ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том 46 **2010** **Вып. 3**

УДК 621.391.1 : 519.7

© 2010 г. **А. С. Холево, М. Е. Широков**[1]

ВЗАИМНАЯ И КОГЕРЕНТНАЯ ИНФОРМАЦИИ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ КВАНТОВЫХ КАНАЛОВ[2]

Статья посвящена изучению квантовой взаимной информации и когерентной информации – двух важных характеристик квантового канала связи. Даны определения этих величин в бесконечномерном случае и исследованы их свойства. В частности, доказано тождество, связывающее взаимные информации комплементарных каналов, с помощью которого установлено неожиданное свойство непрерывности взаимной и когерентной информаций. Получена верхняя граница для когерентной информации.

§ 1. Введение

Одним из достижений квантовой теории информации является открытие целого ряда важных энтропийных и информационных характеристик квантовых систем (см., например, [1, 2]). Некоторые из них – такие как χ-пропускная способность и квантовая взаимная информация – имеют непосредственные классические аналоги, другие – как когерентная информация и различные меры сцепленности – таких аналогов либо не имеют, либо они тривиальны.

До настоящего времени основное внимание в квантовой теории информации уделялось конечномерным системам, но в последние годы появился значительный интерес и к бесконечномерным системам: обширный класс, важный для приложений в квантовой оптике, образуют бозонные гауссовские системы [2, гл. 11]. Отметим, что в связи с потребностями квантовой статистической механики свойства квантовой энтропии и относительной энтропии, включая случай бесконечномерных систем, были изучены весьма подробно, например, в [3–5]. Рассмотрение энтропийных и информационных характеристик квантовых каналов связи с общих позиций теории операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве было предпринято в работах [6, 7], где изучались величины, связанные с классической пропускной способностью, – в первую очередь, χ-пропускная способность. Настоящая статья посвящена двум другим характеристикам – квантовой взаимной информации и когерентной информации. Первая из них тесно связана с классической пропускной способностью с использованием сцепленности между входом и выходом, а вторая – с квантовой пропускной способностью квантового канала. Одной из целей авторов было найти подходящее определение этих величин в бесконечномерном случае, которое не требовало бы никаких дополнительных искусственных предположений. Трудность,

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке АВЦП "Развитие научного потенциала высшей школы" (номер проекта 2.1.1/500), ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" (номер проекта 1.2.1, контракт 938) и Российского фонда фундаментальных исследований (номер проекта 10-01-00139а).

[2] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (номер проекта 09-01-00424а) и научной программы "Математическая теория управления" РАН.

которую удалось преодолеть, состоит в появлении неопределенностей в выражениях, содержащих разность энтропий, каждая из которых в бесконечномерном случае может принимать значение $+\infty$. Основным результатом является теорема, из которой следует, что эти величины естественным образом определены и конечны на множестве входных состояний с конечной энтропией, где они удовлетворяют тождествам (22), (23) для комплементарных каналов (при этом квантовая взаимная информация однозначно определена для всех входных состояний, но может принимать бесконечное значение, причем выполняется тождество (22)).

Статья организована следующим образом. В § 2, носящем вводный характер, дается описание соответствующих величин для конечномерной системы. В § 3 дано определение и изучены свойства квантовой взаимной информации. Основное тождество (22) для комплементарных каналов доказано в § 4. Когерентной информации посвящен § 5. В § 6 отмечено несколько неожиданное свойство непрерывности взаимной и когерентной информаций, вытекающее из тождества (22).

§ 2. Конечномерный случай

Рассмотрим квантовую систему, описываемую конечномерным гильбертовым пространством $\mathcal{H}$, и обозначим через $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ выпуклое множество *квантовых состояний*, задаваемых операторами плотности в $\mathcal{H}$, т.е. положительными операторами с единичным следом: $\rho \geqslant 0$, $\operatorname{Tr}\rho = 1$. *Энтропия* состояния ρ (энтропия фон Неймана) определяется соотношением[3]

$$H(\rho) = \operatorname{Tr}\eta(\rho), \quad \eta(x) = \begin{cases} -x\log x, & x > 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Пусть заданы три системы A, B, E, описываемые пространствами $\mathcal{H}_A$, $\mathcal{H}_B$, $\mathcal{H}_E$ соответственно, и изометрический оператор $V\colon \mathcal{H}_A \to \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_E$, тогда соотношения

$$\Phi(\rho) = \operatorname{Tr}_E V\rho V^*, \quad \widetilde{\Phi}(\rho) = \operatorname{Tr}_B V\rho V^*, \quad \rho \in \mathfrak{S}\left(\mathcal{H}_A\right), \tag{2}$$

где $\operatorname{Tr}_X(\cdot) \doteq \operatorname{Tr}_{\mathcal{H}_X}(\cdot)$, определяют вполне положительные, сохраняющие след отображения, т.е. квантовые каналы $\Phi\colon \mathfrak{S}\left(\mathcal{H}_A\right) \to \mathfrak{S}\left(\mathcal{H}_B\right)$ и $\widetilde{\Phi}\colon \mathfrak{S}\left(\mathcal{H}_A\right) \to \mathfrak{S}\left(\mathcal{H}_E\right)$, которые называются взаимно *комплементарными* (эта конструкция без изменений переносится и на бесконечномерный случай). Системы A, B описывают, соответственно, вход и выход канала Φ, а E – "окружение" (подробности см. в [2]). Тождественный оператор в пространстве $\mathcal{H}_X$ и тождественное преобразование множества $\mathfrak{S}\left(\mathcal{H}_X\right)$ будем обозначать I_X и Id_X соответственно.

Пусть $\rho = \rho_A$ – входное состояние в пространстве $\mathcal{H}_A$, ρ_B и ρ_E – результат действия каналов Φ и $\widetilde{\Phi}$, соответственно, на оператор плотности ρ_A. *Квантовой взаимной информацией* называется величина

$$I(\rho, \Phi) = H(A) + H(B) - H(E), \tag{3}$$

где для краткости через $H(A)$ обозначено $H(\rho_A)$ и т.д. [8]. Вводя "эталонную" систему $\mathcal{H}_R \cong \mathcal{H}_A$ и очищение $\psi_{AR} \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_R$ состояния ρ_A, взаимную информацию можно представить в виде

$$I(\rho, \Phi) = H(R) + H(B) - H(BR), \tag{4}$$

где $\rho_{BR} = (\Phi \otimes \mathrm{Id}_R)\left(|\psi_{AR}\rangle\langle\psi_{AR}|\right)$.

Взаимная информация $I(\rho, \Phi)$ обладает целым рядом свойств, подобных свойствам шенноновской информации (см. ниже предложение 1). В [9] (см. также [2])

[3] В настоящей статье log всюду обозначает натуральный логарифм.

показано, что величина

$$\max_{\rho} I(\rho, \Phi) = C_{ea}(\Phi) \tag{5}$$

дает классическую пропускную способность канала Φ с использованием сцепленности между входом и выходом.

Вводя аналогичную характеристику для комплементарного канала

$$I(\rho, \widetilde{\Phi}) = H(A) + H(E) - H(B) = H(R) + H(E) - H(ER), \tag{6}$$

имеем фундаментальное тождество

$$I(\rho, \Phi) + I(\rho, \widetilde{\Phi}) = 2H(\rho). \tag{7}$$

Важной компонентой квантовой взаимной информации $I(\rho, \Phi)$ является *когерентная информация* (см. [10])

$$I_c(\rho, \Phi) = H(B) - H(E) = H(B) - H(RB). \tag{8}$$

Это понятие тесно связано с квантовой пропускной способностью канала Φ, а именно, в [11] (см. также [2]) доказано, что величина

$$Q(\Phi) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \max_{\rho} I_c(\rho, \Phi^{\otimes n}) \tag{9}$$

дает квантовую пропускную способность канала Φ. Тождество (7) равносильно тому, что

$$I_c(\rho, \Phi) + I_c(\rho, \widetilde{\Phi}) = 0. \tag{10}$$

Целью настоящей статьи является определение и изучение свойств аналогов величин $I(\rho, \Phi)$ и $I_c(\rho, \Phi)$ в бесконечномерном гильбертовом пространстве; в частности, будет показано, что естественной областью определения когерентной информации, на которой выполняется аналог тождества (10), является множество состояний с конечной энтропией. В дальнейшем имеется в виду применение результатов настоящей статьи для обобщения соотношений (5), (9) на случай бесконечномерных каналов.

§ 3. Взаимная информация

Всюду далее $\mathcal{H}$ обозначает сепарабельное гильбертово пространство, а $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$ – пространство ядерных операторов, так что $\mathfrak{S}(\mathcal{H}) \subset \mathfrak{T}(\mathcal{H})$. Рассмотрим естественное продолжение энтропии $H(\rho) = \operatorname{Tr} \eta(\rho)$ квантового состояния $\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ на конус $\mathfrak{T}_+(\mathcal{H})$ всех положительных ядерных операторов.

О п р е д е л е н и е 1 [4]. *Энтропией* оператора $A \in \mathfrak{T}_+(\mathcal{H})$ будем называть величину

$$H(A) = \operatorname{Tr} A H\left(\frac{A}{\operatorname{Tr} A}\right) = \operatorname{Tr} \eta(A) - \eta(\operatorname{Tr} A). \tag{11}$$

Энтропия является вогнутой и полунепрерывной снизу функцией на конусе $\mathfrak{T}_+(\mathcal{H})$, принимающей значения из $[0, +\infty]$. Используя определение 1 и известные свойства энтропии фон Неймана (см. [5]), нетрудно получить следующие соотношения:

$$H(\lambda A) = \lambda H(A), \quad \lambda \geqslant 0, \tag{12}$$

$$H(A) + H(B - A) \leqslant H(B) \leqslant H(A) + H(B - A) + \operatorname{Tr} B h_2\left(\frac{\operatorname{Tr} A}{\operatorname{Tr} B}\right), \tag{13}$$

в которых $A, B \in \mathfrak{T}_+(\mathcal{H})$, $A \leqslant B$ и $h_2(x) = \eta(x) + \eta(1 - x)$.

