangle\langle z_1| + [\ldots]|z_2\rangle\langle z_2| = 0,$$

а значит, $z_1 \parallel z_2 \parallel z_3 \parallel z_4$ вопреки предположению (30).

2) Если существует такое $k > 1$, что $\beta_k\alpha_k = 0$, то (31) показывает, что либо $\beta_i\alpha_i \neq 0$ и $\beta_j\alpha_j \neq 0$, либо $\beta_i\alpha_i = \beta_j\alpha_j = 0$, где i и $j > i$ – дополнительные индексы к 1 и k.

Если $\beta_i\alpha_i \neq 0$ и $\beta_j\alpha_j \neq 0$, то из (31) следует, что $z_i \parallel z_j$. Тогда из (32) вытекает равенство

$$|\alpha_1|^2 |z_1\rangle\langle z_1| + p|z_k\rangle\langle z_k| + [\ldots]|z_i\rangle\langle z_i| = 0,$$

где p – ненулевое число (равное либо $|\alpha_k|^2$, либо $-|\beta_k|^2$), а значит, $z_1 \parallel z_k$ в силу леммы 9.

Таким образом, $z_1 \parallel z_k$ и $z_i \parallel z_j$. Лемма 6 и уравнения (24), (26) показывают, что $k \neq 4$ и $(i,j) \neq (2,3)$. Поэтому есть только две возможности:

a) $k = 2$, $i = 3$, $j = 4$. В этом случае $z_3 \parallel z_4$, и из (22) при $A = U_1$ следует, что

$$\bar{\alpha}_4\beta_3\langle z_4|U_1 \otimes V_1|z_3\rangle = -\bar{\alpha}_2\beta_1\langle z_2|U_1 \otimes V_1|z_1\rangle = 0 \quad (\text{поскольку } \beta_1 = 0).$$

В силу леммы 6 это возможно, только если $\alpha_4\beta_3 = 0$, что противоречит предположению $\alpha_3\beta_3 \neq 0$, $\alpha_4\beta_4 \neq 0$.

b) $k = 3$, $i = 2$, $j = 4$. В этом случае $z_2 \parallel z_4$, и из (23) при $A = V_1$ следует, что

$$\bar{\alpha}_4\beta_2\langle z_4|U_1 \otimes V_1|z_2\rangle = -\bar{\alpha}_3\beta_1\langle z_3|U_1 \otimes V_1|z_1\rangle = 0 \quad (\text{поскольку } \beta_1 = 0).$$

В силу леммы 6 это возможно, только если $\alpha_4\beta_2 = 0$, что противоречит предположению $\alpha_2\beta_2 \neq 0$, $\alpha_4\beta_4 \neq 0$.

Таким образом, $\beta_i\alpha_i = 0$ для всех $i = \overline{1,4}$. Поскольку не все векторы $z_1, \ldots, z_4$ коллинеарны по предположению (30), равенство (32) и часть B) леммы 2 показывают, что есть два ненулевых α_i и два ненулевых β_i. Поэтому возможны (с точностью до перестановки) следующие случаи:

$$\text{a) } |\varphi\rangle, |\psi\rangle = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}; \quad \text{b) } |\varphi\rangle, |\psi\rangle = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ y_2 \\ 0 \\ y_4 \end{bmatrix}; \quad \text{c) } |\varphi\rangle, |\psi\rangle = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \\ x_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ y_2 \\ y_3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

[4] В том смысле, что среди векторов $|z_i\rangle$, $i = \overline{1,4}$, есть неколлинеарные пары.

где $x_1 \nparallel x_k$ и $y_i \nparallel y_j$ (если либо $x_1 \parallel x_k$, либо $y_i \parallel y_j$, то из равенства (32) следует, что $x_1 \parallel x_k \parallel y_i \parallel y_j$ вопреки предположению (30)).

Покажем сначала, что случай c) невозможен. Из (18) при $A = U_1$ и из (20) при $A = V_1$ следует, что

$$\langle y_2|U_1 \otimes V_1|x_1\rangle = \langle y_3|U_1 \otimes V_1|x_1\rangle = 0.$$

Поскольку $y_2 \nparallel y_3$, часть A) леммы 2 показывает, что $x_1 \in \mathrm{lin}\{y_2, y_3\}$, и из последнего равенства получаем $\langle x_1|U_1 \otimes V_1|x_1\rangle = 0$. В силу леммы 6 это возможно, только если $x_1 = 0$.

