ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том 48 | 2012 | Вып. 2

УДК 621.391.1 : 519.2

© 2012 г. **М.Е. Широков**

УСЛОВИЯ СОВПАДЕНИЯ КЛАССИЧЕСКОЙ ПРОПУСКНОЙ СПОСОБНОСТИ И КЛАССИЧЕСКОЙ ПРОПУСКНОЙ СПОСОБНОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СЦЕПЛЕННОСТИ КВАНТОВОГО КАНАЛА[1]

Доказан ряд соотношений между пропускной способностью Холево и классической пропускной способностью с использованием сцепленности квантового канала и получены необходимые и достаточные условия их совпадения. В частности, показано, что достаточным (соответственно, необходимым) условием совпадения этих пропускных способностей является принадлежность канала (соответственно, χ-существенной части канала) к классу классически-квантовых каналов (χ-существенная часть – это сужение канала, которое получается при отбрасывании всех состояний, бесполезных для передачи классической информации). Полученные условия и их следствия обобщаются на каналы с линейными ограничениями. С помощью этих условий показано, что вопрос о совпадении пропускной способности Холево с пропускной способностью с использованием сцепленности зависит от вида ограничения. Исследованы свойства разности между квантовой взаимной информацией и χ-функцией квантового канала.

§ 1. Введение

Информационные свойства квантового канала характеризуются целым рядом пропускных способностей, определяемых типом передаваемой информации, дополнительными ресурсами, используемыми для увеличения скорости передачи, требованиями секретности и т.п.

Центральную роль в анализе возможности передачи классической информации по квантовому каналу Φ играют пропускная способность Холево $\bar{C}(\Phi)$, классическая пропускная способность $C(\Phi)$ и пропускная способность с использованием сцепленности (entanglement-assisted classical capacity) $C_{\mathrm{ea}}(\Phi)$ этого канала. Первая из них определяет максимальную скорость передачи информации между передатчиком и приемником (обычно называемых Алисой и Бобом) при использовании несцепленного кодирования в передатчике и произвольного измерения в приемнике, вторая отличается от первой возможностью произвольного кодирования в приемнике, тогда как пропускная способность с использованием сцепленности определяет максимальную скорость передачи информации при наличии сцепленного состояния между Алисой и Бобом, которое может быть использовано для увеличения скорости передачи [1–3].

В силу определений $\bar{C}(\Phi) \leqslant C(\Phi) \leqslant C_{\mathrm{ea}}(\Phi)$. В течение долгого времени предполагалось, что $\bar{C}(\Phi) = C(\Phi)$ для любого канала Φ, пока Хастингс [4] не показал существование контрпримера к гипотезе аддитивности. Тем не менее, равенство $\bar{C}(\Phi) = C(\Phi)$ выполнено для большого класса каналов, содержащего тождественный

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке научной программы "Математическая теория управления и динамических систем" РАН и Российского фонда фундаментальных исследований (номера проектов 10-01-00139-а, 12-01-00319-а).

канал, все унитальные кубитные каналы, все каналы, разрушающие сцепленность, и много других конкретных примеров. Напротив, возможность строгого неравенства $C(\Phi) < C_{\rm ea}(\Phi)$ была изначально очевидна, поскольку алгоритм сверхплотного кодирования показывает, что $C_{\rm ea}(\Phi) = 2C(\Phi) > 0$ для тождественного канала Φ. Однако существуют каналы, для которых

$$\bar{C}(\Phi) = C(\Phi) = C_{\rm ea}(\Phi) > 0 \tag{1}$$

(в качестве примера можно рассмотреть канал $\rho \mapsto \sum\limits_k \langle k|\rho|k\rangle |k\rangle\langle k|$, где $\{|k\rangle\}$ – ортонормированный базис). Поэтому естественно возникает вопрос, как охарактеризовать класс каналов, для которых имеет место (1). Вопреки интуитивной точке зрения этот класс не совпадает с классом каналов, разрушающих сцепленность: несмотря на то, что эти каналы уничтожают сцепленность любого состояния, разделяемого Алисой и Бобом, их пропускная способность с использованием сцепленности может превышать их классическую пропускную способность [1]. С другой стороны, в [5] приведен пример канала, не разрушающего сцепленность, для которого $C_{\rm ea}(\Phi) = \bar{C}(\Phi)$ (см. пример 2 в п. 2.3). Продвижение в поиске ответа на указанный выше вопрос было сделано недавно в [6], где получен критерий равенства (1) для класса квантово-классических каналов, определяемых квантовой наблюдаемой.

В настоящей статье доказан ряд соотношений между пропускными способностями $\bar{C}(\Phi)$ и $C_{\rm ea}(\Phi)$ и получены необходимые и достаточные условия равенства $\bar{C}(\Phi) = C_{\rm ea}(\Phi)$ (предложение 1, теоремы 1 и 2). В частности, показано, что достаточным (соответственно, необходимым) условием этого равенства является принадлежность канала (соответственно, χ-существенной части канала) к классу классически-квантовых каналов (χ-существенная часть – это сужение канала на множество состояний, носители которых лежат в минимальном подпространстве, содержащем элементы всех оптимальных ансамблей для этого канала в смысле пропускной способности Холево; см. определение 1).

Поскольку в бесконечномерном случае необходимо накладывать ограничения на выбор входных кодов-состояний, в статье рассматриваются также условия совпадения пропускной способности с использованием сцепленности с пропускной способностью Холево для квантовых каналов с линейными ограничениями (предложения 4 и 5). С помощью этих условий показано, что даже для классически-квантовых каналов вопрос о совпадении пропускных способностей определяется формой ограничения (пример 3, предложение 6).

Свойствам разности между квантовой взаимной информацией и χ-функцией (пропускной способностью Холево с "точечным" ограничением) квантового канала, рассматриваемой как функция входного состояния (теорема 3), посвящен § 4. В частности, показан смысл максимального значения этой функции как параметра, характеризующего "уровень шума" квантового канала.

§ 2. Каналы без ограничений

Пусть $\mathfrak{H}_A$, $\mathfrak{H}_B$ и $\mathfrak{H}_E$ – конечномерные гильбертовы пространства. Везде далее $\Phi\colon \mathfrak{S}(\mathfrak{H}_A) \to \mathfrak{S}(\mathfrak{H}_B)$ – квантовый канал, а $\widehat{\Phi}\colon \mathfrak{S}(\mathfrak{H}_A) \to \mathfrak{S}(\mathfrak{H}_E)$ – его комплементарный канал, определенный однозначно с точностью до унитарной эквивалентности [7].

Пусть $H(\rho)$ и $H(\rho\|\sigma)$ – энтропия фон Неймана состояния ρ и квантовая относительная энтропия состояний ρ и σ [2,3].

Пропускная способность Холево канала Φ определяется выражением

$$\bar{C}(\Phi) = \max_{\rho\in\mathfrak{S}(\mathfrak{H}_A)} \chi_\Phi(\rho), \tag{2}$$

где

$$\chi_{\Phi}(\rho) = \max_{\sum_i \pi_i\rho_i=\rho} \sum_i \pi_i H(\Phi(\rho_i)\|\Phi(\rho)) \tag{3}$$

– χ-функция канала Φ [8]. Заметим, что

$$\chi_{\Phi}(\rho) = H(\Phi(\rho)) - \widehat{H}_{\Phi}(\rho), \tag{4}$$

где $\widehat{H}_{\Phi}(\rho) = \min_{\sum_i \pi_i\rho_i=\rho} \sum_i \pi_i H(\Phi(\rho_i))$ – выпуклая оболочка функции $\rho \mapsto H(\Phi(\rho))$. В силу вогнутости последней функции данный минимум можно брать по ансамблям чистых состояний. Ансамбль чистых состояний $\{\pi_i, \rho_i\}$ называется *оптимальным для канала* Φ, если (см. [9])

$$\bar{C}(\Phi) = \chi_{\Phi}(\bar{\rho}) = \sum_i \pi_i H(\Phi(\rho_i)\|\Phi(\bar{\rho})), \quad \bar{\rho} = \sum_i \pi_i\rho_i.$$

В силу теоремы Холево – Шумахера – Вестморленда классическая пропускная способность канала Φ определяется следующей регуляризированной формулой:

$$C(\Phi) = \lim_{n\to+\infty} n^{-1}\bar{C}(\Phi^{\otimes n}).$$

В силу теоремы Беннета – Шора – Смолина – Таплияла пропускная способность с использованием сцепленности канала Φ определяется выражением

$$C_{\mathrm{ea}}(\Phi) = \max_{\rho\in\mathfrak{S}(\mathfrak{H}_A)} I(\rho, \Phi), \tag{5}$$

где $I(\rho,\Phi) = H(\rho) + H(\Phi(\rho)) - H(\widehat{\Phi}(\rho))$ – квантовая взаимная информация канала Φ в состоянии ρ [2,3].