Наряду с $H(A)$ будем также использовать функцию $S(A) = \operatorname{Tr} \eta(A)$ на конусе $\mathfrak{T}_+(\mathcal{H})$, совпадающую с $H(A)$ на $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$.

Определение 2. *Относительной энтропией* операторов $A, B \in \mathfrak{T}_+(\mathcal{H})$ называется величина

$$H(A \,\|\, B) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \langle e_i|\,(A \log A - A \log B + B - A)\,|e_i\rangle, & \operatorname{supp} A \subseteq \operatorname{supp} B, \\ +\infty, & \operatorname{supp} A \nsubseteq \operatorname{supp} B, \end{cases}$$

где $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^{+\infty}$ – ортонормированный базис из собственных векторов оператора A, и ряд состоит из неотрицательных членов [4].

Нам понадобится следующая

Лемма 1 [4, лемма 4]. *Пусть $\{P_n\}$ – неубывающая последовательность проекторов, сходящаяся к единичному оператору I в сильной операторной топологии, и пусть A и B – положительные ядерные операторы. Тогда последовательности $\{H(P_n A P_n)\}$ и $\{H(P_n A P_n \,\|\, P_n B P_n)\}$ являются неубывающими, причем*

$$H(A) = \lim_{n\to\infty} H(P_n A P_n) \quad \text{и} \quad H(A \,\|\, B) = \lim_{n\to\infty} H(P_n A P_n \,\|\, P_n B P_n).$$

Определение 3. *Квантовым каналом* называется такое линейное отображение $\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathcal{H}_A) \to \mathfrak{T}(\mathcal{H}_B)$, что для $n = 1, 2, \ldots$

$$\Phi \otimes \operatorname{Id}_n(\mathfrak{S}(\mathcal{H}_A \otimes \ell_n^2)) \subseteq \mathfrak{S}(\mathcal{H}_B \otimes \ell_n^2)$$

(ℓ_n^2 – n-мерное пространство со стандартным скалярным произведением).

Это условие – одна из версий свойства *полной положительности*. В частности, при $n = 1$ отсюда вытекает, что отображение Φ положительно и ограничено [12].

В дальнейшем нам понадобится фундаментальное свойство *монотонности* относительной энтропии, установленное в [4]:

$$H(\Phi(A) \,\|\, \Phi(B)) \leqslant H(A \,\|\, B) \tag{14}$$

для любого квантового канала Φ и произвольных положительных ядерных операторов A и B.

Определение 4. Пусть $\Phi\colon \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A) \to \mathfrak{S}(\mathcal{H}_B)$ – квантовый канал, а ρ – квантовое состояние из $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)$, имеющее спектральное представление $\rho = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda_i |e_i\rangle\langle e_i|$. *Взаимной информацией* назовем величину

$$I(\rho, \Phi) = H(\Phi \otimes \operatorname{Id}_R(|\varphi_\rho\rangle\langle\varphi_\rho|) \,\|\, \Phi(\rho) \otimes \rho),$$

где

$$|\varphi_\rho\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i} |e_i\rangle \otimes |e_i\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_R \tag{15}$$

– вектор очищения[4] состояния ρ.

[4] Это означает, что $\operatorname{Tr}_R |\varphi_\rho\rangle\langle\varphi_\rho| = \rho$.

Заметим, что в случае $\dim \mathcal{H}_A < +\infty$, $\dim \mathcal{H}_B < +\infty$ данное определение эквивалентно соотношениям (3), (4), поскольку

$$\begin{aligned}
&H(\Phi \otimes \mathrm{Id}_R(|\varphi_\rho\rangle\langle\varphi_\rho|) \,\|\, \Phi(\rho) \otimes \rho) = H(\rho_{BR} \,\|\, \rho_B \otimes \rho_R) = \\
&= \mathrm{Tr}(\rho_{BR}(\log(\rho_{BR}) - \log(\rho_B \otimes \rho_R))) = \\
&= -H(\rho_{BR}) + H(\rho_B) + H(\rho_R) = -H(BR) + H(B) + H(R).
\end{aligned}$$

Замечание 1. Определение величины $I(\rho, \Phi)$ не зависит от выбора пространства $\mathcal{H}_R$ и очищающего вектора φ_ρ. Это нетрудно показать, используя теорему 3.1.3 из [2] и свойства относительной энтропии.

В конечномерном случае вогнутость взаимной информации как функции ρ на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)$ следует из вогнутости условной энтропии $H(EB) - H(E)$ [2]. В случае $\dim \mathcal{H}_A = +\infty$ и $\dim \mathcal{H}_B < +\infty$ отсюда следует вогнутость взаимной информации как функции ρ на множестве $\mathfrak{S}_{\mathrm{f}}(\mathcal{H}_A) = \{\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A) \mid \mathrm{rank}\,\rho < +\infty\}$.

В дальнейшем сходимость квантовых состояний означает сходимость соответствующих операторов плотности к предельному оператору плотности по ядерной норме, что равносильно их слабой операторной сходимости [12] (см. также [6, Приложение A]). Отметим, что при этом энтропия и относительная энтропия полунепрерывны снизу по своим аргументам [3].

Обозначим через $\mathfrak{F}(A, B)$ множество всех каналов из $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)$ в $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_B)$, снабженное топологией *сильной сходимости* [7]. Сильная сходимость последовательности каналов $\{\Phi_n\} \subset \mathfrak{F}(A, B)$ к каналу $\Phi_0 \in \mathfrak{F}(A, B)$ означает, что $\lim\limits_{n\to+\infty} \Phi_n(\rho) = \Phi_0(\rho)$ для любого состояния $\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)$.

Следующее предложение посвящено обобщению на бесконечномерный случай результатов из [8].

П р е д л о ж е н и е 1. *Функция $(\rho, \Phi) \mapsto I(\rho, \Phi)$ неотрицательна, полунепрерывна снизу на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_A) \times \mathfrak{F}(A, B)$ и обладает следующими свойствами*:

1) вогнутость по ρ: $I(\lambda\rho_1 + (1-\lambda)\rho_2, \Phi) \geqslant \lambda I(\rho_1, \Phi) + (1-\lambda) I(\rho_2, \Phi)$;
2) выпуклость по Φ: $I(\rho, \lambda\Phi_1 + (1-\lambda)\Phi_2) \leqslant \lambda I(\rho, \Phi_1) + (1-\lambda) I(\rho, \Phi_2)$;
3) 1-е цепное правило: *для любых каналов $\Phi\colon \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A) \to \mathfrak{S}(\mathcal{H}_B)$, $\Psi\colon \mathfrak{S}(\mathcal{H}_B) \to \mathfrak{S}(\mathcal{H}_C)$ имеет место неравенство $I(\rho, \Psi \circ \Phi) \leqslant I(\rho, \Phi)$ при любом $\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)$*;
4) 2-е цепное правило: *для любых каналов $\Phi\colon \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A) \to \mathfrak{S}(\mathcal{H}_B)$, $\Psi\colon \mathfrak{S}(\mathcal{H}_B) \to \mathfrak{S}(\mathcal{H}_C)$ имеет место неравенство $I(\rho, \Psi \circ \Phi) \leqslant I(\Phi(\rho), \Psi)$ при любом $\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)$*;
5) субаддитивность: *для любых каналов $\Phi\colon \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A) \to \mathfrak{S}(\mathcal{H}_B)$, $\Psi\colon \mathfrak{S}(\mathcal{H}_C) \to \mathfrak{S}(\mathcal{H}_D)$ имеет место неравенство*

$$I(\omega, \Phi \otimes \Psi) \leqslant I(\omega_A, \Phi) + I(\omega_C, \Psi) \tag{16}$$

при любом $\omega \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_C)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Неотрицательность величины $I(\rho, \Phi)$ следует из неотрицательности относительной энтропии. Далее, полунепрерывность снизу функции $(\rho, \Phi) \mapsto I(\rho, \Phi)$ следует из полунепрерывности снизу относительной энтропии по совокупности переменных в силу приведенной ниже леммы 2 и замечания 1.

Для доказательства вогнутости функции $\rho \mapsto I(\rho, \Phi)$ предположим сначала, что $\dim \mathcal{H}_B < +\infty$. Пусть $\rho = \alpha\sigma_1 + (1-\alpha)\sigma_2$, и пусть $\{P_n\}$ – сильно возрастающая к I_A последовательность спектральных проекторов конечного ранга состояния ρ. Обозначим

$$\rho_n = \frac{P_n \rho P_n}{\mathrm{Tr}\, P_n \rho} = \frac{\alpha P_n \sigma_1 P_n + (1-\alpha) P_n \sigma_2 P_n}{\alpha\, \mathrm{Tr}\, P_n \sigma_1 + (1-\alpha)\, \mathrm{Tr}\, P_n \sigma_2} = \frac{\mu_1^n \sigma_1^n + \mu_2^n \sigma_2^n}{\mu_1^n + \mu_2^n},$$

где

$$\mu_1^n = \alpha \operatorname{Tr} P_n\sigma_1, \quad \sigma_1^n = \alpha \frac{P_n\sigma_1 P_n}{\mu_1^n},$$
$$\mu_2^n = (1-\alpha) \operatorname{Tr} P_n\sigma_2, \quad \sigma_2^n = (1-\alpha) \frac{P_n\sigma_2 P_n}{\mu_2^n}.$$

В силу упомянутой перед предложением 1 вогнутости функции $\rho \mapsto I(\rho, \Phi)$ на множестве $\mathfrak{S}_{\mathrm{f}}(\mathcal{H}_A)$ имеем

$$I(\rho_n, \Phi) \geqslant \frac{\mu_1^n}{\mu_1^n + \mu_2^n} I(\sigma_1^n, \Phi) + \frac{\mu_2^n}{\mu_1^n + \mu_2^n} I(\sigma_2^n, \Phi).$$

Из приведенной ниже леммы 3 следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} I(\rho_n, \Phi) = I(\rho, \Phi)$. Учитывая доказанную полунепрерывность снизу функции $\rho \mapsto I(\rho, \Phi)$, получаем

$$I(\rho, \Phi) \geqslant \liminf_{n\to\infty} \frac{\mu_1^n}{\mu_1^n + \mu_2^n} I(\sigma_1^n, \Phi) + \liminf_{n\to\infty} \frac{\mu_2^n}{\mu_1^n + \mu_2^n} I(\sigma_2^n, \Phi) \geqslant$$
$$\geqslant \alpha I(\sigma_1, \Phi) + (1-\alpha) I(\sigma_2, \Phi).$$