Труднее показать несовместность системы (16)–(27) для случаев a) и b). Рассмотрим эти случаи одновременно, обозначив $z_2 = x_2$, $z_3 = y_3$ в случае a), $z_2 = y_2$, $z_3 = x_3$ в случае b) и $z_1 = x_1$, $z_4 = y_4$ в обоих случаях. Система (16)–(27) дает следующие уравнения:

$$|x_1\rangle\langle x_1| + |x_i\rangle\langle x_i| = |y_j\rangle\langle y_j| + |y_4\rangle\langle y_4|, \tag{33}$$

где $(i, j) = (2, 3)$ в случае a) и $(i, j) = (3, 2)$ в случае b),

$$\langle z_3|U_k \otimes A|x_1\rangle = -\sigma_* \langle y_4|U_k \otimes A|z_2\rangle \quad \forall A \in \mathfrak{M}_2, \quad k = 1, 2, \tag{34}$$

$$\langle z_2|A \otimes V_k|x_1\rangle = +\sigma_* \langle y_4|A \otimes V_k|z_3\rangle \quad \forall A \in \mathfrak{M}_2, \quad k = 1, 2, \tag{35}$$

где $\sigma_* = 1$ в случае a) и $\sigma_* = -1$ в случае b),

$$\langle y_4|U_k \otimes V_l|x_1\rangle = 0, \quad k, l = 1, 2, \tag{36}$$

$$\langle z_3|U_k \otimes V_l^*|z_2\rangle = 0, \quad k, l = 1, 2. \tag{37}$$

Из (36), (37) следует, что пары (z_1, z_4) и (z_2, z_3) должны иметь один из пяти видов, представленных в утверждениях A) лемм 3 и 4 соответственно.

Предположим сначала, что обе пары (z_1, z_4) и (z_2, z_3) имеют вид 1 или 2. Тогда z_1, z_2, z_3, z_4 – векторы-произведения (векторы вида $u \otimes v$). В силу леммы 10 (см. Приложение) равенство (33) может выполняться только в следующих случаях 1)–4):

1) $|z_i\rangle = |p\rangle \otimes |a_i\rangle$, $i = \overline{1,4}$. Из (34) следует, что

$$\langle p|U_1|p\rangle\langle a_3|A|a_1\rangle = -\sigma_* \langle p|U_1|p\rangle\langle a_4|A|a_2\rangle \quad \forall A \in \mathfrak{M}_2.$$

Поскольку $\langle p|U_1|p\rangle \neq 0$ в силу леммы 5, это показывает, что $a_1 \parallel a_2$ и $a_3 \parallel a_4$. В случае a) это вместе с (33) дает $x_1 \parallel x_2 \parallel y_3 \parallel y_4$ вопреки предположению (30). В случае b) это означает, что $x_1 \parallel y_2$ и $x_3 \parallel y_4$. Предположение $x_1 \nparallel x_3$ и равенство (33) показывают, что это возможно, только если $|x_1\rangle\langle x_1| = |y_2\rangle\langle y_2|$ и $|x_3\rangle\langle x_3| = |y_4\rangle\langle y_4|$. Поэтому данный случай сводится к рассмотренному ниже случаю 4).

2) $|z_i\rangle = |a_i\rangle \otimes |p\rangle$, $i = \overline{1,4}$. Аналогично случаю 1), используя (35) вместо (34), этот случай также сводится к случаю 4).

3) $|x_1\rangle\langle x_1| = |y_4\rangle\langle y_4|$ и $|z_2\rangle\langle z_2| = |z_3\rangle\langle z_3|$. Это невозможно в силу уравнений (36), (37) и леммы 6.

4) $|x_1\rangle\langle x_1| = |y_i\rangle\langle y_i|$ и $|x_{5-i}\rangle\langle x_{5-i}| = |y_4\rangle\langle y_4|$, где $i = 3$ в случае a) и $i = 2$ в случае b).

Если $i = 3$, то $y_3 = \alpha x_1$, $y_4 = \beta x_2$, $|\alpha| = |\beta| = 1$, и из (34) при $\sigma_* = 1$ получаем

$$\bar{\alpha}\langle x_1|U_1 \otimes A|x_1\rangle = -\bar{\beta}\langle x_2|U_1 \otimes A|x_2\rangle \quad \forall A \in \mathfrak{M}_2. \tag{38}$$

Поскольку x_1 и x_2 – векторы-произведения, из этого соотношения и леммы 5 следует, что

$$x_1 = a \otimes p \quad \text{и} \quad x_2 = b \otimes p$$

для некоторых ненулевых векторов a, b, p. Поэтому из уравнений (36), (37) и леммы 5 следует, что

$$\langle b|U_k|a\rangle = \langle b|U_k^*|a\rangle = 0, \quad k = 1, 2.$$

Если $\gamma_1 \neq 1$ (т.е. $\theta_1 \neq 0$), то эти равенства не могут выполняться для ненулевых векторов a и b. Если $\gamma_1 = 1$, то уравнение (38) показывает, что $\bar{\alpha}\|a\|^2 = -\bar{\beta}\|b\|^2$, а из уравнения (35) при $\sigma_* = 1$ и леммы 5 следует, что $\bar{\beta}\alpha = 1$, т.е. $\alpha = \beta$.

Если $i = 2$, то аналогично, используя лемму 5, из (35) получаем

$$x_1 \parallel y_2 \parallel p \otimes a \quad \text{и} \quad x_3 \parallel y_4 \parallel p \otimes b$$

для некоторых ненулевых векторов a, b, p. Поэтому из уравнений (36), (37) и леммы 5 следуют равенства

$$\langle b|V_k|a\rangle = \langle b|V_k^*|a\rangle = 0, \quad k = 1, 2,$$

которые не могут выполняться для ненулевых векторов a и b (поскольку предположение $\theta_2 \neq 0$ влечет $\gamma_2 \neq \bar{\gamma}_2$).