В силу “операционных” определений $\bar{C}(\Phi) \leqslant C(\Phi) \leqslant C_{\mathrm{ea}}(\Phi)$. Аналитически это следует (в силу (2) и (5)) из следующего выражения для квантовой взаимной информации:

$$I(\rho,\Phi) = H(\rho) + \chi_{\Phi}(\rho) - \chi_{\widehat{\Phi}}(\rho) = \chi_{\Phi}(\rho) + \Delta_{\Phi}(\rho), \tag{6}$$

где $\Delta_{\Phi}(\rho) = H(\rho) - \chi_{\widehat{\Phi}}(\rho)$. Это выражение нетрудно получить, используя формулу (4) и замечая, что $\widehat{H}_{\Phi} \equiv \widehat{H}_{\widehat{\Phi}}$ (это следует из совпадения функций $\rho \mapsto H(\Phi(\rho))$ и $\rho \mapsto H(\widehat{\Phi}(\rho))$ на множестве чистых состояний).

Поскольку $H(\rho) = \sum_i \pi_i H(\rho_i\|\rho)$ для любого ансамбля $\{\pi_i, \rho_i\}$ чистых состояний со средним состоянием ρ, имеем

$$\Delta_{\Phi}(\rho) = \min_{\substack{\sum_i \pi_i\rho_i=\rho \\ \mathrm{rank}\,\rho_i=1}} \sum_i \pi_i \left[H(\rho_i\|\rho) - H(\widehat{\Phi}(\rho_i)\|\widehat{\Phi}(\rho))\right] \geqslant 0, \tag{7}$$

где последнее неравенство следует из монотонности относительной энтропии.

Замечание 1. Минимум в (7) достигается на ансамбле $\{\pi_i, \rho_i\}$ чистых состояний тогда и только тогда, когда максимум в (3) достигается на этом ансамбле. Действительно, поскольку $\sum_i \pi_i H(\Phi(\rho_i)) = \sum_i \pi_i H(\widehat{\Phi}(\rho_i))$, это можно показать, используя выражение (4) для χ-функции каналов Φ и $\widehat{\Phi}$.

2.1. Общие неравенства. Из выражения (6) непосредственно вытекает оценка сверху

$$C_{\mathrm{ea}}(\Phi) \leqslant \bar{C}(\Phi) + \log\dim\mathfrak{H}_A,$$

доказанная в [10, 11] различными методами. Используя это выражение и замечая, что $\chi_\Phi(\rho) - \chi_{\widehat{\Phi}}(\rho) = I_c(\rho, \Phi)$ – когерентная информация канала Φ в состоянии ρ (см. [12]), нетрудно получить следующие неравенства[2]:

$$\begin{aligned} &H(\rho_1) - \bar{C}(\widehat{\Phi}) \leqslant C_{\mathrm{ea}}(\Phi) - \bar{C}(\Phi) \leqslant \\ &\quad\leqslant H(\rho_2) - \chi_{\widehat{\Phi}}(\rho_2) \underset{H(\Phi(\cdot))\geqslant H(\cdot)}{\leqslant} H(\Phi(\rho_2)) - \chi_{\widehat{\Phi}}(\rho_2) = I_c(\rho_2, \Phi) + \widehat{H}_\Phi(\rho_2), \end{aligned} \tag{8}$$

где ρ_1 и ρ_2 – состояния из $\mathfrak{S}(\mathfrak{H}_A)$, такие что $\chi_\Phi(\rho_1) = \bar{C}(\Phi)$ (т.е. ρ_1 – среднее состояние оптимального ансамбля) и $I(\rho_2, \Phi) = C_{\mathrm{ea}}(\Phi)$.

Пусть $Q_1(\Phi) = \max\limits_{\rho\in\mathfrak{S}(\mathfrak{H}_A)} I_c(\rho, \Phi)$ и $Q(\Phi) = \lim\limits_{n\to+\infty} n^{-1} Q_1(\Phi^{\otimes n})$ – квантовая пропускная способность канала Φ [2, 3]. Следующее предложение содержит некоторые оценки, полученные из (8).

Предложение 1. *Пусть* $\Phi\colon \mathfrak{S}(\mathfrak{H}_A) \to \mathfrak{S}(\mathfrak{H}_B)$ *– квантовый канал, и пусть* $\widehat{\Phi}\colon \mathfrak{S}(\mathfrak{H}_A) \to \mathfrak{S}(\mathfrak{H}_E)$ *– канал, комплементарный к* Φ. *Тогда*

A) *Имеют место неравенства*

$$\bar{C}(\Phi) - \bar{C}(\widehat{\Phi}) \leqslant C_{\mathrm{ea}}(\Phi) - \bar{C}(\Phi) \underset{H(\Phi(\cdot))\geqslant H(\cdot)}{\leqslant} Q_1(\Phi) + \min\sum_i \pi_i H(\Phi(\rho_i)), \tag{9}$$

$$C(\Phi) - C(\widehat{\Phi}) \leqslant C_{\mathrm{ea}}(\Phi) - C(\Phi) \underset{H(\Phi(\cdot))\geqslant H(\cdot)}{\leqslant} Q(\Phi) + \min\sum_i \pi_i H(\Phi(\rho_i)), \tag{10}$$

где минимум берется по всем ансамблям $\{\pi_i, \rho_i\}$ *чистых состояний, таких что* $I\Bigl(\sum\limits_i \pi_i\rho_i, \Phi\Bigr) = C_{\mathrm{ea}}(\Phi)$. *Это слагаемое можно заменить на* $\max\limits_{\rho\in\,\mathrm{extr}\,\mathfrak{S}(\mathfrak{H}_A)} H(\Phi(\rho))$.

B) *Если среднее состояние хотя бы одного оптимального ансамбля для канала* Φ *совпадает с хаотическим состоянием* $\rho_c = (\dim\mathfrak{H}_A)^{-1} I_A$, *то*

$$C_{\mathrm{ea}}(\Phi) - \bar{C}(\Phi) \geqslant \log\dim\mathfrak{H}_A - \bar{C}(\widehat{\Phi}),$$

и следовательно, $\bar{C}(\Phi) = C_{\mathrm{ea}}(\Phi) \ \Rightarrow\ \bar{C}(\widehat{\Phi}) = \log\dim\mathfrak{H}_A$.[3]

C) *Если* $C_{\mathrm{ea}}(\Phi) = I(\rho_c, \Phi)$, *то* $\bar{C}(\widehat{\Phi}) = \log\dim\mathfrak{H}_A \ \Rightarrow\ \bar{C}(\Phi) = C_{\mathrm{ea}}(\Phi)$. *Если, кроме того, среднее состояние хотя бы одного оптимального ансамбля для канала* $\widehat{\Phi}$ *совпадает с хаотическим состояниям* ρ_c, *то*

$$C_{\mathrm{ea}}(\Phi) - \bar{C}(\Phi) \leqslant \log\dim\mathfrak{H}_A - \bar{C}(\widehat{\Phi}).$$

Доказательство. A) Неравенство (9) непосредственно вытекает из (8). Неравенство (10) получается регуляризацией соотношения (8) с учетом того, что функция $\mathfrak{S}(\mathfrak{H}_A^{\otimes n}) \ni \omega \mapsto I(\omega, \Phi^{\otimes n})$ достигает максимума в состоянии $\rho_2^{\otimes n}$ в силу субаддитивности квантовой взаимной информации и очевидного неравенства $\widehat{H}_{\Phi^{\otimes n}}(\rho_2^{\otimes n}) \leqslant n\widehat{H}_\Phi(\rho_2)$.

B) Это утверждение прямо следует из неравенства (8).

[2] Здесь и далее подстрочный символ в третьем неравенстве означает, что оно имеет место при условии $H(\Phi(\rho)) \geqslant H(\rho)$ для всех $\rho \in \mathfrak{S}(\mathfrak{H}_A)$. Это условие выполнено, в частности, для всех бистохастических (унитальных) каналов.

[3] Заметим, что $\bar{C}(\widehat{\Phi}) \leqslant \log\dim\mathfrak{H}_A$ для любого канала Φ.

C) Для вывода первой части этого утверждения из неравенства (8) заметим, что из $\bar{C}(\widehat{\Phi}) = \log\dim\mathfrak{H}_A$ следует $\bar{C}(\widehat{\Phi}) = \chi_{\widehat{\Phi}}(\rho_c)$. Вторая часть непосредственно вытекает из второго неравенства в (8). ▲

Замечание 2. Поскольку $\bar{C}(\widehat{\Phi}) \leqslant \log\dim\mathfrak{H}_E$, имеем

$$C_{\mathrm{ea}}(\Phi) - \bar{C}(\Phi) \geqslant \log\dim\mathfrak{H}_A - \log\dim\mathfrak{H}_E$$

для любого канала Φ, удовлетворяющего условию предложения 1, B), и следовательно, $C_{\mathrm{ea}}(\Phi) > \bar{C}(\Phi)$, если размерность окружения (т.е. минимальное число операторов Крауса) меньше, чем размерность входного пространства канала Φ.