Теперь рассмотрим произвольный канал Φ и последовательность каналов $\Phi_n = \Pi_n \circ \Phi$ с конечномерным выходом, где

$$\Pi_n(\rho) = P_n\rho P_n + [\operatorname{Tr}((I - P_n)\rho)]|\psi\rangle\langle\psi|$$

– квантовый канал из $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_B)$ в $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_B)$ при каждом n, $\{P_n\}$ – возрастающая последовательность проекторов конечного ранга, сильно сходящаяся к I_B, $|\psi\rangle\langle\psi|$ – фиксированное чистое состояние из $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_B)$. Тогда для каждого n функция $\rho \mapsto I(\rho, \Phi_n)$ вогнута по доказанному выше, а так как

$$I(\rho, \Phi_n) \leqslant I(\rho, \Phi) \ \forall n \quad \text{и} \quad \liminf_{n\to\infty} I(\rho, \Phi_n) \geqslant I(\rho, \Phi)$$

в силу монотонности относительной энтропии и полунепрерывности снизу функции $\Phi \mapsto I(\rho, \Phi)$, то

$$I(\rho, \Phi) = \sup_n I(\rho, \Phi_n),$$

а значит, функция $\rho \mapsto I(\rho, \Phi)$ вогнута как поточечный предел последовательности вогнутых функций.

Выпуклость функции $\Phi \mapsto I(\rho, \Phi)$ следует из выпуклости относительной энтропии по совокупности аргументов [3].

Первое цепное правило непосредственно следует из определения 4 и свойства монотонности относительной энтропии.

Второе цепное правило также доказывается с использованием монотонности относительной энтропии следующим образом.

Пусть $|\varphi\rangle\langle\varphi|$ – очищение состояния $\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)$ в пространстве $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_R$, тогда $|\psi\rangle\langle\psi| = V \otimes I_R|\varphi\rangle\langle\varphi|V^* \otimes I_R$ – очищение состояния $\Phi(\rho) \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_B)$ в пространстве $\mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_E \otimes \mathcal{H}_R$ (здесь V – изометрия из представления (2) канала Φ). Поэтому

$$I(\Phi(\rho), \Psi) = H\left(\Psi \otimes \mathrm{Id}_{ER}(|\psi\rangle\langle\psi|) \,\|\, \Psi(\operatorname{Tr}_{ER}|\psi\rangle\langle\psi|) \otimes \operatorname{Tr}_B|\psi\rangle\langle\psi|\right).$$

Непосредственная проверка показывает, что взятие частичного следа по пространству $\mathcal{H}_E$ от каждого аргумента относительной энтропии в приведенном выше выражении преобразует правую часть этого выражения в

$$H\left((\Psi\circ\Phi)\otimes\mathrm{Id}_R(|\varphi\rangle\langle\varphi|)\,\|\,(\Psi\circ\Phi)(\mathrm{Tr}_R\,|\varphi\rangle\langle\varphi|)\otimes\mathrm{Tr}_A\,|\varphi\rangle\langle\varphi|\right)=I(\rho,\Psi\circ\Phi).$$

Свойство субаддитивности взаимной информации выведем из соответствующего свойства этой характеристики для конечномерных каналов (см. [2]).

Пусть $\{Q_n^X\}$ – возрастающая последовательность проекторов конечного ранга в пространстве $\mathcal{H}_X$, сильно сходящаяся к оператору I_X, где $X=B,D$. Последовательность каналов

$$\Pi_n^X(\rho)=Q_n^X\rho Q_n^X+\left(\mathrm{Tr}(I_X-Q_n^X)\rho\right)\tau_X$$

из $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_X)$ в $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_X)$, где τ_X – произвольное чистое состояние в пространстве $\mathcal{H}_X$, сильно сходится к тождественному каналу Id_X.

Пусть ω – произвольное состояние из $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_A\otimes\mathcal{H}_C)$. Пусть $\{P_n^X\}$ – возрастающая последовательность спектральных проекторов конечного ранга состояния ω_X, сильно сходящаяся к оператору I_X, где $X=A,C$.

Рассмотрим последовательность состояний

$$\omega^n=\left(\mathrm{Tr}\left((P_n^A\otimes P_n^C)\cdot\omega\right)\right)^{-1}(P_n^A\otimes P_n^C)\cdot\omega\cdot(P_n^A\otimes P_n^C),$$

сходящуюся к состоянию ω.

Непосредственная проверка показывает, что

$$\lambda_n\omega_X^n\leqslant\omega_X,\quad X=A,C,\quad \text{где}\quad \lambda_n=\mathrm{Tr}\left((P_n^A\otimes P_n^C)\cdot\omega\right).$$

В силу приведенной ниже леммы 4 имеем

$$\lim_{n\to+\infty}I(\omega_A^n,\Pi_n^B\circ\Phi)=I(\omega_A,\Phi)\quad\text{и}\quad\lim_{n\to+\infty}I(\omega_C^n,\Pi_n^D\circ\Psi)=I(\omega_C,\Psi).\tag{17}$$

Из субаддитивности взаимной информации для конечномерных каналов следует, что

$$I(\omega^n,(\Pi_n^B\circ\Phi)\otimes(\Pi_n^D\circ\Psi))\leqslant I(\omega_A^n,\Pi_n^B\circ\Phi)+I(\omega_C^n,\Pi_n^D\circ\Psi).$$

Переходя к пределу в этом неравенстве с учетом (17) и полунепрерывности снизу взаимной информации как функции пары (состояние, канал), получаем (16). ▲

В доказательстве предложения 1 использовались следующие леммы.

Лемма 2. *Пусть $\mathcal{H}$ – сепарабельное гильбертово пространство. Для любой последовательности состояний $\{\rho_n\}\subset\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, сходящейся к состоянию ρ_0, существует соответствующая последовательность очищений $\{\widehat{\rho}_n\}\subset\mathfrak{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{H})$, сходящаяся к очищению $\widehat{\rho}_0$ состояния ρ_0.*

Доказательство. Утверждение леммы вытекает из неравенства (см. [2, лемма 9.2.3])

$$\beta(\rho,\sigma)^2\leqslant\|\rho-\sigma\|_1$$

для расстояния Бюреса $\beta(\rho,\sigma)=\min\|\widehat{\rho}-\widehat{\sigma}\|_1$, где минимум берется по всем очищениям $\widehat{\rho}$ и $\widehat{\sigma}$ состояний ρ и σ. ▲

Лемма 3. *Пусть $\Phi\colon\mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)\to\mathfrak{S}(\mathcal{H}_B)$ – квантовый канал с $\dim\mathcal{H}_B<+\infty$, а ρ_0 – состояние из $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)$ со спектральным представлением $\rho_0=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\lambda_i|e_i\rangle\langle e_i|$.*

Пусть при каждом n

$$\rho_n = \frac{1}{\mu_n}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i|e_i\rangle\langle e_i|, \quad \text{где} \quad \mu_n = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i, \tag{18}$$

тогда $\lim\limits_{n\to\infty} I(\rho_n,\Phi) = I(\rho_0,\Phi)$.

Доказательство. Пусть $P_n = \sum\limits_{i=1}^{n}|e_i\rangle\langle e_i|$, $n = 1,2,\ldots$

Поскольку $\dim\mathcal{H}_B < \infty$, величина

$$I_n = H(\Phi\otimes\mathrm{Id}_R(\widehat{\rho}_n)\,\|\,\Phi(\rho_0)\otimes\rho_n) = \\ = \mu_n^{-1}H(Q_n\,(\Phi\otimes\mathrm{Id}_R(\widehat{\rho}_0))\,Q_n\,\|\,Q_n\,(\Phi(\rho_0)\otimes\rho_0)\,Q_n),$$

где

$$\widehat{\rho}_0 = \sum_{i,j=1}^{+\infty}\sqrt{\lambda_i\lambda_j}|e_i\rangle\langle e_j|\otimes|e_i\rangle\langle e_j|, \quad \widehat{\rho}_n = \mu_n^{-1}\sum_{i,j=1}^{n}\sqrt{\lambda_i\lambda_j}|e_i\rangle\langle e_j|\otimes|e_i\rangle\langle e_j|$$

и $Q_n = I_B\otimes P_n$, конечна. В силу леммы 1 имеем

$$\lim_{n\to\infty} I_n = H(\Phi\otimes\mathrm{Id}_R(\widehat{\rho}_0)\,\|\,\Phi(\rho_0)\otimes\rho_0) = I(\rho_0,\Phi) \leqslant +\infty. \tag{19}$$

Теперь докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = \lim\limits_{n\to\infty} I(\rho_n,\Phi)$, рассмотрев разность $I_n - I(\rho_n,\Phi)$. Учитывая, что $H(\Phi\otimes\mathrm{Id}_R(\widehat{\rho}_n)) < +\infty$, имеем

$$I_n - I(\rho_n,\Phi) = H(\Phi\otimes\mathrm{Id}_R(\widehat{\rho}_n)\,\|\,\Phi(\rho_0)\otimes\rho_n) - H(\Phi\otimes\mathrm{Id}_R(\widehat{\rho}_n)\,\|\,\Phi(\rho_n)\otimes\rho_n) = \\ = -H(\Phi\otimes\mathrm{Id}_R(\widehat{\rho}_n)) - \mathrm{Tr}(\Phi\otimes\mathrm{Id}_R(\widehat{\rho}_n))(\log\Phi(\rho_0)\otimes\rho_n) + H(\Phi\otimes\mathrm{Id}_R(\widehat{\rho}_n)) + \\ + \mathrm{Tr}(\Phi\otimes\mathrm{Id}_R(\widehat{\rho}_n))\log(\Phi(\rho_n)\otimes\rho_n) = A - B,$$