Предположим теперь, что пара (x_1, y_4) имеет вид 3 из леммы 3, т.е.

$$x_1 = a \begin{bmatrix} \mu_1 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \mu_2 \\ s \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} \mu_1 \\ -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \mu_2 \\ -s \end{bmatrix}, \quad y_4 = c \begin{bmatrix} \bar{\mu}_1 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \bar{\mu}_2 \\ -s \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} \bar{\mu}_1 \\ -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \bar{\mu}_2 \\ s \end{bmatrix},$$

где $s = \pm 1$, и покажем несовместность системы (33)–(37) в случаях, когда пара (z_2, z_3) имеет вид 1, 2 или 3 из леммы 4, сводя их к рассмотренному выше случаю, в котором x_1, z_2, z_3, y_4 – векторы-произведения.

1) Пара (z_2, z_3) имеет вид 1, т.е.

$$z_2 = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ t \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}, \quad z_3 = \begin{bmatrix} \bar{\mu}_1 \\ -t \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad t = \pm 1, \quad |p| + |q| \neq 0, \quad |x| + |y| \neq 0.$$

Подставляя выражения для x_1, z_2, z_3, y_4 в (34) и замечая, что

$$\left\langle \begin{matrix} \bar{\mu}_1 \\ s \end{matrix} \middle| U_k \middle| \begin{matrix} \mu_1 \\ -s \end{matrix} \right\rangle = 0, \quad s = \pm 1, \quad k = 1, 2, \tag{39}$$

получаем

$$b \left\langle \begin{matrix} \bar{\mu}_1 \\ -1 \end{matrix} \middle| U_k \middle| \begin{matrix} \mu_1 \\ -1 \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| A \middle| \begin{matrix} \mu_2 \\ -s \end{matrix} \right\rangle = -\sigma_* \bar{c} \left\langle \begin{matrix} \bar{\mu}_1 \\ 1 \end{matrix} \middle| U_k \middle| \begin{matrix} \mu_1 \\ 1 \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \bar{\mu}_2 \\ -s \end{matrix} \middle| A \middle| \begin{matrix} p \\ q \end{matrix} \right\rangle \quad \text{при} \quad t = 1$$

и

$$a \left\langle \begin{matrix} \bar{\mu}_1 \\ 1 \end{matrix} \middle| U_k \middle| \begin{matrix} \mu_1 \\ 1 \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| A \middle| \begin{matrix} \mu_2 \\ s \end{matrix} \right\rangle = -\sigma_* \bar{d} \left\langle \begin{matrix} \bar{\mu}_1 \\ -1 \end{matrix} \middle| U_k \middle| \begin{matrix} \mu_1 \\ -1 \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \bar{\mu}_2 \\ s \end{matrix} \middle| A \middle| \begin{matrix} p \\ q \end{matrix} \right\rangle \quad \text{при} \quad t = -1.$$

Из выполнимости этого равенства для всех $A \in \mathfrak{M}_2$ следует, что

$$b\lambda_k^- \left| \begin{matrix} \mu_2 \\ -s \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right| = -\sigma_* \bar{c} \lambda_k^+ \left| \begin{matrix} p \\ q \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \bar{\mu}_2 \\ -s \end{matrix} \right| \quad \text{при} \quad t = 1$$

и

$$a\lambda_k^+ \left| \begin{matrix} \mu_2 \\ s \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right| = -\sigma_* \bar{d} \lambda_k^- \left| \begin{matrix} p \\ q \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \bar{\mu}_2 \\ s \end{matrix} \right| \quad \text{при} \quad t = -1,$$

где $\lambda_1^{\pm} = \left\langle \begin{matrix}\bar\mu_1\\ \pm 1\end{matrix} \middle| U_1 \middle| \begin{matrix}\mu_1\\ \pm 1\end{matrix} \right\rangle = 2\mu_1^2$ и $\lambda_2^{\pm} = \left\langle \begin{matrix}\bar\mu_1\\ \pm 1\end{matrix} \middle| U_2 \middle| \begin{matrix}\mu_1\\ \pm 1\end{matrix} \right\rangle = \pm 2\mu_1$. Поскольку $\lambda_1^+ = \lambda_1^- \neq 0$ и $\lambda_2^+ = -\lambda_2^- \neq 0$, из выполнимости этих равенств при $k = 1, 2$ следует, что $b = c = 0$ при $t = 1$ и $a = d = 0$ при $t = -1$. Поэтому x_1, z_2, z_3, y_4 – векторы-произведения.