Для произвольного канала Φ из неравенства (8) следует, что

$$C_{\mathrm{ea}}(\Phi) - \bar{C}(\Phi) \geqslant H(\bar{\rho}) - \log\dim\mathfrak{H}_E \geqslant \bar{C}(\Phi) - \log\dim\mathfrak{H}_E,$$

где $\bar{\rho}$ – среднее состояние любого оптимального ансамбля для канала Φ.

2.2. Условия равенства $\bar{C}(\Phi) = C_{\mathrm{ea}}(\Phi)$, вытекающие из теоремы Петса. Используя выражения (6) и (7), монотонность относительной энтропии и теорему Петса [13, теорема 3], которая характеризует случай равенства в неравенстве, выражающем монотонность относительной энтропии, можно получить следующие необходимые и достаточные условия равенства $\bar{C}(\Phi) = C_{\mathrm{ea}}(\Phi)$.

Теорема 1. *Пусть* $\Phi\colon \mathfrak{S}(\mathfrak{H}_A) \to \mathfrak{S}(\mathfrak{H}_B)$ *– квантовый канал, а* $\widehat{\Phi}\colon \mathfrak{S}(\mathfrak{H}_A) \to \mathfrak{S}(\mathfrak{H}_E)$ *– канал, комплементарный к* Φ.

A) *Если существуют канал* $\Theta\colon \mathfrak{S}(\mathfrak{H}_E) \to \mathfrak{S}(\mathfrak{H}_A)$ *и ансамбль* $\{\pi_i, \rho_i\}$ *чистых состояний, такие что*

$$\Theta(\widehat{\Phi}(\rho_i)) = \rho_i, \quad \forall i, \tag{11}$$

и $I(\bar{\rho}, \Phi) = C_{\mathrm{ea}}(\Phi)$, *где* $\bar{\rho} = \sum_i \pi_i\rho_i$, *то* $\bar{C}(\Phi) = C_{\mathrm{ea}}(\Phi)$.[4]

B) *Если* $\bar{C}(\Phi) = C_{\mathrm{ea}}(\Phi)$, *то для любого оптимального ансамбля* $\{\pi_i, \rho_i\}$ *чистых состояний для канала* Φ *со средним состоянием* $\bar{\rho}$ *существует канал* $\Theta\colon \mathfrak{S}(\mathfrak{H}_E) \to \mathfrak{S}(\mathfrak{H}_A)$, *такой что имеет место* (11). *Канал* Θ *можно определить с помощью произвольного невырожденного распределения вероятностей* $\{\widehat{\pi}_i\}$, *задавая его действие на любое состояние* σ *с носителем, лежащим в подпространстве* $\operatorname{supp}\widehat{\Phi}(\bar{\rho})$, *формулой*

$$\Theta(\sigma) = [\widehat{\rho}]^{1/2}\widehat{\Phi}^*\left(\big[\widehat{\Phi}(\widehat{\rho})\big]^{-1/2}\sigma\big[\widehat{\Phi}(\widehat{\rho})\big]^{-1/2}\right)[\widehat{\rho}]^{1/2}, \tag{12}$$

в которой $\widehat{\rho} = \sum_i \widehat{\pi}_i\rho_i$, *а* $\widehat{\Phi}^*$ *– дуальное отображение к каналу* $\widehat{\Phi}$.

Если $\{\widehat{\pi}_i\}$ *– вырожденное распределение вероятностей, то для канала* Θ, *определяемого формулой* (12), *соотношение* (11) *имеет место при всех* i, *для которых* $\widehat{\pi}_i > 0$.

Доказательство. A) Если $\{\pi_i, \rho_i\}$ – ансамбль чистых состояний со средним состоянием $\bar{\rho}$, для которого имеет место (11), то в силу монотонности относительной энтропии из (7) следует $\Delta_\Phi(\bar{\rho}) = 0$ и поэтому $C_{\mathrm{ea}}(\Phi) = I(\bar{\rho}, \Phi) = \chi_\Phi(\bar{\rho}) \leqslant \bar{C}(\Phi)$.

B) Поскольку $\chi_\Phi(\rho) \leqslant I(\rho, \Phi)$ для любого состояния ρ в силу (6), нетрудно видеть, что из $\bar{C}(\Phi) = C_{\mathrm{ea}}(\Phi)$ следует $\chi_\Phi(\bar{\rho}) = I(\bar{\rho}, \Phi)$ для любого оптимального ансамбля $\{\pi_i, \rho_i\}$ чистых состояний со средним состоянием $\bar{\rho}$. Из (7) и замечания 1 следует,

[4] Достаточно предположить, что Θ – сохраняющее след положительное отображение, для которого имеет место монотонность относительной энтропии.

что

$$H(\rho_i\|\bar{\rho}) = H(\widehat{\Phi}(\rho_i)\|\widehat{\Phi}(\bar{\rho})), \quad \forall i.$$

Поэтому из теоремы Петса [13, теорема 3] следует существование канала Θ, для которого имеет место (11). В силу монотонности относительной энтропии для произвольного распределения вероятностей $\{\widehat{\pi}_i\}$ имеем

$$H(\rho_i\|\widehat{\rho}) = H(\widehat{\Phi}(\rho_i)\|\widehat{\Phi}(\widehat{\rho})), \quad \widehat{\rho} = \sum_i \widehat{\pi}_i\rho_i$$

при всех i, для которых $\widehat{\pi}_i > 0$. Поэтому формула для канала Θ также следует из теоремы Петса. $\blacktriangle$

Теорема 1, A) позволяет доказать равенство $C_{\mathrm{ea}}(\Phi) = \bar{C}(\Phi)$ для всех классически-квантовых каналов (см. теорему 2 в п. 2.3).

С помощью теоремы 1, B) можно доказать строгое неравенство $C_{\mathrm{ea}}(\Phi) > \bar{C}(\Phi)$, показав, что (11) не может выполняться для оптимального ансамбля $\{\pi_i, \rho_i\}$ и канала Θ, определяемого в (12).

Пример 1. Рассмотрим разрушающий сцепленность канал

$$\Phi(\rho) = \sum_k \langle\varphi_k|\rho|\varphi_k\rangle |k\rangle\langle k|,$$

где $\{|\varphi_k\rangle\}$ – переполненная система векторов в пространстве $\mathfrak{H}_A$ (т.е. $\sum\limits_k |\varphi_k\rangle\langle\varphi_k| = I_A$) и $\{|k\rangle\}$ – ортонормированный базис в пространстве $\mathfrak{H}_B$. Нетрудно показать, что $\Phi = \widehat{\Phi}$. Следовательно, $I(\rho, \Phi) = H(\rho)$ и $C_{\mathrm{ea}}(\Phi) = \log\dim\mathfrak{H}_A$.

Предположим, что $\bar{C}(\Phi) = C_{\mathrm{ea}}(\Phi) = \log\dim\mathfrak{H}_A$. Тогда среднее состояние любого оптимального ансамбля $\{\pi_i, \rho_i\}$ для канала Φ является хаотическим состоянием ρ_c в $\mathfrak{S}(\mathfrak{H}_A)$. Поскольку $\widehat{\Phi}^*(A) = \sum\limits_k \langle k|A|k\rangle |\varphi_k\rangle\langle\varphi_k|$ и $\widehat{\Phi}(\rho_c) = \Phi(\rho_c)$ – состояние полного ранга, соотношение (11) может выполняться для канала Θ, определяемого в (12), только если $\rho_i = |\varphi_{k_i}\rangle\langle\varphi_{k_i}|$ для некоторого k_i и $\operatorname{rank}\widehat{\Phi}(|\varphi_{k_i}\rangle\langle\varphi_{k_i}|) = \operatorname{rank}\sum\limits_k \langle\varphi_k|\varphi_{k_i}\rangle\langle\varphi_{k_i}|\varphi_k\rangle |k\rangle\langle k| = 1$ для всех i. Но это может иметь место, только если $\{|\varphi_k\rangle\}$ – ортонормированный базис. Таким образом, заключаем, что

$$C_{\mathrm{ea}}(\Phi) = \bar{C}(\Phi) \quad \Leftrightarrow \quad \{|\varphi_k\rangle\} \text{ – ортонормированный базис.}$$

Этот же вывод был получен в [6] как следствие общего критерия равенства $C_{\mathrm{ea}}(\Phi) = \bar{C}(\Phi)$ для класса каналов, определяемых квантовыми наблюдаемыми, который доказан с использованием двойственности между ансамблями и измерениями (ensemble-measurement duality).