где

$$A = -\mathrm{Tr}(\Phi\otimes\mathrm{Id}_R(\widehat{\rho}_n))\log(\Phi(\rho_0)\otimes\rho_n), \\ B = -\mathrm{Tr}(\Phi\otimes\mathrm{Id}_R(\widehat{\rho}_n))\log(\Phi(\rho_n)\otimes\rho_n).$$

Воспользуемся свойством логарифма

$$\log(\rho\otimes\sigma) = \log(\rho)\otimes I + I\otimes\log(\sigma), \tag{20}$$

где в случае вырожденных операторов ρ или σ рассматриваются сужения на подпространства $\mathrm{supp}(\rho)$ и $\mathrm{supp}(\sigma)$, т.е.

$$P_\rho\otimes P_\sigma\,(\log(\rho\otimes\sigma)) = (P_\rho\log(\rho)P_\rho)\otimes P_\sigma + P_\rho\otimes(P_\sigma\log(\sigma)P_\sigma), \tag{21}$$

где P_ρ и P_σ – проекторы на $\mathrm{supp}(\rho)$ и $\mathrm{supp}(\sigma)$ соответственно. Учитывая, что $P_{\Phi(\rho_n)} \leqslant$ $\leqslant P_{\Phi(\rho_0)}$, получаем

$$A = -\mathrm{Tr}(\Phi\otimes\mathrm{Id}_R(\widehat{\rho}_n))(\log\Phi(\rho_0)\otimes I_R) - \mathrm{Tr}(\Phi\otimes\mathrm{Id}_R(\widehat{\rho}_n))(I_B\otimes\log(\rho_n)) = \\ = -\mathrm{Tr}\,\Phi(\rho_n)\log\Phi(\rho_0) + H(\rho_n).$$

Аналогично,

$$B = -\mathrm{Tr}(\Phi\otimes\mathrm{Id}_R(\widehat{\rho}_n))(\log\Phi(\rho_n)\otimes I_R) - \mathrm{Tr}(\Phi\otimes\mathrm{Id}_R(\widehat{\rho}_n))(I_B\otimes\log(\rho_n)) = \\ = H(\Phi(\rho_n)) + H(\rho_n).$$

Следовательно,

$$I_n - I(\rho_n, \Phi) = A - B = -\operatorname{Tr}\ \Phi(\rho_n)\log\Phi(\rho_0) - H(\Phi(\rho_n)) = H(\Phi(\rho_n)\,\|\,\Phi(\rho_0)).$$

В силу свойства монотонности относительной энтропии имеем

$$H(\Phi(\rho_n)\,\|\,\Phi(\rho_0)) \leqslant H(\rho_n\,\|\,\rho_0) = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\mu_n}\log\mu_n = -\log\mu_n.$$

Поскольку $\mu_n \to 1$ при $n \to \infty$, получаем $\lim\limits_{n\to\infty}(I_n - I(\rho_n, \Phi)) = 0$, что с учетом (19) дает

$$\lim_{n\to\infty} I(\rho_n, \Phi) = I(\rho_0, \Phi) \leqslant +\infty. \quad \blacktriangle$$

Л е м м а 4. *Пусть* Φ – *произвольный канал из* $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)$ *в* $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_B)$, *а* $\{\Pi_n\}$ – *последовательность каналов из* $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_B)$ *в* $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_B)$, *сильно сходящаяся к тождественному каналу. Пусть* $\{\rho_n\}$ – *последовательность состояний из* $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)$, *сходящаяся к состоянию* ρ_0, *такая что* $\lambda_n\rho_n \leqslant \rho_0$ *для некоторой последовательности* $\{\lambda_n\}$, *сходящейся к* 1. *Тогда*

$$\lim_{n\to+\infty} I(\rho_n, \Pi_n\circ\Phi) = I(\rho_0, \Phi).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку из неравенства $\lambda_n\rho_n \leqslant \rho_0$ следует разложение $\rho_0 = \lambda_n\rho_n + (1-\lambda_n)\sigma_n$, где σ_n – состояние из $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)$, из вогнутости и неотрицательности взаимной информации и первого цепного правила следует неравенство

$$\lambda_n I(\rho_n, \Pi_n\circ\Phi) \leqslant I(\rho_0, \Pi_n\circ\Phi) \leqslant I(\rho_0, \Phi),$$

которое показывает, что $\limsup\limits_{n\to+\infty} I(\rho_n, \Pi_n\circ\Phi) \leqslant I(\rho_0, \Phi)$. Это соотношение и полунепрерывность снизу функции $(\rho, \Phi) \mapsto I(\rho, \Phi)$ доказывают утверждение леммы. $\blacktriangle$

§ 4. Соотношение взаимных информаций комплементарных каналов

Главный результат этого параграфа – обобщение на бесконечномерный случай соотношения (7) между взаимными информациями пары комплементарных каналов (нетривиальность этого результата связана с возможной неопределенностью типа "$\infty - \infty$" в выражениях (4) и (6)).

Пусть $\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B, \mathcal{H}_E$ – сепарабельные гильбертовы пространства, и пусть $V\colon \mathcal{H}_A \to \mathcal{H}_B\otimes\mathcal{H}_E$ – изометрический оператор; тогда, как и в конечномерном случае, соотношения (2) определяют пару взаимно комплементарных каналов $\Phi, \widetilde{\Phi}$.

Т е о р е м а. *Для любого состояния* $\rho\in\mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)$ *имеет место соотношение*

$$I(\rho, \Phi) + I(\rho, \widetilde{\Phi}) = 2H(\rho). \tag{22}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{|h_i\rangle\}_{i=1}^{+\infty}$ – ортонормированный базис в пространстве $\mathcal{H}_E$, тогда

$$V|\varphi\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} V_i|\varphi\rangle\otimes|h_i\rangle,$$

где $V_i\colon \mathcal{H}_A \to \mathcal{H}_B$ – последовательность ограниченных операторов, удовлетворяющая условию $\sum\limits_{i=1}^{\infty} V_i^*V_i = I_A$, канал Φ имеет представление Крауса $\Phi(\rho) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} V_i\rho V_i^*$, а комплементарный канал $\widetilde{\Phi}$ имеет вид $\widetilde{\Phi}(\rho) = \sum\limits_{i,j=1}^{+\infty}\big[\operatorname{Tr} V_i\rho V_j^*\big]|h_i\rangle\langle h_j|$ (см. [13]).

Пусть $\rho = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i |e_i\rangle\langle e_i|$ – состояние конечного ранга в $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)$, а $\widehat{\rho}$ – его очищение в $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_R)$. Рассмотрим последовательность квантовых операций[5] $\Phi_n(\rho) = \sum\limits_{i=1}^{n} V_i \rho V_i^*$. Последовательность $\{\Phi_n\}$ сходится сильно и монотонно к каналу Φ (последнее означает, что $\Phi_n(\rho) \leqslant \Phi_{n+1}(\rho)$ при любых n и $\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)$).

Поскольку $\Phi_n \otimes \mathrm{Id}_R(\widehat{\rho})$ – состояние конечного ранга, имеем

$$\begin{aligned} X_n &= H\left(\Phi_n \otimes \mathrm{Id}_R(\widehat{\rho}) \,\|\, \Phi(\rho) \otimes \rho\right) = \\ &= -S(\Phi_n \otimes \mathrm{Id}_R(\widehat{\rho})) - \mathrm{Tr}(\Phi_n \otimes \mathrm{Id}_R(\widehat{\rho})) \log(\Phi(\rho) \otimes \rho) + R_n, \end{aligned}$$

где $R_n = 1 - \mathrm{Tr}\, \Phi_n(\rho) \to 0$ при $n \to \infty$. В силу доказанной в Приложении леммы 7 имеем $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = I(\rho, \Phi)$. Поскольку

$$\Phi_n \otimes \mathrm{Id}_R(\widehat{\rho}) = \mathrm{Tr}_E\, (I_B \otimes P_n \otimes I_R) \cdot (V \otimes I_R) \cdot \widehat{\rho} \cdot (V^* \otimes I_R) \cdot (I_B \otimes P_n \otimes I_R),$$

где $P_n = \sum\limits_{i=1}^{n} |h_i\rangle\langle h_i|$ – конечномерный проектор в пространстве $\mathcal{H}_E$, а частичный след берется в пространстве $\mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_E \otimes \mathcal{H}_R$, оператор $\Phi_n \otimes \mathrm{Id}_R(\widehat{\rho})$ изоморфен оператору

$$\widetilde{\Phi}_n(\rho) = \mathrm{Tr}_{BR}\, (I_B \otimes P_n \otimes I_R) \cdot (V \otimes I_R) \cdot \widehat{\rho} \cdot (V^* \otimes I_R) \cdot (I_B \otimes P_n \otimes I_R),$$

где $\widetilde{\Phi}_n(\cdot) = P_n \widetilde{\Phi}(\cdot) P_n$ – квантовая операция, комплементарная операции Φ_n. Поэтому $S(\Phi_n \otimes \mathrm{Id}_R(\widehat{\rho})) = S(\widetilde{\Phi}_n(\rho))$. Используя свойство логарифма (20) и учитывая, что $\Phi_n(\cdot) \leqslant \Phi(\cdot)$, получаем

$$\begin{aligned} &-\mathrm{Tr}(\Phi_n \otimes \mathrm{Id}_R(\widehat{\rho})) \log(\Phi(\rho) \otimes \rho) = \\ &= -\mathrm{Tr}(\Phi_n \otimes \mathrm{Id}_R(\widehat{\rho}))(\log(\Phi(\rho)) \otimes I_R) - \mathrm{Tr}(\Phi_n \otimes \mathrm{Id}_R(\widehat{\rho}))(I_B \otimes \log(\rho)) = \\ &= -\mathrm{Tr}\, \Phi_n(\rho) \log(\Phi(\rho)) - \mathrm{Tr}\, (\mathrm{Tr}_B\, \Phi_n \otimes \mathrm{Id}_R(\widehat{\rho})) \log(\rho). \end{aligned}$$