2) Пара (z_2, z_3) имеет вид 2, т.е.

$$z_2 = \begin{bmatrix} p\\ q\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}\bar\mu_2\\ t\end{bmatrix}, \quad z_3 = \begin{bmatrix} x\\ y\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}\mu_2\\ -t\end{bmatrix}, \quad t = \pm 1, \quad |p| + |q| \neq 0, \quad |x| + |y| \neq 0.$$

Подставляя выражения для x_1, z_2, z_3, y_4 в (35) и замечая, что

$$\left\langle \begin{matrix}\bar\mu_2\\ t\end{matrix} \middle| V_k \middle| \begin{matrix}\mu_2\\ -t\end{matrix} \right\rangle = 0, \quad t = \pm 1, \quad k = 1, 2,$$

получаем

$$a \left\langle \begin{matrix} p\\ q\end{matrix} \middle| A \middle| \begin{matrix}\mu_1\\ 1\end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix}\bar\mu_2\\ t\end{matrix} \middle| V_k \middle| \begin{matrix}\mu_2\\ t\end{matrix} \right\rangle = \sigma_* \bar c \left\langle \begin{matrix}\bar\mu_1\\ 1\end{matrix} \middle| A \middle| \begin{matrix} x\\ y\end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix}\bar\mu_2\\ -t\end{matrix} \middle| V_k \middle| \begin{matrix}\mu_2\\ -t\end{matrix} \right\rangle \text{ при } t = s$$

и

$$b \left\langle \begin{matrix} p\\ q\end{matrix} \middle| A \middle| \begin{matrix}\mu_1\\ -1\end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix}\bar\mu_2\\ t\end{matrix} \middle| V_k \middle| \begin{matrix}\mu_2\\ t\end{matrix} \right\rangle = \sigma_* \bar d \left\langle \begin{matrix}\bar\mu_1\\ -1\end{matrix} \middle| A \middle| \begin{matrix} x\\ y\end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix}\bar\mu_2\\ -t\end{matrix} \middle| V_k \middle| \begin{matrix}\mu_2\\ -t\end{matrix} \right\rangle \text{ при } t = -s.$$

Из выполнимости этого равенства для всех $A \in \mathfrak{M}_2$ следует, что

$$a\nu_k^t \left| \begin{matrix}\mu_1\\ 1\end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} p\\ q\end{matrix} \right| = \sigma_* \bar c \nu_k^{-t} \left| \begin{matrix} x\\ y\end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix}\bar\mu_1\\ 1\end{matrix} \right| \quad \text{при} \quad t = s$$

и

$$b\nu_k^t \left| \begin{matrix}\mu_1\\ -1\end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} p\\ q\end{matrix} \right| = \sigma_* \bar d \nu_k^{-t} \left| \begin{matrix} x\\ y\end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix}\bar\mu_1\\ -1\end{matrix} \right| \quad \text{при} \quad t = -s,$$

где $\nu_1^t = \left\langle \begin{matrix}\bar\mu_2\\ t\end{matrix} \middle| V_1 \middle| \begin{matrix}\mu_2\\ t\end{matrix} \right\rangle = 2\mu_2^2$ и $\nu_2^t = \left\langle \begin{matrix}\bar\mu_2\\ t\end{matrix} \middle| V_2 \middle| \begin{matrix}\mu_2\\ t\end{matrix} \right\rangle = 2t\mu_2$. Поскольку $\nu_1^t = \nu_1^{-t} \neq 0$ и $\nu_2^t = -\nu_2^{-t} \neq 0$, из выполнимости этого равенства при $k = 1, 2$ следует, что $a = c = 0$ при $t = s$ и $b = d = 0$ при $t = -s$. Поэтому x_1, z_2, z_3, y_4 – векторы-произведения.

3) Пара (z_2, z_3) имеет вид 3, т.е.

$$z_2 = p \begin{bmatrix}\mu_1\\ 1\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}\bar\mu_2\\ t\end{bmatrix} + q \begin{bmatrix}\mu_1\\ -1\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}\bar\mu_2\\ -t\end{bmatrix}, \; z_3 = x \begin{bmatrix}\bar\mu_1\\ -1\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}\mu_2\\ t\end{bmatrix} + y \begin{bmatrix}\bar\mu_1\\ 1\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}\mu_2\\ -t\end{bmatrix},$$

где $t = \pm 1$. Если подставить выражения для x_1, z_2, z_3, y_4 в (34) (с учетом (39)), то левая и правая части этого равенства будут равны, соответственно,

$$\bar x b \left\langle \begin{matrix}\bar\mu_1\\ -1\end{matrix} \middle| U_k \middle| \begin{matrix}\mu_1\\ -1\end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix}\mu_2\\ t\end{matrix} \middle| A \middle| \begin{matrix}\mu_2\\ -s\end{matrix} \right\rangle + \bar y a \left\langle \begin{matrix}\bar\mu_1\\ 1\end{matrix} \middle| U_k \middle| \begin{matrix}\mu_1\\ 1\end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix}\mu_2\\ -t\end{matrix} \middle| A \middle| \begin{matrix}\mu_2\\ s\end{matrix} \right\rangle$$

и

$$-\sigma_* \bar c p \left\langle \begin{matrix}\bar\mu_1\\ 1\end{matrix} \middle| U_k \middle| \begin{matrix}\mu_1\\ 1\end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix}\bar\mu_2\\ -s\end{matrix} \middle| A \middle| \begin{matrix}\bar\mu_2\\ t\end{matrix} \right\rangle - \sigma_* \bar d q \left\langle \begin{matrix}\bar\mu_1\\ -1\end{matrix} \middle| U_k \middle| \begin{matrix}\mu_1\\ -1\end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix}\bar\mu_2\\ s\end{matrix} \middle| A \middle| \begin{matrix}\bar\mu_2\\ -t\end{matrix} \right\rangle.$$