2.3. Простой критерий равенства $\bar{C}(\Phi) = C_{\mathrm{ea}}(\Phi)$. В этом пункте мы покажем, что достаточным (соответственно, необходимым) условием равенства $\bar{C}(\Phi) = C_{\mathrm{ea}}(\Phi)$ является принадлежность канала Φ (соответственно, подканала этого канала, определяющего классическую пропускную способность) к классу так называемых классически-квантовых каналов.

Канал $\Phi\colon \mathfrak{S}(\mathfrak{H}_A) \to \mathfrak{S}(\mathfrak{H}_B)$ называется *классически-квантовым*, если он имеет следующее представление:

$$\Phi(\rho) = \sum_{k=1}^{\dim\mathfrak{H}_A} \langle k|\rho|k\rangle\sigma_k, \quad \rho \in \mathfrak{S}(\mathfrak{H}_A), \tag{13}$$

где $\{|k\rangle\}$ – ортонормированный базис в $\mathfrak{H}_A$, а $\{\sigma_k\}$ – набор состояний из $\mathfrak{S}(\mathfrak{H}_B)$ [2,3].

Для строгой формулировки приведенного выше утверждения нам потребуется следующее понятие.

Определение 1. Пусть $\mathfrak{H}_\Phi^\chi$ – минимальное подпространство пространства $\mathfrak{H}_A$, содержащее элементы всех оптимальных ансамблей для канала $\Phi\colon \mathfrak{S}(\mathfrak{H}_A)\to\mathfrak{S}(\mathfrak{H}_B)$. Сужение Φ_χ канала Φ на множество $\mathfrak{S}(\mathfrak{H}_\Phi^\chi)$ назовем *χ-существенной частью канала* Φ.

Если $\mathfrak{H}_\Phi^\chi\neq\mathfrak{H}_A$, то чистые состояния, соответствующие векторам из $\mathfrak{H}_A\setminus\mathfrak{H}_\Phi^\chi$, не могут быть элементами оптимального ансамбля для канала Φ. Это значит, грубо говоря, что эти состояния бесполезны с точки зрения несцепленного кодирования классической информации, и поэтому естественно рассматривать χ-существенную часть Φ_χ канала Φ при анализе пропускной способности Холево канала Φ (которая совпадает с классической пропускной способностью при условии $C_{\mathrm{ea}}(\Phi)=\bar C(\Phi)$).

По определению $\bar C(\Phi_\chi)=\bar C(\Phi)$. Следовательно, из $C_{\mathrm{ea}}(\Phi)=\bar C(\Phi)$ следует, что $C_{\mathrm{ea}}(\Phi_\chi)=C_{\mathrm{ea}}(\Phi)$. Поэтому в данном случае, говоря о пропускной способности с использованием сцепленности канала Φ, также можно вместо канала Φ рассматривать его χ-существенную часть Φ_χ.

Теорема 1 позволяет доказать следующие утверждения.

Теорема 2. *Пусть $\Phi\colon\mathfrak{S}(\mathfrak{H}_A)\to\mathfrak{S}(\mathfrak{H}_B)$ – квантовый канал. Тогда*

A) *Если Φ – классически-квантовый канал, то $C_{\mathrm{ea}}(\Phi)=\bar C(\Phi)$.*

B) *Если $C_{\mathrm{ea}}(\Phi)=\bar C(\Phi)$, то χ-существенная часть канала Φ является классически-квантовым каналом.*

Приведенный ниже пример 2 показывает, что χ-существенную часть канала Φ в теореме 2, B) нельзя заменить на канал Φ.

Доказательство. A) Если канал Φ имеет представление (13), то $\Phi=\Phi\circ\Pi$, где $\Pi(\rho)=\sum_k\langle k|\rho|k\rangle|k\rangle\langle k|$ – канал из $\mathfrak{S}(\mathfrak{H}_A)$ в себя.

Нетрудно показать (см. [14, доказательство леммы 17]), что существует канал Θ, такой что $\Theta\circ\widehat{\Phi\circ\Pi}=\widehat{\Pi}=\Pi$.

В силу цепного правила для квантовой взаимной информации (см. [2,3]) имеем

$$I(\rho,\Phi)=I(\rho,\Phi\circ\Pi)\leqslant I(\Pi(\rho),\Phi).$$

Следовательно, функция $\rho\mapsto I(\rho,\Phi)$ достигает максимума в состоянии, которое имеет диагональную матрицу в базисе $\{|k\rangle\}$. Поскольку $\Theta\circ\widehat{\Phi\circ\Pi}(|k\rangle\langle k|)=\Pi(|k\rangle\langle k|)=$ $=|k\rangle\langle k|$ для любого k, из теоремы 1, A) следует, что $C_{\mathrm{ea}}(\Phi)=\bar C(\Phi)$.

B) Заменяя канал Φ его χ-существенной частью, будем считать, что $\mathfrak{H}_\Phi^\chi=\mathfrak{H}_A$.

Пусть $\Phi(\rho)=\sum\limits_{i=1}^n V_i\rho V_i^*$ – минимальное представление Крауса канала Φ. Тогда

$$\widehat{\Phi}(\rho)=\sum_{i,j=1}^n \operatorname{Tr}V_i\rho V_j^*|i\rangle\langle j|\quad\text{и}\quad\widehat{\Phi}^*(A)=\sum_{i,j=1}^n\langle j|A|i\rangle V_j^*V_i,$$

где $\{|i\rangle\}_{i=1}^n$ – ортонормированный базис в n-мерном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}_E$.

Пусть $\{\pi_k,|\varphi_k\rangle\langle\varphi_k|\}$ – оптимальный ансамбль чистых состояний для канала Φ со средним состоянием полного ранга. Без ограничения общности можно считать, что $\{|\varphi_k\rangle\}_{k=1}^m$, $m=\dim\mathfrak{H}_A$, – базис пространства $\mathfrak{H}_A$. Пусть $\widehat{\pi}_k=1/m$, $k=\overline{1,m}$. Тогда $\widehat{\rho}=\sum\limits_{k=1}^m\widehat{\pi}_k|\varphi_k\rangle\langle\varphi_k|$ – состояние полного ранга в $\mathfrak{S}(\mathfrak{H}_A)$. Поскольку $\mathfrak{H}_E$ – пространство окружения минимальной размерности, $\widehat{\Phi}(\widehat{\rho})$ – состояние полного ранга в $\mathfrak{S}(\mathfrak{H}_E)$.

Пусть $|\phi_k\rangle = \sqrt{\widehat{\pi}_k\widehat{\rho}^{-1}}|\varphi_k\rangle$ и $B_k = \widehat{\pi}_k\big[\widehat{\Phi}(\widehat{\rho})\big]^{-1/2}\widehat{\Phi}(|\varphi_k\rangle\langle\varphi_k|)\big[\widehat{\Phi}(\widehat{\rho})\big]^{-1/2}$, $k=\overline{1,m}$. Поскольку $\sum\limits_{k=1}^{m}|\phi_k\rangle\langle\phi_k| = I_{\mathfrak{H}_A}$, $\{|\phi_k\rangle\}_{k=1}^{m}$ – ортонормированный базис в $\mathfrak{H}_A$. В силу теоремы 1,B) имеем $|\phi_k\rangle\langle\phi_k| = \widehat{\Phi}^*(B_k)$ для всех k. В силу спектральной теоремы $B_k = \sum\limits_p|\psi_k^p\rangle\langle\psi_k^p|$ при каждом k, где $\{|\psi_k^p\rangle\}_p$ – набор векторов в $\mathfrak{H}_E$. Поскольку $\widehat{\Phi}(\widehat{\rho})$ – состояние полного ранга,

$$\sum_{k,p}|\psi_k^p\rangle\langle\psi_k^p| = \sum_k B_k = I_E.$$

Из леммы 1 (см. ниже) следует, что $\Phi(\rho) = \sum\limits_{k,p}W_{kp}\rho W_{kp}^*$, где $W_{kp} = \sum\limits_{i=1}^{n}\langle\psi_k^p|i\rangle V_i$.

Поскольку $|\phi_k\rangle\langle\phi_k| = \widehat{\Phi}^*\Big(\sum\limits_p|\psi_k^p\rangle\langle\psi_k^p|\Big)$ при каждом k и

$$\widehat{\Phi}^*(|\psi_k^p\rangle\langle\psi_k^p|) = \sum_{i,j=1}^{n}\langle j|\psi_k^p\rangle\langle\psi_k^p|i\rangle V_j^*V_i = W_{kp}^*W_{kp},$$

то существует семейство $\{|\beta_{kp}\rangle\}$ векторов в $\mathfrak{H}_B$, такое что $W_{kp} = |\beta_{kp}\rangle\langle\phi_k|$ и $\sum\limits_p\|\beta_{kp}\|^2 = 1$ при каждом k. Следовательно,

$$\Phi(\rho) = \sum_{k,p}W_{kp}\rho W_{kp}^* = \sum_k\langle\phi_k|\rho|\phi_k\rangle\sum_p|\beta_{kp}\rangle\langle\beta_{kp}|. \quad \blacktriangle$$

Лемма 1. *Пусть* $\Phi(\rho) = \sum\limits_{i=1}^{n}V_i\rho V_i^*$ *– квантовый канал, и пусть* $\{|i\rangle\}_{i=1}^{n}$ *– ортонормированный базис в* n*-мерном гильбертовом пространстве* $\mathfrak{H}_E$. *Любая переполненная система* $\{|\psi_k\rangle\}_k$ *векторов из* $\mathfrak{H}_E$ *порождает представление Крауса* $\Phi(\rho) = \sum\limits_k W_k\rho W_k^*$ *канала* Φ, *где* $W_k = \sum\limits_{i=1}^{n}\langle\psi_k|i\rangle V_i$.