Рассмотрим величину

$$\begin{aligned} Y_n &= H\big(\widetilde{\Phi}_n \otimes \mathrm{Id}_R(\widehat{\rho}) \,\|\, \widetilde{\Phi}_n(\rho) \otimes \rho\big) = \\ &= -S\big(\widetilde{\Phi}_n \otimes \mathrm{Id}_R(\widehat{\rho})\big) - \mathrm{Tr}(\widetilde{\Phi}_n \otimes \mathrm{Id}_R(\widehat{\rho})) \log(\widetilde{\Phi}_n(\rho) \otimes \rho). \end{aligned}$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} Y_n = I(\rho, \widetilde{\Phi})$ в силу леммы 1. Аналогично вычислению слагаемых X_n получаем

$$S\big(\widetilde{\Phi}_n \otimes \mathrm{Id}_R(\widehat{\rho})\big) = S(\Phi_n(\rho))$$

и

$$\begin{aligned} &-\mathrm{Tr}\big(\widetilde{\Phi}_n \otimes \mathrm{Id}_R(\widehat{\rho})\big) \log\big(\widetilde{\Phi}_n(\rho) \otimes \rho\big) = \\ &= -\mathrm{Tr}\big(\widetilde{\Phi}_n \otimes \mathrm{Id}_R(\widehat{\rho})\big)\big(\log(\widetilde{\Phi}_n(\rho)) \otimes I_R\big) - \mathrm{Tr}\big(\widetilde{\Phi}_n \otimes \mathrm{Id}_R(\widehat{\rho})\big)(I_E \otimes \log(\rho)) = \\ &= S\big(\widetilde{\Phi}_n(\rho)\big) - \mathrm{Tr}\big(\mathrm{Tr}_E\, \widetilde{\Phi}_n \otimes \mathrm{Id}_R(\widehat{\rho})\big) \log(\rho). \end{aligned}$$

Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} (X_n + Y_n) = 2H(\rho)$. Учитывая определение относительной энтропии, имеем

$$\begin{aligned} X_n + Y_n &= -\mathrm{Tr}\, \Phi_n(\rho) \log(\Phi(\rho)) - S(\Phi_n(\rho)) + C_n + D_n + R_n = \\ &= H(\Phi_n(\rho) \,\|\, \Phi(\rho)) + C_n + D_n, \end{aligned}$$

[5] *Квантовой операцией* называется линейное вполне положительное отображение, не увеличивающее след [2].

где

$$C_n = -\operatorname{Tr}\left(\operatorname{Tr}_B \Phi_n \otimes \mathrm{Id}_R(\widehat{\rho})\right)\log(\rho), \quad D_n = -\operatorname{Tr}\bigl(\operatorname{Tr}_E \widetilde{\Phi}_n \otimes \mathrm{Id}_R(\widehat{\rho})\bigr)\log(\rho).$$

Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = \lim\limits_{n\to\infty} D_n = H(\rho)$. Замечая, что

$$\operatorname{Tr}_B \Phi_n \otimes \mathrm{Id}_R(\widehat{\rho}) = \sum_{i,j=1}^{m} \sqrt{\lambda_i\lambda_j}\operatorname{Tr}\Phi_n(|e_i\rangle\langle e_j|)|e_i\rangle\langle e_j|,$$

получаем

$$C_n = \sum_{i=1}^{m}(-\lambda_i \log\lambda_i)\operatorname{Tr}\Phi_n(|e_i\rangle\langle e_i|),$$

и следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = H(\rho)$, поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{Tr}\Phi_n(|e_i\rangle\langle e_i|) = 1$. Аналогично доказывается, что $\lim\limits_{n\to\infty} D_n = H(\rho)$. Из леммы 7 (см. Приложение) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} H(\Phi_n(\rho)\,\|\,\Phi(\rho)) = 0.$$

Таким образом, доказано, что $\lim\limits_{n\to\infty}(X_n + Y_n) = 2H(\rho)$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = I(\rho,\Phi)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} Y_n = I(\rho,\widetilde{\Phi})$, утверждение теоремы доказано для состояний конечного ранга. Поскольку левая и правая части соотношения (22) являются вогнутыми полунепрерывными снизу неотрицательными функциями (в силу предложения 1), его справедливость для произвольных состояний следует из леммы 6 работы [14], утверждающей, что любая вогнутая полунепрерывная снизу ограниченная снизу функция на множестве квантовых состояний однозначно определяется своим сужением на множество состояний конечного ранга. ▲

§ 5. Когерентная информация

Поскольку в бесконечномерном случае правая часть в определении (8) когерентной информации $I_c(\rho,\Phi)$ может быть неопределена даже для состояния ρ с конечной энтропией, а результаты § 4 показывают конечность взаимной информации $I(\rho,\Phi)$ для такого состояния и любого канала Φ, естественным представляется следующее определение когерентной информации бесконечномерного квантового канала.

Определение 5. *Когерентной информацией* квантового канала $\Phi\colon \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A) \to \mathfrak{S}(\mathcal{H}_B)$ в состоянии $\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)$ с конечной энтропией называется величина

$$I_c(\rho,\Phi) = I(\rho,\Phi) - H(\rho).$$

Определенная таким образом величина наследует свойства 2, 3 взаимной информации (см. предложение 1). Из теоремы также вытекают неравенства

$$-H(\rho) \leqslant I_c(\rho,\Phi) \leqslant H(\rho)$$

и обобщение тождества (10) на бесконечномерный случай.

Следствие 1. *Пусть $\Phi\colon \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A) \to \mathfrak{S}(\mathcal{H}_B)$ – квантовый канал, а $\widetilde{\Phi}\colon \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A) \to \mathfrak{S}(\mathcal{H}_E)$ – канал, комплементарный каналу Φ. Для любого состояния $\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)$ с конечной энтропией имеет место соотношение*

$$I_c(\rho,\Phi) + I_c(\rho,\widetilde{\Phi}) = 0. \tag{23}$$

Замечание 2. В случае, когда $H(\rho) < +\infty$ и $H(\Phi(\rho)) < +\infty$, имеем $I(\rho, \Phi) = H(\rho) + H(\Phi(\rho)) - H(\widetilde{\Phi}(\rho))$, и следовательно,

$$I_c(\rho, \Phi) = H(\Phi(\rho)) - H(\widetilde{\Phi}(\rho)). \tag{24}$$

Альтернативное выражение для когерентной информации канала Φ в состоянии ρ с конечной энтропией можно дать, используя отмеченную в [15] связь этой величины с секретной классической пропускной способностью канала. Рассмотрим χ-функцию квантового канала Φ, определяемую выражением

$$\chi_\Phi(\rho) = \sup \sum_i \pi_i H(\Phi(\rho_i) \,\|\, \Phi(\rho)), \quad \rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}),$$

в котором супремум берется по всевозможным выпуклым разложениям $\rho = \sum\limits_i \pi_i \rho_i$, $\rho_i \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$. Эта функция непосредственно связана с классической пропускной способностью квантового канала Φ (см. [2]). Если $H(\Phi(\rho)) < +\infty$, то $\chi_\Phi(\rho) = H(\Phi(\rho)) - \overline{\mathrm{co}}\, H_\Phi(\rho)$, где $\overline{\mathrm{co}}\, H_\Phi(\rho)$ – выпуклое замыкание выходной энтропии канала Φ (см. [7]). Учитывая, что $\overline{\mathrm{co}}\, H_\Phi \equiv \overline{\mathrm{co}}\, H_{\widetilde{\Phi}}$ и что $|H(\Phi(\rho)) - H(\widetilde{\Phi}(\rho))| \leqslant H(\rho)$ в силу неравенства треугольника [1], для любого состояния ρ, у которого $H(\rho) < +\infty$ и $H(\Phi(\rho)) < +\infty$, получаем

$$I_c(\rho, \Phi) = \chi_\Phi(\rho) - \chi_{\widetilde{\Phi}}(\rho). \tag{25}$$

Поскольку $\max\{\chi_\Phi(\rho), \chi_{\widetilde{\Phi}}(\rho)\} \leqslant H(\rho)$ в силу монотонности относительной энтропии, правая часть в (25) определена корректно и принимает значения в промежутке $[-H(\rho), H(\rho)]$ при одном условии $H(\rho) < +\infty$. Используя метод аппроксимации квантовых каналов, развитый в [7], и приведенное ниже предложение 5, можно показать, что при условии $H(\rho) < +\infty$ соотношение (25) *равносильно* определению 5.

В конечномерном случае равенство $H(\rho) = I_c(\rho, \Phi)$ дает необходимое и достаточное условие точной обратимости канала на состоянии ρ (см. [1, теорема 12.10]). Дадим обобщение на бесконечномерный случай.

Определение 6. Канал Φ называется *точно обратимым на состоянии* $\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)$, если найдется такой канал $\mathcal{D}\colon \mathfrak{S}(\mathcal{H}_B) \to \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)$, что

$$\mathcal{D} \circ \Phi(\widetilde{\rho}) = \widetilde{\rho}$$

для всех состояний $\widetilde{\rho}$ с носителем $\mathrm{supp}\, \widetilde{\rho} \subset \mathcal{L} \equiv \mathrm{supp}\, \rho$.

Другими словами, подпространство $\mathcal{L}$ является квантовым кодом, исправляющим ошибки канала Φ (см. [1]). Введем эталонную систему $\mathcal{H}_R$, и пусть $\rho_{AR} = |\varphi_{AR}\rangle\langle\varphi_{AR}| \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_R)$ – очищение состояния ρ.

Лемма 5. *Канал Φ точно обратим на состоянии ρ тогда и только тогда, когда существует такой канал $\mathcal{D}\colon \mathfrak{S}(\mathcal{H}_B) \to \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)$, что*

$$(\mathcal{D} \circ \Phi \otimes \mathrm{Id}_R)(\rho_{AR}) = \rho_{AR}. \tag{26}$$

Доказательство приведено в Приложении.

Предложение 2. *Пусть $H(\rho) < \infty$. Канал $\Phi\colon \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A) \to \mathfrak{S}(\mathcal{H}_B)$ является точно обратимым на состоянии ρ тогда и только тогда, когда выполняется одно из равносильных условий*: $I_c(\rho, \Phi) = H(\rho)$, $I(\rho, \widetilde{\Phi}) = 0$.