Из выполнимости данного равенства для всех $A \in \mathfrak{M}_2$ следует, что

$$\left[\bar y a \left| \begin{matrix}\mu_2\\ s\end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix}\mu_2\\ -t\end{matrix} \right| + \sigma_* \bar c p \left| \begin{matrix}\bar\mu_2\\ t\end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix}\bar\mu_2\\ -s\end{matrix} \right| \right] = \varsigma_k \left[\sigma_* \bar d q \left| \begin{matrix}\bar\mu_2\\ -t\end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix}\bar\mu_2\\ s\end{matrix} \right| + \bar x b \left| \begin{matrix}\mu_2\\ -s\end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix}\mu_2\\ t\end{matrix} \right| \right],$$

где $\varsigma_k \doteq -\lambda_k^-/\lambda_k^+ = (-1)^k$. Это равенство выполняется при $k = 1,2$, только если операторы в квадратных скобках равны нулю. Поскольку $\mu_2 \neq \pm\bar{\mu}_2$ в силу предположения $\theta_2 \neq 0$ и условия $\theta_2 \neq \pi$, получаем, что $ya = cp = dq = xb = 0$. Это означает, что x_1, z_2, z_3, y_4 – векторы-произведения.

Аналогично показывается несовместность системы (33)–(37) (сведением к случаю векторов-произведений), когда пара (z_2, z_3) имеет вид 3, а пара (x_1, y_4) имеет вид 1 или 2.

Предположим, наконец, что пара (x_1, y_4) имеет вид 4, т.е.

$$x_1 = h\begin{bmatrix}\mu_1\\ s\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}\mu_2\\ t\end{bmatrix}, \quad y_4 = \begin{bmatrix}\bar{\mu}_1\\ -s\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}c\\ d\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}\bar{\mu}_2\\ -t\end{bmatrix}, \quad s,t = \pm 1,$$

а пара (z_2, z_3) произвольна. Покажем, что из уравнений (33)–(35) следует, что y_4 – вектор-произведение, а значит, пара (x_1, y_4) имеет вид 1 или 2.

Предположим, что y_4 не является вектором-произведением, и обозначим векторы $[\mu_1, s]^\top$ и $[\mu_2, t]^\top$ через $|s\rangle$ и $|t\rangle$. В этих обозначениях $|x_1\rangle = h|s\otimes t\rangle$.

В случае a) из условия (34) и леммы 11 (см. Приложение) следует, что $|x_2\rangle = |p\otimes t\rangle$ для некоторого вектора $|p\rangle$. Поэтому левая часть равенства (33) имеет вид

$$|h|^2|s\rangle\langle s| \otimes |t\rangle\langle t| + |p\rangle\langle p| \otimes |t\rangle\langle t| = \left[|h|^2|s\rangle\langle s| + |p\rangle\langle p|\right] \otimes |t\rangle\langle t|,$$

и из этого равенства получаем $|y_4\rangle\langle y_4| \leqslant \left[|h|^2|s\rangle\langle s| + |p\rangle\langle p|\right] \otimes |t\rangle\langle t|$. Это операторное неравенство может выполняться, только если y_4 – вектор-произведение.

В случае b) из условия (35) и леммы 11 следует, что $|x_3\rangle = |s\otimes q\rangle$ для некоторого вектора $|q\rangle$. Поэтому левая часть равенства (33) имеет вид

$$|h|^2|s\rangle\langle s| \otimes |t\rangle\langle t| + |s\rangle\langle s| \otimes |q\rangle\langle q| = |s\rangle\langle s| \otimes \left[|h|^2|t\rangle\langle t| + |q\rangle\langle q|\right],$$

и аналогично случаю a) заключаем, что y_4 – вектор-произведение.

Те же рассуждения, использующие уравнения (33)–(35) и лемму 11, показывают, что ни пара (x_1, y_4), ни пара (z_2, z_3) не могут иметь вид 4 или 5 (не совпадающие с видом 1 или 2).

Таким образом, показано, что система (16)–(27) не имеет нетривиальных решений. Это завершает доказательство утверждения C). ▲

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство лемм 3 и 4.

Доказательство леммы 3. A) Пусть $\langle z_4| = [a,b,c,d]$ и

$$W = \begin{bmatrix} a & \gamma_2 b & \gamma_1 c & \gamma_1\gamma_2 d\\ b & a & \gamma_1 d & \gamma_1 c\\ c & \gamma_2 d & a & \gamma_2 b\\ d & c & b & a\end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} \mu_1\mu_2 & \mu_1\mu_2 & \mu_1\mu_2 & \mu_1\mu_2\\ \mu_1 & -\mu_1 & \mu_1 & -\mu_1\\ \mu_2 & \mu_2 & -\mu_2 & -\mu_2\\ +1 & -1 & -1 & +1\end{bmatrix},$$