Доказательство. Поскольку $\sum\limits_k|\psi_k\rangle\langle\psi_k| = I_E$, имеем

$$\sum_k W_k\rho W_k^* = \sum_{i,j=1}^{n}V_i\rho V_j^*\sum_k\langle\psi_k|i\rangle\langle j|\psi_k\rangle = \sum_{i,j=1}^{n}V_i\rho V_j^*\sum_k \operatorname{Tr}|i\rangle\langle j||\psi_k\rangle\langle\psi_k| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}V_i\rho V_i^*. \quad \blacktriangle$$

Замечание 3. Утверждения теоремы 2 согласуются с полученным в [6] критерием равенства $C_{\mathrm{ea}}(\Phi) = \bar{C}(\Phi)$ для квантово-классического канала

$$\Phi(\rho) = \sum_k[\operatorname{Tr}M_k\rho]|k\rangle\langle k|,$$

определяемого набором $\{M_k\}$ положительных операторов в $\mathfrak{H}_A$, таким что $\sum\limits_k M_k = I_A$, и ортонормированным набором $\{|k\rangle\}$ векторов в $\mathfrak{H}_B$, поскольку нетрудно показать, что данный канал является классически-квантовым тогда и только тогда, когда $M_kM_l = M_lM_k$ при всех k,l.

Поскольку совпадение $\mathfrak{H}_\Phi^\chi$ с $\mathfrak{H}_A$ равносильно существованию оптимального ансамбля для канала Φ со средним состоянием полного ранга, из теоремы 2 получаем следующий критерий совпадения пропускных способностей.

Следствие 1. *Если для канала Φ существует оптимальный ансамбль со средним состоянием полного ранга, то*

$$C_{\mathrm{ea}}(\Phi)=\bar{C}(\Phi) \quad \Leftrightarrow \quad \Phi \text{ – классически-квантовый канал.}$$

Следующий пример, приведенный в [5] (как пример не разрушающего сцепленность канала, для которого $C_{\mathrm{ea}}(\Phi)=\bar{C}(\Phi)$), показывает существенность условия в следствии 1.

Пример 2. Пусть $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ и $\mathfrak{H}_3$ – кубитные пространства. Пусть $\{|k\rangle\}_{k=1}^4$ и $\{|-\rangle,|+\rangle\}$ – ортонормированные базисы в $\mathfrak{K}=\mathfrak{H}_1\otimes\mathfrak{H}_2$ и в $\mathfrak{H}_3$ соответственно. Рассмотрим канал

$$\Phi(\rho)=\sum_{k=1}^{4}\left[\langle k|\otimes\langle +|\right]\rho\left[|k\rangle\otimes|+\rangle\right]|k\rangle\langle k|+\tfrac{1}{2}I_{\mathfrak{H}_2}\otimes\mathrm{Tr}_{\mathfrak{H}_2\otimes\mathfrak{H}_3}[I_{\mathfrak{K}}\otimes|-\rangle\langle -|]\rho$$

из $\mathfrak{S}(\mathfrak{K}\otimes\mathfrak{H}_3)$ в $\mathfrak{S}(\mathfrak{K})$. Нетрудно показать [5], что $C_{\mathrm{ea}}(\Phi)=\bar{C}(\Phi)=2$ и $Q(\Phi)=1$. Следовательно, канал Φ не является разрушающим сцепленность, а значит, он не является классически-квантовым.

Поскольку $\bar{C}(\Phi)=2=\log\dim\mathfrak{K}$, любой оптимальный ансамбль для канала Φ не может содержать состояний с ненулевой выходной энтропией. Поэтому подпространство $\mathfrak{H}_\Phi^\chi$ состоит из векторов $|\varphi\rangle\otimes|+\rangle$, $|\varphi\rangle\in\mathfrak{K}$. Таким образом, χ-существенная часть канала Φ изоморфна классически-квантовому каналу $\rho\mapsto\sum_{k=1}^{4}\langle k|\rho|k\rangle|k\rangle\langle k|$ (в соответствии с утверждением теоремы 2, B)).

2.4. О ковариантных каналах. Класс каналов, для которых условия B) и C) предложения 1 и следствия 1 выполнены одновременно, содержит любой канал Φ, *ковариантный* по отношению к представлениям $\{V_g\}_{g\in G}$ и $\{W_g\}_{g\in G}$ компактной группы G в том смысле, что

$$\Phi(V_g\rho V_g^*)=W_g\Phi(\rho)W_g^*,\quad \forall g\in G, \tag{14}$$

при условии, что представление $\{V_g\}_{g\in G}$ является неприводимым. Действительно, из неприводимости представления $\{V_g\}_{g\in G}$ следует, что

$$\rho_c\doteq(\dim\mathfrak{H}_A)^{-1}I_A=\int_G V_g\rho V_g^*\,\mu_H(dg),\quad \forall\rho\in\mathfrak{S}(\mathfrak{H}_A), \tag{15}$$

где μ_H – мера Хаара на группе G [10]. Поэтому для доказательства равенств

$$\bar{C}(\Phi)=\chi_\Phi(\rho_c),\quad \bar{C}(\widehat{\Phi})=\chi_{\widehat{\Phi}}(\rho_c)\quad\text{и}\quad C_{\mathrm{ea}}(\Phi)=I(\rho_c,\Phi) \tag{16}$$

достаточно, в силу вогнутости χ-функции и квантовой взаимной информации, показать, что

$$\chi_\Phi(\rho)=\chi_\Phi(V_g\rho V_g^*),\quad \chi_{\widehat{\Phi}}(\rho)=\chi_{\widehat{\Phi}}(V_g\rho V_g^*)\quad\text{и}\quad I(\rho,\Phi)=I(V_g\rho V_g^*,\Phi) \tag{17}$$

для всех $g\in G$ и $\rho\in\mathfrak{S}(\mathfrak{H}_A)$.

Первое и третье равенства в (17) нетрудно доказать, используя (3) и хорошо известное выражение квантовой взаимной информации через относительную энтропию (используя инвариантность относительной энтропии по отношению к унитарным преобразованиям аргументов). В силу этих равенств второе равенство следует из (6).

Класс ковариантных каналов достаточно велик, он содержит все унитальные кубитные каналы и нетривиальные каналы более высоких размерностей [10, 15].

Используя (15) и (16), нетрудно показать, что (см. [10])

$$\bar{C}(\Phi) = H(\Phi(\rho_c)) - H_{\min}(\Phi), \quad \bar{C}(\widehat{\Phi}) = H(\widehat{\Phi}(\rho_c)) - H_{\min}(\Phi),$$
$$C_{\mathrm{ea}}(\Phi) = \log\dim\mathfrak{H}_A + H(\Phi(\rho_c)) - H(\widehat{\Phi}(\rho_c)) \tag{18}$$

для любого канала $\Phi\colon \mathfrak{S}(\mathfrak{H}_A) \to \mathfrak{S}(\mathfrak{H}_B)$, удовлетворяющего приведенному выше условию ковариантности, где $H_{\min}(\Phi) = \min\limits_{\rho\in\mathfrak{S}(\mathfrak{H}_A)} H(\Phi(\rho))$ – минимальная выходная энтропия канала Φ (совпадающая с $H_{\min}(\widehat{\Phi})$). Если, кроме того, представление $\{W_g\}_{g\in G}$ также является неприводимым, то $H(\Phi(\rho_c))$ в (18) можно заменить на $\log\dim\mathfrak{H}_B$ [10].

Пусть $Q_1(\Phi) = \max\limits_{\rho\in\mathfrak{S}(\mathfrak{H}_A)} I_c(\rho,\Phi)$ и $Q(\Phi) = \lim\limits_{n\to+\infty} n^{-1}Q_1(\Phi^{\otimes n})$ – квантовая пропускная способность канала Φ. В силу приведенных выше наблюдений из предложения 1 и следствия 1 вытекают следующие утверждения.