Доказательство. В силу теоремы и определения 5 имеем

$$H(\rho) - I_c(\rho, \Phi) = I(\rho, \widetilde{\Phi}) \geqslant 0,$$

причем равенство нулю имеет место тогда и только тогда, когда $\rho_{RE} = \rho_R \otimes \rho_E$, поскольку $I(\rho, \widetilde{\Phi}) = H(\rho_{RE} || \rho_R \otimes \rho_E)$. Дальнейшее доказательство следует, в основном, работе [2], и мы приведем его для полноты изложения.

Необходимость. Пусть $V\colon \mathcal{H}_A \to \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_E$ – изометрия из представления (2) канала Φ. Рассмотрим чистое состояние $\rho_{BRE} = |\varphi_{BRE}\rangle\langle\varphi_{BRE}|$, где $|\varphi_{BRE}\rangle = (V \otimes I_R)|\varphi_{AR}\rangle$. Поскольку канал Φ точно обратим, имеет место (26), и следовательно,

$$(\mathcal{D} \otimes \mathrm{Id}_{RE})(\rho_{BRE}) = \rho_{ARE}.$$

Поскольку ρ_{AR} – чистое состояние, то $\rho_{ARE} = \rho_{AR} \otimes \rho_E$. Взяв частичные следы по пространству $\mathcal{H}_A$, получаем $\rho_{RE} = \rho_R \otimes \rho_E$.

Достаточность. Рассмотрим вектор $|\varphi_{BRE}\rangle = (V \otimes I_R)|\varphi_{AR}\rangle$. Тогда $|\varphi_{BRE}\rangle$ – вектор очищения для состояния ρ_{RE}. В силу того, что $\rho_{RE} = \rho_R \otimes \rho_E$, для ρ_{RE} можно взять очищение $|\varphi_{AR}\rangle \otimes |\varphi_{EE'}\rangle$, где E' – эталонная система для E.

Не ограничивая общности, можно считать, что пространства обоих очищений бесконечномерны, так что существует изометрия $W\colon \mathcal{H}_B \to \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_{E'}$, для которой

$$(I_{RE} \otimes W)|\varphi_{BRE}\rangle = |\varphi_{AR}\rangle \otimes |\varphi_{EE'}\rangle,$$

и соответственно,

$$(I_{RE} \otimes W)|\varphi_{BRE}\rangle\langle\varphi_{BRE}|(I_{RE} \otimes W^*) = |\varphi_{AR}\rangle\langle\varphi_{AR}| \otimes |\varphi_{EE'}\rangle\langle\varphi_{EE'}|.$$

Беря частичные следы по $\mathcal{H}_E$ и $\mathcal{H}_{E'}$, получаем условие точной обратимости (26), где

$$\mathcal{D}(\sigma) = \mathrm{Tr}_{E'}\, W \sigma W^*, \quad \sigma \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_B). \quad \blacktriangle$$

Как уже отмечалось, энтропия $H(\rho)$ состояния ρ является верхней гранью для когерентной информации $I_c(\rho, \Phi)$ произвольного канала Φ в этом состоянии. В следующем предложении дается более точная оценка сверху для $I_c(\rho, \Phi)$, выраженная через операторы Крауса канала Φ.

Предложение 3. *Пусть* $\Phi(\cdot) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} V_i(\cdot)V_i^*$ *– квантовый канал. Тогда для любого состояния* ρ *с конечной энтропией выполнено неравенство*

$$I_c(\rho, \Phi) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} H(V_i \rho V_i^*). \tag{27}$$

Равенство в (27) *имеет место, если* $\mathrm{Ran}\, V_i \perp \mathrm{Ran}\, V_j$ *при всех* $i \neq j$.

Выражение в правой части (27) можно рассматривать как среднюю энтропию апостериорного состояния при квантовом измерении, описываемом набором операторов $\{V_i\}_{i=1}^{+\infty}$, для априорного состояния ρ (см. [2, § 6.5]). В силу неравенства Гроневольда – Линдблада – Озавы эта величина не превосходит $H(\rho)$ [16].

Доказательство. Докажем сначала, что в (27) имеет место равенство, если $\mathrm{Ran}\, V_i \perp \mathrm{Ran}\, V_j$ при всех $i \neq j$.

Пусть ρ – состояние из $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)$ с конечной энтропией, а $|\varphi\rangle\langle\varphi|$ – его очищение в $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_R)$. В силу известных свойств относительной энтропии (см. [4]) с учетом равенства $\sum\limits_{i=1}^{\infty} V_i^* V_i = I_A$ и свойства логарифма (20) имеем

$$I(\rho,\Phi) = H\left(\Phi\otimes \mathrm{Id}_R(|\varphi\rangle\langle\varphi|)\,\|\,\Phi\otimes \mathrm{Id}_R(\rho\otimes\rho)\right) =$$
$$= H\left(\sum_{i=1}^{\infty} V_i\otimes I_R|\varphi\rangle\langle\varphi|V_i^*\otimes I_R \,\Big\|\, \sum_{i=1}^{\infty}(V_i\otimes I_R)(\rho\otimes\rho)(V_i^*\otimes I_R)\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} H\left(V_i\otimes I_R|\varphi\rangle\langle\varphi|V_i^*\otimes I_R\,\|\,(V_i\otimes I_R)(\rho\otimes\rho)(V_i^*\otimes I_R)\right) =$$
$$= H(\rho) + \sum_{i=1}^{\infty}\left[S(V_i\rho V_i^*) - \eta(\mathrm{Tr}\,V_i\rho V_i^*)\right] = H(\rho) + \sum_{i=1}^{\infty} H(V_i\rho V_i^*).$$

Пусть $\Phi(\cdot) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} V_i(\cdot)V_i^*$ – произвольный канал, и $\mathcal{H}_C = \bigoplus\limits_{i=1}^{\infty}\mathcal{H}_B^i$, где $\mathcal{H}_B^i \cong \mathcal{H}_B$, а U_i – изометрическое вложение $\mathcal{H}_B$ в $\mathcal{H}_C$, такое что $U_i\mathcal{H}_B = \mathcal{H}_B^i$ при каждом i.

Как показано выше, для квантового канала $\widehat{\Phi}(\cdot) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} U_iV_i(\cdot)V_i^*U_i^*$ имеет место равенство

$$I_c(\rho,\widehat{\Phi}) = \sum_{i=1}^{\infty} H(U_iV_i\rho V_i^*U_i^*) = \sum_{i=1}^{\infty} H(V_i\rho V_i^*),$$

из которого получаем (27), применяя 1-е цепное правило для когерентной информации к композиции $\Psi\circ\widehat{\Phi} = \Phi$, где $\Psi(\cdot) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} U_i^*(\cdot)U_i$ – канал из $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_C)$ в $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_B)$. ▲

§ 6. О непрерывности взаимной информации и когерентной информации

Предложение 1 и теорема позволяют получить следующее условие непрерывности взаимной информации и когерентной информации.

Предложение 4. *Для любого квантового канала* $\Phi\colon \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)\to\mathfrak{S}(\mathcal{H}_B)$ *функции*

$$\rho\mapsto I(\rho,\Phi) \quad \text{и} \quad \rho\mapsto I_c(\rho,\Phi)$$

непрерывны на любом подмножестве $\mathcal{A}\subset\mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)$, *на котором непрерывна энтропия фон Неймана.*

Доказательство. Функции $\rho\mapsto I(\rho,\Phi)$ и $\rho\mapsto I(\rho,\widetilde{\Phi})$ полунепрерывны снизу, а их сумма – удвоенная энтропия фон Неймана – непрерывна на множестве $\mathcal{A}$ по условию. Поэтому каждая из этих функций непрерывна на множестве $\mathcal{A}$. Функция $\rho\mapsto I_c(\rho,\Phi)$ непрерывна на множестве $\mathcal{A}$ как разность двух непрерывных на этом множестве функций. ▲

Пример. Пусть H – гамильтониан квантовой системы A. Тогда множество $\mathcal{K}_{H,h}$ состояний ρ из $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)$, удовлетворяющих неравенству $\mathrm{Tr}\,H\rho\leqslant h$, – это множество состояний со средней энергией, не превосходящей h. Если оператор H таков, что $\mathrm{Tr}\,e^{-\lambda H} < +\infty$ при любом $\lambda>0$, то энтропия фон Неймана непрерывна на $\mathcal{K}_{H,h}$ [3,5]. Таким свойством обладает, например, гамильтониан системы квантовых осцилляторов [2]. В силу предложения 4 для любого квантового канала Φ взаимная информация $I(\rho,\Phi)$ и когерентная информация $I_c(\rho,\Phi)$ являются непрерывными функциями состояния $\rho\in\mathcal{K}_{H,h}$ при любом конечном $h>0$, а следовательно, ограничены на $\mathcal{K}_{H,h}$ и достигают своих верхних граней на этом множестве (в силу его компактности [6]).

Замечание 3. В силу предложения 4 (с учетом (22)) для любого канала Φ функция $\rho \mapsto I(\rho, \Phi)$ непрерывна и ограничена на множестве

$$\mathfrak{S}_k(\mathcal{H}_A) = \{\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A) \mid \operatorname{rank}\rho \leqslant k\}$$

при каждом $k = 1, 2, \ldots$ Следовательно, свойства функции $\rho \mapsto I(\rho, \Phi)$ можно исследовать с помощью метода аппроксимации, рассмотренного в [14, раздел 4]. Этот метод позволяет прояснить смысл условия непрерывности функции $\rho \mapsto I(\rho, \Phi)$ в предложении 4 и показать его необходимость для определенного класса каналов.