где $\mu_k = \sqrt{\gamma_k}$, $k = 1,2$. Отождествляя $A \otimes B$ с матрицей $\|a_{ij}B\|$, можно записать равенства $\langle z_4|U_k \otimes V_l|z_1\rangle = 0$, $k,l = 1,2$, в виде системы линейных уравнений

$$W|z_1\rangle = 0. \tag{40}$$

Нетрудно видеть, что $S^{-1}WS = \mathrm{diag}\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$, где

$$\begin{aligned} p_1 &= a + \mu_2 b + \mu_1 c + \mu_1\mu_2 d, & p_2 &= a - \mu_2 b + \mu_1 c - \mu_1\mu_2 d,\\ p_3 &= a + \mu_2 b - \mu_1 c - \mu_1\mu_2 d, & p_4 &= a - \mu_2 b - \mu_1 c + \mu_1\mu_2 d. \end{aligned} \tag{41}$$

Значит, система (40) равносильна системе $p_k u_k = 0$, $k = \overline{1,4}$, где $[u_1, u_2, u_3, u_4]^\top = S^{-1}|z_1\rangle$. Поэтому эта система имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда $p_1 p_2 p_3 p_4 = 0$, причем

$$\{p_k = 0\} \iff \{W|q_k\rangle = 0\},$$

где $|q_k\rangle$ – k-й столбец матрицы S.

Приравнивая нулю некоторые переменные из $p_1, \dots, p_4$, получим все пары (z_1, z_4), для которых $\langle z_4|U_k \otimes V_l|z_1\rangle = 0$, $k, l = 1, 2$. Имеем
a) $C_4^2 = 6$ способов выбрать $p_k = p_l = 0$ и $p_i \neq 0$, $i \neq k, l$;
b) $C_4^1 = 4$ способов выбрать $p_k = 0$ и $p_i \neq 0$, $i \neq k$;
c) $C_4^3 = 4$ способов выбрать $p_k = p_l = p_j = 0$ и $p_i \neq 0$, $i \neq k, l, j$;
(выбор $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 0$ означает $a = b = c = d = 0$, т.е. дает только тривиальное решение).

Отождествляя векторы $x \otimes y$ и $[x_1 y, x_2 y]^\top$, нетрудно показать, что

$$|q_1\rangle = \begin{bmatrix}\mu_1\\1\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}\mu_2\\1\end{bmatrix}, \qquad |q_2\rangle = \begin{bmatrix}\mu_1\\1\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}\mu_2\\-1\end{bmatrix},$$
$$|q_3\rangle = \begin{bmatrix}\mu_1\\-1\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}\mu_2\\1\end{bmatrix}, \qquad |q_4\rangle = \begin{bmatrix}\mu_1\\-1\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}\mu_2\\-1\end{bmatrix}$$

и что

$$p_1 = 0 \quad \iff \quad |z_4\rangle = \begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}\bar\mu_2\\-1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\bar\mu_1\\-1\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}c_3\\c_4\end{bmatrix}, \quad c_1, \dots, c_4 \in \mathbb{C},$$

$$p_2 = 0 \quad \iff \quad |z_4\rangle = \begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}\bar\mu_2\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\bar\mu_1\\-1\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}c_3\\c_4\end{bmatrix}, \quad c_1, \dots, c_4 \in \mathbb{C},$$

$$p_3 = 0 \quad \iff \quad |z_4\rangle = \begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}\bar\mu_2\\-1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\bar\mu_1\\1\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}c_3\\c_4\end{bmatrix}, \quad c_1, \dots, c_4 \in \mathbb{C},$$

$$p_4 = 0 \quad \iff \quad |z_4\rangle = \begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}\bar\mu_2\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\bar\mu_1\\1\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}c_3\\c_4\end{bmatrix}, \quad c_1, \dots, c_4 \in \mathbb{C}.$$

Поэтому шесть вариантов в a) соответствуют видам 1–3 в лемме 3 (например, вариант $p_1 = p_2 = 0$, $p_3, p_4 \neq 0$ соответствует виду 1 с $s = 1$), а четыре варианта в b) и четыре в c) соответствуют видам 4 и 5.

B) Введенную выше матрицу W при $z_4 = x_4$ и при $z_4 = y_4$ обозначим через W_x и W_y соответственно. Тогда равенства (24), (25) можно записать в виде системы

$$W_x|y_1\rangle = W_y|x_1\rangle = 0, \quad W_x|x_1\rangle = W_y|y_1\rangle = |c\rangle, \quad |c\rangle \in \mathbb{C}^4. \tag{42}$$

Поскольку $S^{-1}W_x S = \mathrm{diag}\{p_1^x, p_2^x, p_3^x, p_4^x\}$ и $S^{-1}W_y S = \mathrm{diag}\{p_1^y, p_2^y, p_3^y, p_4^y\}$, где $p_1^x, p_2^x, p_3^x, p_4^x$ и $p_1^y, p_2^y, p_3^y, p_4^y$ определены в (41) при $z_4 = x_4$ и $z_4 = y_4$ соответственно, система (42) равносильна системе

$$p_k^x v_k = p_k^y u_k = 0, \quad p_k^x u_k = p_k^y v_k = \widetilde{c}_k, \quad k = \overline{1,4}, \tag{43}$$

где $[u_1, u_2, u_3, u_4]^\top = S^{-1}|x_1\rangle$, $[v_1, v_2, v_3, v_4]^\top = S^{-1}|y_1\rangle$ и $[\widetilde{c}_1, \widetilde{c}_2, \widetilde{c}_3, \widetilde{c}_4]^\top = S^{-1}|c\rangle$. Система (43) совместна, только если $\widetilde{c}_k = 0$ для всех k. Действительно, если $p_k^y \neq 0$ при некотором k, то из первого равенства в (43) следует, что $u_k = 0$, и второе равенство в (43) показывает, что $\widetilde{c}_k = 0$. Поэтому $|c\rangle = S|\widetilde{c}\rangle = 0$. ▲

Лемма 4 следует из леммы 3 при замене γ_2 на $\bar\gamma_2$.