Предложение 2. *Пусть* $\Phi\colon \mathfrak{S}(\mathfrak{H}_A) \to \mathfrak{S}(\mathfrak{H}_B)$ – *канал, удовлетворяющий условиям ковариантности* (14)*. Тогда*

$$C_{\mathrm{ea}}(\Phi) = \bar{C}(\Phi) \quad \Leftrightarrow \quad \Phi \text{ – классически-квантовый канал.}$$

Если, кроме того, $\dim\mathfrak{H}_B \geqslant \dim\mathfrak{H}_A$ *и представление* $\{W_g\}_{g\in G}$ *неприводимо, то*

$$C_{\mathrm{ea}}(\Phi) - \bar{C}(\Phi) = \log\dim\mathfrak{H}_A - \bar{C}(\widehat{\Phi}) \leqslant Q_1(\Phi) + H_{\min}(\Phi),$$
$$C_{\mathrm{ea}}(\Phi) - C(\Phi) = \log\dim\mathfrak{H}_A - C(\widehat{\Phi}) \leqslant Q(\Phi) + H_{\min}(\Phi).$$

Доказательство. Если представление $\{W_g\}_{g\in G}$ неприводимо, то нетрудно показать [10], что $\Phi((\dim\mathfrak{H}_A)^{-1}I_A) = (\dim\mathfrak{H}_B)^{-1}I_B$. Поэтому при условии $\dim\mathfrak{H}_B \geqslant \dim\mathfrak{H}_A$ из монотонности относительной энтропии следует, что $H(\Phi(\rho)) \geqslant H(\rho)$ для любого $\rho \in \mathfrak{S}(\mathfrak{H})$. Совпадение последнего слагаемого в (9), (10) с $H_{\min}(\Phi)$ следует из (15) и (16). ▲

2.5. О деградируемых каналах. Выражение (6) и цепное правило для χ-функции (которое означает, что $\chi_{\Psi\circ\Phi} \leqslant \chi_\Phi$) показывают, что

$$C_{\mathrm{ea}}(\Phi_1) \leqslant \log\dim\mathfrak{H}_A \leqslant C_{\mathrm{ea}}(\Phi_2) \tag{19}$$

для любого антидеградируемого канала Φ_1 и любого деградируемого канала Φ_2.[5] С помощью теоремы Петса [13, теорема 3] можно показать, что если в первом (соответственно, втором) неравенстве в (19) имеет место равенство, то антидеградируемый канал Φ_1 является деградируемым (соответственно, деградируемый канал Φ_2 является антидеградируемым).

Из второго неравенства в (19) и теоремы 2 вытекает следующее утверждение.

Предложение 3. *Если* $\Phi\colon \mathfrak{S}(\mathfrak{H}_A) \to \mathfrak{S}(\mathfrak{H}_B)$ – *деградируемый канал, то имеет место один из следующих вариантов*:

- $\bar{C}(\Phi) < C_{\mathrm{ea}}(\Phi)$;
- Φ – *классически-квантовый канал, имеющий представление*

$$\Phi(\rho) = \sum_{k=1}^{\dim\mathfrak{H}_A} \langle k|\rho|k\rangle\sigma_k, \quad \rho\in\mathfrak{S}(\mathfrak{H}_A), \tag{20}$$

[5] Канал Φ называется деградируемым, если $\widehat{\Phi} = \Psi\circ\Phi$ для некоторого канала Ψ, канал Φ называется антидеградируемым, если $\widehat{\Phi}$ – деградируемый канал [14].

в котором $\{|k\rangle\}$ – *ортонормированный базис в* $\mathfrak{S}(\mathfrak{H}_A)$, *а* $\{\sigma_k\}$ – *набор состояний из* $\mathfrak{S}(\mathfrak{H}_B)$ *со взаимно ортогональными носителями.*

Доказательство. Предположим, что $\bar{C}(\Phi) = C_{\mathrm{ea}}(\Phi)$. Поскольку $\bar{C}(\Phi) \leqslant \log\dim\mathfrak{H}_A$ для любого канала Φ, второе неравенство в (19) показывает, что $\bar{C}(\Phi) = \log\dim\mathfrak{H}_A$, и следовательно, среднее состояние любого оптимального ансамбля для канала Φ является хаотическим состоянием в $\mathfrak{S}(\mathfrak{H}_A)$. В силу следствия 1 Φ – классически-квантовый канал, имеющий представление (20), в котором $\{|k\rangle\}$ – ортонормированный базис в $\mathfrak{S}(\mathfrak{H}_A)$, а $\{\sigma_k\}$ – некоторый набор состояний из $\mathfrak{S}(\mathfrak{H}_B)$. Покажем, что носители состояний этого набора взаимно ортогональны.

Пусть $\sigma_k = \sum_{i=1}^{\dim\mathfrak{H}_B} |\psi_{ki}\rangle\langle\psi_{ki}|$. Тогда $\Phi(\rho) = \sum_{k,i} W_{ki}\rho W_{ki}^*$, где $W_{ki} = |\psi_{ki}\rangle\langle k|$, и используя стандартное представление для комплементарного канала (см. [7]), получаем

$$\widehat{\Phi}(\rho) = \sum_{k,\,l=1}^{\dim\mathfrak{H}_A} \langle k|\rho|l\rangle |k\rangle\langle l| \otimes \sum_{i,\,j=1}^{\dim\mathfrak{H}_B} \langle\psi_{lj}|\psi_{ki}\rangle |i\rangle\langle j| \in \mathfrak{S}(\mathfrak{H}_A\otimes\mathfrak{H}_B).$$

Поскольку Φ – деградируемый канал, имеющий представление (20), то $\widehat{\Phi}(|k\rangle\langle l|) = \Psi\circ\Phi(|k\rangle\langle l|) = 0$ при всех $k \neq l$. Поэтому из приведенного выше выражения для канала $\widehat{\Phi}$ следует, что $\langle\psi_{lj}|\psi_{ki}\rangle = 0$ при всех i, j и всех $k \neq l$, а значит, $\operatorname{supp}\sigma_k \perp \operatorname{supp}\sigma_l$ при всех $k \neq l$. ▲

§ 3. О каналах с линейными ограничениями

При определении различных пропускных способностей каналов между конечномерными квантовыми системами для кодирования информации используются любые состояния. Но рассматривая реальные бесконечномерные каналы, необходимо накладывать ограничения на выбор входных кодов-состояний для избежания бесконечных значений пропускных способностей и для обеспечения физической реализуемости процесса передачи информации. Типичное физически мотивированное ограничение – это требование ограниченности средней энергии состояний, используемых для кодирования. Такое ограничение можно назвать линейным, поскольку оно определяется линейным неравенством

$$\operatorname{Tr} H\rho \leqslant h, \quad h > 0, \tag{21}$$

в котором H – положительный оператор – гамильтониан входной квантовой системы. Операционные определения пропускной способности Холево, классической пропускной способности и пропускной способности с использованием сцепленности квантового канала с линейными ограничениями даны в [16], где доказаны соответствующие обобщения теорем Холево – Шумахера – Вестморленда и Беннета – Шора – Смолина – Таплияла.

Цель данного параграфа – исследовать соотношения между указанными выше пропускными способностями квантового канала с линейными ограничениями, в частности, показать, что вопрос совпадения этих пропускных способностей для заданного канала зависит от вида ограничения.

Во избежание технических трудностей ограничимся рассмотрением конечномерного случая.

Пропускная способность Холево канала Φ с ограничением (21) определяется выражением

$$\bar{C}(\Phi, H, h) = \max_{\operatorname{Tr} H\rho\leqslant h} \chi_\Phi(\rho),$$

где χ_Φ – χ-функция канала Φ, определенная в (3). Ансамбль $\{\pi_i,\rho_i\}$ чистых состояний со средним состоянием $\bar{\rho}$ называется *оптимальным* для канала Φ с ограничением (21), если

$$\bar{C}(\Phi,H,h)=\chi_\Phi(\bar{\rho})=\sum_i \pi_i H(\Phi(\rho_i)\|\Phi(\bar{\rho})) \quad \text{и} \quad \operatorname{Tr} H\bar{\rho}\leqslant h.$$

В силу обобщенной теоремы Холево – Шумахера – Вестморленда [16, предложение 3] классическая пропускная способность канала Φ с ограничением (21) определяется регуляризационной формулой

$$C(\Phi,H,h)=\lim_{n\to+\infty} n^{-1}\bar{C}(\Phi^{\otimes n},H_n,nh),$$

в которой $H_n=H\otimes I\otimes\ldots\otimes I+I\otimes H\otimes I\otimes\ldots\otimes I+\ldots+I\otimes\ldots\otimes I\otimes H$ (каждое из n слагаемых содержит n множителей).

В силу обобщенной теоремы Беннета – Шора – Смолина – Таплияла [16, предложение 4] пропускная способность с использованием сцепленности канала Φ с ограничением (21) определяется выражением

$$C_{\mathrm{ea}}(\Phi,H,h)=\max_{\operatorname{Tr} H\rho\leqslant h} I(\rho,\Phi),$$

в котором $I(\rho,\Phi)$ – квантовая взаимная информация канала Φ в состоянии ρ, определенная после (5).