В силу предложения 3 из [14] функция $\rho \mapsto I(\rho, \Phi)$ является поточечным пределом возрастающей последовательности вогнутых непрерывных на $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)$ функций

$$\rho \mapsto I_k(\rho, \Phi) = \sup_{\{\pi_i, \rho_i\} \in \mathcal{E}_\rho^k} \sum_i \pi_i I(\rho_i, \Phi), \tag{28}$$

где $\mathcal{E}_\rho^k$ – множество всех конечных ансамблей[6] $\{\pi_i, \rho_i\}$, таких что $\sum\limits_i \pi_i \rho_i = \rho$ и $\operatorname{rank}\rho_i \leqslant k$ для всех i. Поэтому необходимым и достаточным условием непрерывности функции $\rho \mapsto I(\rho, \Phi)$ на множестве $\mathcal{A} \subset \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)$ является

$$\lim_{k \to +\infty} \sup_{\rho \in \mathcal{A}_c} \Delta_k^I(\rho, \Phi) = 0 \quad \text{для любого компакта } \mathcal{A}_c \subseteq \mathcal{A}, \tag{29}$$

где $\Delta_k^I(\rho, \Phi) = I(\rho, \Phi) - I_k(\rho, \Phi)$. Можно показать, что

$$\Delta_k^I(\rho, \Phi) = \inf_{\{\pi_i, \rho_i\} \in \mathcal{E}_\rho^k} \sum_i \pi_i \left[H(\rho_i \,\|\, \rho) + H(\Phi(\rho_i) \,\|\, \Phi(\rho)) - H(\widetilde{\Phi}(\rho_i) \,\|\, \widetilde{\Phi}(\rho)) \right]$$

для любого состояния ρ с конечной энтропией. В силу монотонности и неотрицательности относительной энтропии выражение в квадратных скобках не превосходит $2H(\rho_i \,\|\, \rho)$. Поэтому (29) выполнено, если

$$\lim_{k \to +\infty} \sup_{\rho \in \mathcal{A}_c} \inf_{\{\pi_i, \rho_i\} \in \mathcal{E}_\rho^k} \sum_i \pi_i H(\rho_i \,\|\, \rho) = 0 \quad \text{для любого компакта } \mathcal{A}_c \subseteq \mathcal{A},$$

что означает равномерную сходимость последовательности $\{H_k\}$ непрерывных аппроксиматоров энтропии (определяемых формулой (28) с заменой $I(\rho_i, \Phi)$ на $H(\rho_i)$ в правой части) на компактных подмножествах множества $\mathcal{A}$, которая равносильна непрерывности энтропии на этом множестве [14].

Таким образом, *утверждение предложения* 4 *является следствием того, что в силу монотонности относительной энтропии*

$$H_k(\rho) \overset{\mathcal{A}}{\rightrightarrows} H(\rho) < +\infty \quad \Longrightarrow \quad I_k(\rho, \Phi) \overset{\mathcal{A}}{\rightrightarrows} I(\rho, \Phi) < +\infty \quad \forall \mathcal{A} \subset \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A) \tag{30}$$

для любого канала Φ.

Если канал Φ является деградируемым, т.е. $\widetilde{\Phi} = \Lambda \circ \Phi$ для некоторого канала Λ, то $I(\rho, \Phi) < +\infty \Rightarrow H(\rho) < +\infty$ в силу теоремы и 1-го цепного правила из предложения 1, а из монотонности относительной энтропии следует, что выражение в квадратных скобках в приведенной выше формуле для $\Delta_k^I(\rho, \Phi)$ мажорирует величину $H(\rho_i \,\|\, \rho)$. Поэтому для деградируемого канала Φ в (30) имеет место равносильность, и следовательно, условие непрерывности функции $\rho \mapsto I(\rho, \Phi)$ в предложении 4 яв-

[6] Ансамбль $\{\pi_i, \rho_i\}$ – это набор состояний $\{\rho_i\}$ с соответствующим распределением вероятностей $\{\pi_i\}$.

ляется также и необходимым:

$$\lim_{n\to+\infty} H(\rho_n) = H(\rho_0) < +\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} I(\rho_n,\Phi) = I(\rho_0,\Phi) < +\infty$$

для любой последовательности $\{\rho_n\}$, сходящейся к состоянию ρ_0.

При исследовании непрерывности пропускных способностей как функций канала необходимо рассматривать величины $I(\rho,\Phi)$ и $I_c(\rho,\Phi)$ как функции пары (ρ,Φ), т.е. как функции на декартовом произведении множества всех состояний $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)$ и множества всех каналов $\mathfrak{F}(A,B)$ из A в B с определенным образом выбранной (достаточно слабой) топологией. Как показано в [7], в качестве такой топологии на множестве $\mathfrak{F}(A,B)$ удобно использовать топологию сильной сходимости, введенную перед предложением 1 в § 3. Из предложения 1 и теоремы с помощью очевидной модификации рассуждений доказательства предложения 4 получаем следующий результат.

Предложение 5. *Пусть $\{\Phi_n\}$ – последовательность каналов из множества $\mathfrak{F}(A,B)$, сильно сходящаяся к каналу Φ_0, и существует последовательность $\{\widetilde{\Phi}_n\}$ каналов из $\mathfrak{F}(A,E)$, сильно сходящаяся к каналу $\widetilde{\Phi}_0$, такая что $(\Phi_n,\widetilde{\Phi}_n)$ – комплементарная пара при каждом $n=0,1,2,\ldots$ Тогда для любой последовательности $\{\rho_n\}\subset\mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)$, сходящейся к состоянию ρ_0, из $\lim\limits_{n\to+\infty} H(\rho_n) = H(\rho_0) < +\infty$ следует, что*

$$\lim_{n\to+\infty} I(\rho_n,\Phi_n) = I(\rho_0,\Phi_0) \quad \text{и} \quad \lim_{n\to+\infty} I_c(\rho_n,\Phi_n) = I_c(\rho_0,\Phi_0). \tag{31}$$

Пусть $\mathfrak{V}_1(A,B)$ – множество всех последовательностей $\overline{V}=\{V_i\}_{i=1}^{+\infty}$ операторов из $\mathcal{H}_A$ в $\mathcal{H}_B$, таких что $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} V_i^*V_i = I_A$, с топологией покоординатной сильной операторной сходимости.

Следствие 2. *Для любого подмножества $\mathcal{A}\subset\mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)$, на котором энтропия фон Неймана непрерывна, функции*

$$\left(\rho,\overline{V}\right)\mapsto I\left(\rho,\Phi[\overline{V}]\right), \quad \left(\rho,\overline{V}\right)\mapsto I_c\left(\rho,\Phi[\overline{V}]\right), \quad \left(\rho,\overline{V}\right)\mapsto \sum_{i=1}^{+\infty} H(V_i\rho V_i^*),$$

где $\Phi[\overline{V}](\cdot)=\sum\limits_{i=1}^{+\infty} V_i(\cdot)V_i^*$, непрерывны на множестве $\mathcal{A}\times\mathfrak{V}_1(A,B)$.

Доказательство. Непрерывность первых двух функций следует из предложения 5 в силу доказанной ниже непрерывности отображений

$$\mathfrak{V}_1(A,B)\ni\overline{V}\mapsto\Phi[\overline{V}]\in\mathfrak{F}(A,B) \quad \text{и} \quad \mathfrak{V}_1(A,B)\ni\overline{V}\mapsto\widetilde{\Phi}[\overline{V}]\in\mathfrak{F}(A,E),$$

где $\widetilde{\Phi}[\overline{V}](\cdot)=\sum\limits_{i,j=1}^{+\infty}[\operatorname{Tr} V_i(\cdot)V_j^*]|h_i\rangle\langle h_j|$, а $\{|h_i\rangle\}$ – некоторый ортонормированный базис в пространстве $\mathcal{H}_E$.

Для доказательства непрерывности указанных выше отображений достаточно показать, что

$$\lim_{n\to+\infty} \Phi[\overline{V}_n](|\varphi\rangle\langle\varphi|) = \Phi[\overline{V}_0](|\varphi\rangle\langle\varphi|) \tag{32}$$

и

$$\lim_{n\to+\infty} \widetilde{\Phi}[\overline{V}_n](|\varphi\rangle\langle\varphi|) = \widetilde{\Phi}[\overline{V}_0](|\varphi\rangle\langle\varphi|) \tag{33}$$

для любой последовательности $\{\overline{V}_n\} \subset \mathfrak{V}_1(A,B)$, сходящейся к вектору $\overline{V}_0 \in \mathfrak{V}_1(A,B)$, и любого единичного вектора $\varphi \in \mathcal{H}_A$.

Пусть $\overline{V}_n = \{V_i^n\}_{i=1}^{+\infty}$ при каждом $n \geqslant 0$. Соотношение (32) нетрудно получить, заметив, что поскольку $\sum_{i=1}^{+\infty} \|V_i^n|\varphi\rangle\|^2 = 1$ для всех $n \geqslant 0$, то

$$\lim_{m\to+\infty} \sup_{n\geqslant 0} \operatorname{Tr} \sum_{i>m} V_i^n |\varphi\rangle\langle\varphi|(V_i^n)^* = \lim_{m\to+\infty} \sup_{n\geqslant 0} \sum_{i>m} \|V_i^n|\varphi\rangle\|^2 = 0.$$

Соотношение (33) доказывается с помощью результата из [12], упомянутого перед предложением 1.

Для доказательства непрерывности третьей функции рассмотрим следующую конструкцию. Пусть $\mathcal{H}_C = \bigoplus_{i=1}^{+\infty} \mathcal{H}_B^i$, где $\mathcal{H}_B^i \cong \mathcal{H}_B$, а U_i – изометрическое вложение $\mathcal{H}_B$ в $\mathcal{H}_C$, такое что $U_i\mathcal{H}_B = \mathcal{H}_B^i$ при каждом i.