Вспомогательные утверждения.

Лемма 9. *Если* $|a\rangle\langle x| + |b\rangle\langle y| + |c\rangle\langle z| = 0$, *то либо* $a \parallel b \parallel c$, *либо* $x \parallel y \parallel z$.

Доказательство. Можно считать, что все векторы ненулевые (в противном случае утверждение леммы легко проверяется).

Пусть $p \perp x$. Тогда $\langle y|p\rangle|b\rangle + \langle z|p\rangle|c\rangle = 0$, а значит, либо $b \parallel c$, либо $\langle y|p\rangle = \langle z|p\rangle = 0$.

Если $b \parallel c$, то $|a\rangle\langle x| = -|b\rangle\langle y + \lambda z|$, $\lambda \in \mathbb{C}$, и следовательно, $a \parallel b \parallel c$.

Если $\langle y|p\rangle = \langle z|p\rangle = 0$, то $x \parallel y \parallel z$, поскольку вектор p выбран произвольно. ▲

Лемма 10. *Равенство*

$$X_1 \otimes Y_1 + X_2 \otimes Y_2 = X_3 \otimes Y_3 + X_4 \otimes Y_4, \tag{44}$$

где $X_i = |x_i\rangle\langle x_i|$, $Y_i = |y_i\rangle\langle y_i|$, $i = \overline{1,4}$, *возможно только в следующих случаях*:

1) $x_i \parallel x_j$ *для всех* i, j *и* $Y_1\|x_1\|^2 + Y_2\|x_2\|^2 = Y_3\|x_3\|^2 + Y_4\|x_4\|^2$;
2) $y_i \parallel y_j$ *для всех* i, j *и* $X_1\|y_1\|^2 + X_2\|y_2\|^2 = X_3\|y_3\|^2 + X_4\|y_4\|^2$;
3) $X_1 \otimes Y_1 = X_4 \otimes Y_4$ *и* $X_2 \otimes Y_2 = X_3 \otimes Y_3$;
4) $X_1 \otimes Y_1 = X_3 \otimes Y_3$ *и* $X_2 \otimes Y_2 = X_4 \otimes Y_4$.

Доказательство. Можно считать, что все векторы x_i, y_i ненулевые (в противном случае утверждение леммы легко проверяется).

Пусть $p \perp x_1$. Умножая обе части равенства (44) слева и справа на $|p\rangle\langle p| \otimes I$, получаем

$$|\langle x_2|p\rangle|^2 Y_2 = |\langle x_3|p\rangle|^2 Y_3 + |\langle x_4|p\rangle|^2 Y_4. \tag{45}$$

Если $x_2 \parallel x_1$, то $\langle x_3|p\rangle = \langle x_4|p\rangle = 0$, и следовательно, $x_1 \parallel x_2 \parallel x_3 \parallel x_4$, поскольку вектор p выбран произвольно, т.е. имеет место случай 1).

Если $x_2 \nparallel x_1$, то можно выбрать p так, что $\langle x_2|p\rangle \neq 0$. Из (45) следует, что либо $x_3 \nparallel x_1$, либо $x_4 \nparallel x_1$. Возможны следующие варианты:

a) Если $x_i \nparallel x_1$ для $i = 2, 3, 4$, то можно выбрать p так, что $\langle x_i|p\rangle \neq 0$, $i = 2, 3, 4$. Из (45) следует, что $y_2 \parallel y_3 \parallel y_4$ и (44) превращается в равенство $X_1 \otimes Y_1 = [\ldots] \otimes Y_2$, которое возможно, только если $y_1 \parallel y_2$. Поэтому $y_1 \parallel y_2 \parallel y_3 \parallel y_4$, т.е. имеет место случай 2).

b) Если $x_i \nparallel x_1$ для $i = 2, 3$, но $x_4 \parallel x_1$, то можно выбрать p так, что $\langle x_i|p\rangle \neq 0$, $i = 2, 3$. Из (45) следует, что $y_2 \parallel y_3$. Поэтому $x_4 = \alpha x_1$ и $y_3 = \beta y_2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Из (44) следует, что

$$X_1 \otimes [Y_1 - |\alpha|^2 Y_4] = [X_3|\beta|^2 - X_2] \otimes Y_2,$$

а значит, $Y_1 - |\alpha|^2 Y_4 = \lambda Y_2$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Если $\lambda \neq 0$, то из леммы 9 следует, что $y_1 \parallel y_2 \parallel y_3 \parallel y_4$, т.е. имеет место случай 2). Если $\lambda = 0$, то $y_1 \parallel y_4$ и $x_2 \parallel x_3$. Имеем

$$X_4 \otimes Y_4 = \gamma X_1 \otimes Y_1, \quad X_3 \otimes Y_3 = \delta X_2 \otimes Y_2, \quad \gamma, \delta \in \mathbb{C},$$

и из (44) следует, что $(1-\gamma) X_1 \otimes Y_1 = (\delta - 1) X_2 \otimes Y_2$. Поскольку $x_1 \nparallel x_2$, то $\gamma = \delta = 1$, т.е. имеет место случай 3).

c) Если $x_i \nparallel x_1$ для $i = 2, 4$, но $x_3 \parallel x_1$, то аналогичное рассуждение (с заменой $3 \leftrightarrow 4$) показывает, что имеет место случай 4).