Почти все результаты § 2 о соотношениях между пропускными способностями $\bar{C}(\Phi)$ и $C_{\mathrm{ea}}(\Phi)$ можно переформулировать для каналов с ограничениями. Например, вместо (8) имеем

$$\begin{aligned}&H(\rho_1)-\bar{C}(\widehat{\Phi},H,h)\leqslant C_{\mathrm{ea}}(\Phi,H,h)-\bar{C}(\widehat{\Phi},H,h)\leqslant\\&\leqslant H(\rho_2)-\chi_{\widehat{\Phi}}(\rho_2)\underset{H(\Phi(\cdot))\geqslant H(\cdot)}{\leqslant} H(\Phi(\rho_2))-\chi_{\widehat{\Phi}}(\rho_2)=I_c(\rho_2,\Phi)+\widehat{H}_\Phi(\rho_2),\end{aligned}$$

где ρ_1 и ρ_2 – состояния из $\mathfrak{S}(\mathfrak{H}_A)$, такие что $\operatorname{Tr} H\rho_i\leqslant h$, $i=1,2$, $\chi_\Phi(\rho_1)=\bar{C}(\Phi,H,h)$ и $I(\rho_2,\Phi)=C_{\mathrm{ea}}(\Phi,H,h)$.

Повторяя соответствующие доказательства, нетрудно получить следующее

Предложение 4. *Утверждения предложения* 1, *теоремы* 1 *и теоремы* 2, B) *остаются справедливыми при замене* $\bar{C}(\Phi)$ *и* $C_{\mathrm{ea}}(\Phi)$ *на* $\bar{C}(\Phi,H,h)$ *и* $C_{\mathrm{ea}}(\Phi,H,h)$ *соответственно* (*при естественном определении* χ-*существенной части канала* Φ *с ограничением* (21)). *Утверждение теоремы* 2, A) *имеет место при данной замене, если базис* $\{|k\rangle\}$ *в представлении* (13) *канала* Φ *состоит из собственных векторов оператора* H.

Следующий пример показывает, что без указанного выше дополнительного условия утверждение теоремы 2, A) не имеет места для каналов с ограничениями.

Пример 3. Рассмотрим классически-квантовый канал

$$\Pi(\rho)=\sum_k \langle k|\rho|k\rangle |k\rangle\langle k|,$$

где $\{|k\rangle\}$ – ортонормированный базис в $\mathfrak{H}_A=\mathfrak{H}_B$. Пусть $h<(\dim\mathfrak{H}_A)^{-1}\operatorname{Tr} H$.

С помощью обобщенной версии теоремы 1 покажем, что $C_{\mathrm{ea}}(\Pi,H,h)=\bar{C}(\Pi,H,h)$ *тогда и только тогда, когда оператор* H *диагонализируем в базисе* $\{|k\rangle\}$.

Поскольку $\Pi=\widehat{\Pi}$, имеем $I(\rho,\Pi)=H(\rho)$ и $C_{\mathrm{ea}}(\Pi,H,h)=\max_{\operatorname{Tr} H\rho\leqslant h} H(\rho)$. Используя метод Лагранжа, нетрудно показать что данный максимум достигается на единственном состоянии $\rho_* = (\operatorname{Tr}\exp(-\lambda H))^{-1}\exp(-\lambda H)$, где λ определяется из уравнения $\operatorname{Tr} H\exp(-\lambda H) = h\operatorname{Tr}\exp(-\lambda H)$. Если $C_{\mathrm{ea}}(\Pi, H, h) = \bar{C}(\Pi, H, h)$, то из теоремы 1 следует существование ансамбля $\{\pi_i, \rho_i\}$ чистых состояний со средним состоянием ρ_*, такого что

$$\rho_i = \rho_*^{1/2}\Pi^*\left([\Pi(\rho_*)]^{-1/2}\Pi(\rho_i)[\Pi(\rho_*)]^{-1/2}\right)\rho_*^{1/2}, \quad \forall i.$$

Поскольку $\Pi^* = \Pi$, а ρ_* – состояние полного ранга, это равенство может выполняться, только если $\rho_i = |k\rangle\langle k|$ при некотором k. Поэтому $\{|k\rangle\}$ – базис из собственных векторов состояния ρ_*, а значит, и оператора H.

Если оператор H диагонализируем в базисе $\{|k\rangle\}$, то $\rho_* = \sum_k \pi_k |k\rangle\langle k|$, и поэтому

$$\bar{C}(\Pi, H, h) \geqslant \sum_k \pi_k H(\Pi(|k\rangle\langle k|)\|\Pi(\rho_*)) = H(\rho_*) = C_{\mathrm{ea}}(\Pi, H, h).$$

Предложение 3 обобщается следующим образом.

Предложение 5. *Пусть* $\Phi\colon \mathfrak{S}(\mathfrak{H}_A) \to \mathfrak{S}(\mathfrak{H}_B)$ *– деградируемый канал,* H *– положительный оператор,* $h > 0$ *и* $h_* = (\dim\mathfrak{H}_A)^{-1}\operatorname{Tr} H$. *Имеет место один из следующих вариантов*:

- $\bar{C}(\Phi, H, h) < C_{\mathrm{ea}}(\Phi, H, h)$;
- Φ *– классически-квантовый канал, имеющий представление*

$$\Phi(\rho) = \sum_{k=1}^{\dim\mathfrak{H}_A} \langle k|\rho|k\rangle\sigma_k, \quad \rho \in \mathfrak{S}(\mathfrak{H}_A), \tag{22}$$

в котором $\{\sigma_k\}$ *– набор состояний из* $\mathfrak{S}(\mathfrak{H}_B)$ *со взаимно ортогональными носителями, а* $\{|k\rangle\}$ *–*

произвольный ортонормированный базис в $\mathfrak{H}_A$, *если* $h \geqslant h_*$;

ортонормированный базис из собственных векторов оператора H, *если* $h < h_*$.

Доказательство. Поскольку $\chi_\Phi(\rho) \leqslant H(\rho)$ и $I(\rho, \Phi) \geqslant H(\rho)$ (это следует из деградируемости канала Φ), равенство $\bar{C}(\Phi, H, h) = C_{\mathrm{ea}}(\Phi, H, h)$ может быть выполнено, только если

$$\bar{C}(\Phi, H, h) = C_{\mathrm{ea}}(\Phi, H, h) = \max_{\operatorname{Tr} H\rho \leqslant h} H(\rho).$$

Если $h \geqslant h_*$, то данный максимум совпадает с $\log\dim\mathfrak{H}_A$, а значит, ограничение не влияет на пропускные способности, и следовательно, имеет место вторая альтернатива в предложении 3.

Если $h < h_*$, то указанный выше максимум всегда достигается на состоянии полного ранга, и обобщенная версия теоремы 2, B) показывает, что Φ – классически квантовый канал, имеющий представление (22). Так же, как и в доказательстве предложения 3, устанавливается, что носители состояний набора $\{\sigma_k\}$ в этом представлении взаимно ортогональны.

Покажем, что при условии $h < h_*$ равенство $\bar{C}(\Phi, H, h) = C_{\mathrm{ea}}(\Phi, H, h)$ будет иметь место тогда и только тогда, когда оператор H диагонализируем в базисе $\{|k\rangle\}$ из представления (22) для канала Φ. Для канала $\Pi(\rho) = \sum_k \langle k|\rho|k\rangle|k\rangle\langle k|$ это утверждение доказано в примере 3. Для его доказательства в общем случае достаточно заметить, что $\bar{C}(\Phi, H, h) = \bar{C}(\Pi, H, h)$ и $C_{\mathrm{ea}}(\Phi, H, h) = C_{\mathrm{ea}}(\Pi, H, h)$. Эти равенства следуют из цепных правил для пропускных способностей, поскольку нетрудно построить каналы Ψ_1 и Ψ_2, такие что $\Pi = \Psi_1 \circ \Phi$ и $\Phi = \Psi_2 \circ \Pi$. ▲

Следующее предложение показывает, что совпадение $\bar{C}(\Phi, H, h)$ и $C_{\mathrm{ea}}(\Phi, H, h)$ при любых параметрах ограничения (H, h) – очень сильное требование.