Последовательности $\{V_i\}_{i=1}^{+\infty}$ из $\mathfrak{V}_1(A,B)$ можно сопоставить последовательность $\{\widehat{V}_i = U_iV_i\}_{i=1}^{+\infty}$ из $\mathfrak{V}_1(A,C)$, у которой $\operatorname{Ran}\widehat{V}_i \perp \operatorname{Ran}\widehat{V}_j$ при всех $i \neq j$. Поскольку данное соответствие непрерывно (как отображение из $\mathfrak{V}_1(A,B)$ в $\mathfrak{V}_1(A,C)$), из доказанного выше следует, что функция

$$\big(\rho,\overline{V}\big) \mapsto I_c\big(\rho,\widehat{\Phi}[\overline{V}]\big) = \sum_{i=1}^{+\infty} H\big(\widehat{V}_i\rho\widehat{V}_i^*\big) = \sum_{i=1}^{+\infty} H(V_i\rho V_i^*),$$

где $\widehat{\Phi}[\overline{V}](\cdot) = \sum_{i=1}^{+\infty} \widehat{V}_i(\cdot)\widehat{V}_i^*$, а первое равенство вытекает из последнего утверждения предложения 3, непрерывна на множестве $\mathcal{A} \times \mathfrak{V}_1(A,B)$. ▲

Как уже отмечалось в § 5, величину $\sum_{i=1}^{+\infty} H(V_i\rho V_i^*)$ можно рассматривать как среднюю энтропию апостериорного состояния при квантовом измерении, описываемом набором операторов $\{V_i\}_{i=1}^{+\infty}$. Следствие 2 показывает, что из непрерывности энтропии $H(\rho)$ априорного состояния ρ следует непрерывность средней энтропии апостериорного состояния как функции пары (априорное состояние, измерение) при использовании сильной операторной топологии в определении сходимости последовательности измерений. Это утверждение является усилением аналогичного утверждения из примера 3 работы [14], в котором в определении сходимости последовательности измерений используется *более сильная* топология (так называемая $*$-сильная операторная топология)[7]. Поэтому с помощью следствия 2 можно усилить все утверждения из примера 3 работы [14], включив в определение сходимости последовательности измерений сильную операторную топологию, которая в данном контексте представляется более естественной.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Лемма 6. *Пусть ρ и σ – состояния из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, а C – оператор из $\mathfrak{T}_+(\mathcal{H})$. Тогда*

$$H(\lambda\rho + (1-\lambda)\sigma \,\|\, C) \geqslant \lambda H(\rho \,\|\, C) + (1-\lambda)H(\sigma \,\|\, C) - h_2(\lambda), \quad \forall\lambda \in [0,1],$$

где $h_2(\lambda) = \eta(\lambda) + \eta(1-\lambda)$.

Доказательство. Пусть $\{P_n\}$ – возрастающая последовательность проекторов конечного ранга, сильно сходящаяся к тождественному оператору. Тогда $A_n =$

[7] Отметим, что такое усиление нельзя получить с помощью методов, используемых в [14].

$= P_n\rho P_n$, $B_n = P_n\sigma P_n$, $C_n = P_n C P_n$ – операторы конечного ранга при каждом n, и следовательно,

$$
\begin{aligned}
&H(\lambda A_n + (1-\lambda)B_n \,\|\, C_n) = \mathrm{Tr}(\lambda A_n + (1-\lambda)B_n)(-\log C_n) -\\
&- S(\lambda A_n + (1-\lambda)B_n) + \mathrm{Tr}\, C_n - \mathrm{Tr}(\lambda A_n + (1-\lambda)B_n) \geqslant\\
&\geqslant \lambda\,\mathrm{Tr}\, A_n(-\log C_n) + (1-\lambda)\,\mathrm{Tr}\, B_n(-\log C_n) + \mathrm{Tr}\, C_n - \lambda\,\mathrm{Tr}\, A_n - (1-\lambda)\,\mathrm{Tr}\, B_n -\\
&- \lambda S(A_n) - (1-\lambda)S(B_n) - \eta(\mathrm{Tr}(\lambda A_n + (1-\lambda)B_n)) + \lambda\eta(\mathrm{Tr}\, A_n) +\\
&+ (1-\lambda)\eta(\mathrm{Tr}\, B_n) - x_n h_2(x_n^{-1}\lambda\,\mathrm{Tr}\, A_n) = \lambda H(A_n \,\|\, C_n) + (1-\lambda)H(B_n \,\|\, C_n) -\\
&- \eta(\mathrm{Tr}(\lambda A_n + (1-\lambda)B_n)) + \lambda\eta(\mathrm{Tr}\, A_n) + (1-\lambda)\eta(\mathrm{Tr}\, B_n) - x_n h_2(x_n^{-1}\lambda\,\mathrm{Tr}\, A_n),
\end{aligned}
$$

где $x_n = \mathrm{Tr}(\lambda A_n + (1-\lambda)B_n)$ и использовано неравенство

$$
H(\lambda A_n + (1-\lambda)B_n) \leqslant \lambda H(A_n) + (1-\lambda)H(B_n) + x_n h_2(x_n^{-1}\lambda\,\mathrm{Tr}\, A_n),
$$

которое следует из (12) и (13). В силу леммы 1 переход к пределу при $n \to +\infty$ дает требуемое неравенство. ▲

Лемма 7. *Пусть $\{A_n\}$ – последовательность операторов из $\mathfrak{T}_+(\mathcal{H})$, сходящаяся по ядерной норме к оператору A_0, причем $A_n \leqslant A_0$ при всех n. Тогда*

$$
\lim_{n\to\infty} H(A_n \,\|\, B) = H(A_0 \,\|\, B) \quad \textit{для любого оператора } B \in \mathfrak{T}_+(\mathcal{H}).
$$

Доказательство. Можно считать, что A_0 – состояние. Представим его в виде

$$
A_0 = \lambda_n\rho_n + (1-\lambda_n)\sigma_n,
$$

где

$$
\lambda_n = \mathrm{Tr}\, A_n, \quad \rho_n = \frac{A_n}{\mathrm{Tr}\, A_n}, \quad \sigma_n = \frac{A - A_n}{1-\lambda_n}.
$$

В силу леммы 6 и неотрицательности относительной энтропии имеем

$$
\begin{aligned}
&H(A_0 \,\|\, B) \geqslant \lambda_n H(\rho_n \,\|\, B) + (1-\lambda_n)H(\sigma_n \,\|\, B) - h_2(\lambda_n) \geqslant\\
&\quad \geqslant H(A_n \,\|\, \lambda_n B) - h_2(\lambda_n) = H(A_n \,\|\, B) - \mathrm{Tr}\, B(1-\lambda_n) - \lambda_n \log(\lambda_n) - h_2(\lambda_n),
\end{aligned}
$$

а значит, $\limsup\limits_{n\to\infty} H(A_n \,\|\, B) \leqslant H(A_0 \,\|\, B)$, откуда в силу полунепрерывности снизу относительной энтропии следует утверждение леммы. ▲

Доказательство леммы 5. Обозначим $T = \mathcal{D} \circ \Phi$ и рассмотрим последовательность условий

$$
T(|\psi\rangle\langle\psi|) = |\psi\rangle\langle\psi|, \qquad \forall|\psi\rangle \in \mathrm{supp}\,\rho, \tag{34}
$$
$$
T(|\psi\rangle\langle\varphi|) = |\psi\rangle\langle\varphi|, \qquad \forall|\psi\rangle, |\varphi\rangle \in \mathrm{supp}\,\rho, \tag{35}
$$
$$
T(|e_i\rangle\langle e_j|) = |e_i\rangle\langle e_j|, \qquad \forall i, j, \tag{36}
$$

где $|e_i\rangle$ – собственные векторы состояния ρ, отвечающие ненулевым собственным значениям. Тогда имеют место следующие эквивалентности: определение 6 $\Leftrightarrow$ (34) следует из спектрального разложения, (34) $\Leftrightarrow$ (35) – из поляризационного тождества, (35) $\Leftrightarrow$ (36) – очевидна, (36) $\Leftrightarrow$ (26) следует из формулы (15). ▲

Авторы благодарны участникам семинара “Квантовая вероятность, статистика, информация” (МИАН) за интерес к работе и полезные замечания. Авторы также благодарны А.А. Кузнецовой за обсуждение и помощь в подготовке статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нильсен М.А., Чанг И.* Квантовые вычисления и квантовая информация. М.: Мир, 2006.
2. *Холево А.С.* Квантовые системы, каналы, информация. М.: МЦНМО, 2010.
3. *Wehrl A.* General Properties of Entropy // Rev. Modern Phys. 1978. V. 50. № 2. P. 221–260.
4. *Lindblad G.* Expectations and Entropy Inequalities for Finite Quantum Systems // Commun. Math. Phys. 1974. V. 39. № 2. P. 111–119.
5. *Ohya M., Petz D.* Quantum Entropy and Its Use. Berlin: Springer, 2004.
6. *Холево А.С., Широков М.Е.* Непрерывные ансамбли и классическая пропускная способность квантовых каналов бесконечной размерности // Теория вероятностей и ее применения. 2005. Т. 50. № 1. С. 98–114.
7. *Широков М.Е., Холево А.С.* Об аппроксимации бесконечномерных квантовых каналов // Пробл. передачи инф. 2008. Т. 44. № 2. С. 3–22.
8. *Adami C., Cerf N.J.* Von Neumann Capacity of Noisy Quantum Channels // Phys. Rev. A. 1997. V. 56. № 5. P. 3470–3483.
9. *Bennett C.H., Shor P.W., Smolin J.A., Thapliyal A.V.* Entanglement-Assisted Capacity of a Quantum Channel and the Reverse Shannon Theorem // IEEE Trans. Inform. Theory. 2002. V. 48. № 10. P. 2637–2655.
10. *Barnum H., Nielsen M.A., Schumacher B.* Information Transmission through a Noisy Quantum Channel // Phys. Rev. A. 1998. V. 57. № 6. P. 4153–4175.
11. *Devetak I.* The Private Classical Capacity and Quantum Capacity of a Quantum Channel // IEEE Trans. Inform. Theory. 2005. V. 51. № 1. P. 44–55.
12. *Davies E.B.* Quantum Theory of Open Systems. London: Academic Press, 1976.
13. *Холево А.С.* Комплементарные каналы и проблема аддитивности // Теория вероятностей и ее применения. 2006. Т. 51. № 1. С. 133–143.
14. *Shirokov M.E.* Continuity of the von Neumann Entropy // Commun. Math. Phys. 2010. V. 296. № 3. P. 625–654.
15. *Schumacher B., Westmoreland M.D.* Quantum Privacy and Quantum Coherence // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 80. № 25. P. 5695–5697.
16. *Ozawa M.* On Information Gain by Quantum Measurements of Continuous Observables // J. Math. Phys. 1986. V. 27. № 3. P. 759–763.

Холево Александр Семенович
Широков Максим Евгеньевич
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
holevo@mi.ras.ru
msh@mi.ras.ru

Поступила в редакцию
28.01.2010
После переработки
07.06.2010