Лемма 11. *Пусть* $U = \mathrm{diag}\{1, \gamma\}$, *и пусть* x, y – *ненулевые векторы в* $\mathbb{C}^2$. *Если* $\langle a|U \otimes A|x \otimes y\rangle = \langle c|U \otimes A|d\rangle$ *для всех* $A \in \mathfrak{M}_2$, *то либо* $|d\rangle = |z\rangle \otimes |y\rangle$, *либо* $|c\rangle = |p\rangle \otimes |q\rangle$ *для некоторых векторов* p, q, z *в* $\mathbb{C}^2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Изоморфизм $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \ni u \otimes v \longleftrightarrow [u_1 v, u_2 v]^\top \in \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2$ позволяет переписать условие леммы в виде

$$\left\langle \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} A & 0 \\ 0 & \gamma A \end{matrix} \middle| \begin{matrix} x_1 y \\ x_2 y \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} A & 0 \\ 0 & \gamma A \end{matrix} \middle| \begin{matrix} d_1 \\ d_2 \end{matrix} \right\rangle \quad \forall A \in \mathfrak{M}_2,$$

где a_1, a_2 – компоненты вектора a, и т.д. Имеем

$$x_1 \langle a_1 | A | y \rangle + x_2 \gamma \langle a_2 | A | y \rangle = \langle c_1 | A | d_1 \rangle + \gamma \langle c_2 | A | d_2 \rangle \quad \forall A \in \mathfrak{M}_2,$$

что равносильно равенству $|y\rangle\langle \bar{x}_1 a_1 + \bar{x}_2 \bar{\gamma} a_2| = |d_1\rangle\langle c_1| + \gamma |d_2\rangle\langle c_2|$. В силу леммы 9 это возможно либо когда $d_1 \parallel d_2 \parallel y$, что означает $|d\rangle = |z\rangle \otimes |y\rangle$, либо когда $c_1 \parallel c_2$, что означает $|c\rangle = |p\rangle \otimes |q\rangle$.

Автор благодарен А.С. Холево и участникам семинара "Квантовая вероятность, статистика, информация" (МИАН им. В.А. Стеклова) за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Smith G., Yard J.* Quantum Comminication with Zero-Capacity Channels // Science. 2008. V. 321. № 5897. P. 1812–1815.
2. *Cubitt T.S., Chen J., Harrow A.W.* Superactivation of the Asymptotic Zero-Error Classical Capacity of a Quantum Channel // IEEE Trans. Inform. Theory. 2011. V. 57. № 12. P. 8114–8126.
3. *Cubitt T.S., Smith G.* An Extreme Form of Superactivation for Quantum Zero-Error Capacities // IEEE Trans. Inform. Theory. 2012. V. 58. № 3. P. 1953–1961.
4. *Duan R.* Super-Activation of Zero-Error Capacity of Noisy Quantum Channels // `http://arXiv:0906.2527 [quant-ph]`, 2009.
5. *Smith G., Smolin J.A., Yard J.* Quantum Communication with Gaussian Channels of Zero Quantum Capacity // Nat. Photonics. 2011. V. 5. P. 624–627.
6. *Широков М.Е.* О квантовой пропускной способности при нулевой ошибке // УМН. 2015. Т. 70. № 1. С. 187–188.
7. *Широков М.Е., Шульман Т.В.* О суперактивации одношаговой квантовой пропускной способности с нулевой ошибкой и соответствующем свойстве квантовых измерений // Пробл. передачи информ. 2014. Т. 50. № 3. С. 35–50.
8. *Холево А.С.* Квантовые системы, каналы, информация. М.: МЦНМО, 2010.
9. *Нильсен М.А., Чанг И.* Квантовые вычисления и квантовая информация. М.: Мир, 2006.
10. *Medeiros R.A.C., de Assis F.M.* Quantum Zero-Error Capacity // Int. J. Quantum Inform. 2005. V. 3. № 1. P. 135–139.
11. *Duan R., Severini S., Winter A.* Zero-Error Communication via Quantum Channels, Noncommutative Graphs and a Quantum Lovász Number // IEEE Trans. Inform. Theory. 2013. V. 59. № 2. P. 1164–1174.
12. *Knill E., Laflamme R.* Theory of Quantum Error-Correcting Codes // Phys. Rev. A. 1997. V. 55. № 2. P. 900–911.

Широков Максим Евгеньевич
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
`msh@mi.ras.ru`

Поступила в редакцию
28.11.2014