Предложение 6. *Если $\Phi\colon \mathfrak{S}(\mathfrak{H}_A) \to \mathfrak{S}(\mathfrak{H}_B)$ – квантовый канал, такой что $C_{\mathrm{ea}}(\Phi, H, h) = \bar{C}(\Phi, H, h)$ для любых $H \geqslant 0$ и $h > 0$, то Φ – классически-квантовый канал, у которого $\chi_{\widehat{\Phi}}(\rho) = H(\rho)$ для всех $\rho \in \mathfrak{S}(\mathfrak{H}_A)$. Если справедлива приведенная ниже гипотеза, то Φ – полностью деполяризирующий канал.*

Доказательство. В силу леммы 1 из [8] любое состояние полного ранга ρ из $\mathfrak{S}(\mathfrak{H}_A)$ может быть "сделано" средним состоянием оптимального ансамбля для канала Φ с ограничением (21) за счет выбора оператора H. Поэтому из условий предложения и аргументов непрерывности следует, что $I(\rho, \Phi) = \chi_{\Phi}(\rho)$ для любого состояния ρ из $\mathfrak{S}(\mathfrak{H}_A)$. В силу выражения (6) это означает, что $\chi_{\widehat{\Phi}}(\rho) = H(\rho)$ для любого состояния ρ из $\mathfrak{S}(\mathfrak{H}_A)$. В силу обобщенной версии теоремы 2, B) канал Φ является классически-квантовым. ▲

Гипотеза. *Если $\Phi\colon \mathfrak{S}(\mathfrak{H}_A) \to \mathfrak{S}(\mathfrak{H}_B)$ – квантовый канал, такой что $\chi_{\Phi}(\rho) = H(\rho)$ для всех $\rho \in \mathfrak{S}(\mathfrak{H}_A)$, то канал Φ совпадает (с точностью до унитарной эквивалентности) с каналом $\rho \mapsto \rho \otimes \sigma$ при некотором состоянии σ.*

§ 4. Функция $\Delta_{\Phi}(\rho) = I(\rho, \Phi) - \chi_{\Phi}(\rho)$ и ее максимальное значение

Центральную роль при исследовании соотношения между пропускной способностью Холево и пропускной способностью с использованием сцепленности квантового канала Φ играет функция

$$\Delta_{\Phi}(\rho) = I(\rho, \Phi) - \chi_{\Phi}(\rho),$$

введенная в § 2, где было отмечено, что

$$\Delta_{\Phi}(\rho) = H(\rho) - \chi_{\widehat{\Phi}}(\rho) = \min_{\substack{\sum_i \pi_i \rho_i = \rho \\ \operatorname{rank} \rho_i = 1}} \sum_i \pi_i \Big[H(\rho_i \| \rho) - H(\widehat{\Phi}(\rho_i) \| \widehat{\Phi}(\rho)) \Big]$$

и что данный минимум достигается на ансамбле $\{\pi_i, \rho_i\}$ чистых состояний тогда и только тогда, когда этот ансамбль является χ_{Φ}-оптимальным в смысле следующего определения.

Определение 2. Ансамбль $\{\pi_i, \rho_i\}$ чистых состояний называется χ_{Φ}-*оптимальным*, если максимум в определении (3) χ-функции канала Φ достигается на этом ансамбле.

Поскольку $\widehat{H}_{\Phi} \equiv \widehat{H}_{\widehat{\Phi}}$, любой χ_{Φ}-оптимальный ансамбль является $\chi_{\widehat{\Phi}}$-оптимальным, и наоборот.

Из приведенного выше выражения для функции Δ_{Φ} и монотонности относительной энтропии вытекает следующее утверждение.

Лемма 2. *Если Φ – деградируемый канал, то $\Delta_{\Phi}(\rho) \geqslant \Delta_{\widehat{\Phi}}(\rho)$ для всех ρ.*

Следующая теорема посвящена свойствам функции Δ_{Φ}.

Теорема 3. *Пусть $\Phi\colon \mathfrak{S}(\mathfrak{H}_A) \to \mathfrak{S}(\mathfrak{H}_B)$ – квантовый канал, а $\widehat{\Phi}\colon \mathfrak{S}(\mathfrak{H}_A) \to \mathfrak{S}(\mathfrak{H}_E)$ – канал, комплементарный к Φ. Тогда Δ_{Φ} – неотрицательная непрерывная функция на множестве $\mathfrak{S}(\mathfrak{H}_A)$, равная нулю на множестве $\operatorname{extr} \mathfrak{S}(\mathfrak{H}_A)$ чистых состояний. Эта функция обладает следующими свойствами*:

1) *Если существует канал $\Theta\colon \mathfrak{S}(\mathfrak{H}_E) \to \mathfrak{S}(\mathfrak{H}_A)$, такой что*

$$\Theta(\widehat{\Phi}(\rho_i)) = \rho_i, \quad \forall i, \tag{23}$$

для некоторого ансамбля $\{\pi_i, \rho_i\}$ чистых состояний со средним состоянием ρ, то $\Delta_{\Phi}(\rho) = 0$ и ансамбль $\{\pi_i, \rho_i\}$ является χ_{Φ}-оптимальным;

2) *Если* $\Delta_\Phi(\rho)=0$, *то*

- *равенство* (23) *выполнено для любого* χ_Φ*-оптимального ансамбля* $\{\pi_i,\rho_i\}$ *со средним состоянием* ρ, *где* Θ – *канал, действующий на любое состояние* σ *с носителем, лежащим в подпространстве* $\operatorname{supp}\widehat{\Phi}(\rho)$, *следующим образом*: $\Theta(\sigma)=A\widehat{\Phi}^*(B\sigma B)A$, $A=\rho^{1/2}$, $B=\widehat{\Phi}(\rho)^{-1/2}$;
- $\Phi|_{\mathfrak{S}(\mathfrak{H}_\rho)}$ – *классически-квантовый подканал канала* Φ, *где* $\mathfrak{H}_\rho$ – *носитель состояния* ρ;
- $\Delta_\Phi(\sum\limits_i\lambda_i\rho_i)=0$ *для любого* χ_Φ*-оптимального ансамбля* $\{\pi_i,\rho_i\}$ *со средним состоянием* ρ *и любого распределения вероятностей* $\{\lambda_i\}$.

3) *Функция* Δ_Φ *вогнута*[6] *на множестве* $\Big\{\sum\limits_i\lambda_i\rho_i \mid \sum\limits_i\lambda_i=1,\ \lambda_i\geqslant 0\Big\}$ *для любого* χ_Φ*-оптимального ансамбля* $\{\pi_i,\rho_i\}$;

4) Монотонность: *для любого канала* $\Psi\colon\mathfrak{S}(\mathfrak{H}_B)\to\mathfrak{S}(\mathfrak{H}_C)$ *имеет место неравенство*

$$\Delta_{\Psi\circ\Phi}(\rho)\leqslant\Delta_\Phi(\rho),\quad \rho\in\mathfrak{S}(\mathfrak{H}_A);$$

5) Субаддитивность для состояний-произведений: *для любого канала* $\Psi\colon\mathfrak{S}(\mathfrak{H}_C)\to$ $\to\mathfrak{S}(\mathfrak{H}_D)$ *имеет место неравенство*

$$\Delta_{\Phi\otimes\Psi}(\rho\otimes\sigma)\leqslant\Delta_\Phi(\rho)+\Delta_\Psi(\sigma),\quad \rho\in\mathfrak{S}(\mathfrak{H}_A),\quad \sigma\in\mathfrak{S}(\mathfrak{H}_C),$$

которое выполняется в виде равенства, если для каналов Φ *и* Ψ *имеет место сильная аддитивность пропускной способности Холево* (*см.* [8]).

Доказательство. 1) Это свойство следует из монотонности относительной энтропии и рассуждения перед определением 2.

2) Первое утверждение следует из теоремы Петса [13, теорема 3]. Второе утверждение выводится из первого с помощью аргументов из доказательства теоремы 2, B). Третье утверждение следует из первого и свойства 1).

3) Поскольку $\widehat{H}_\Phi\equiv\widehat{H}_{\widehat{\Phi}}$, из представления (4) для функции $\chi_{\widehat{\Phi}}$ следует, что

$$\Delta_\Phi(\rho)=\Big[H(\rho)-H(\widehat{\Phi}(\rho))\Big]+\widehat{H}_\Phi(\rho).$$

В силу тождества $H(\bar{\rho})-\sum\limits_i\pi_iH(\rho_i)=\sum\limits_i\pi_iH(\rho_i\|\bar{\rho})$, где $\bar{\rho}=\sum\limits_i\pi_i\rho_i$, вогнутость слагаемого в квадратных скобках на множестве $\mathfrak{S}(\mathfrak{H}_A)$ следует из монотонности относительной энтропии. Поэтому для доказательства этого утверждения достаточно показать, что функция $\widehat{H}_\Phi$ аффинна на множестве $\Big\{\sum\limits_i\lambda_i\rho_i \mid \sum\limits_i\lambda_i=1,\ \lambda_i\geqslant 0\Big\}$. Это можно сделать, замечая, что функция $\widehat{H}_\Phi$ совпадает с двойным преобразованием Фенхеля функции $H\circ\Phi$, и используя предложение 1 из [17].

4) С помощью представления Стайнспринга нетрудно показать (см. [14, доказательство леммы 17]), что существует канал Θ, такой что $\widehat{\Phi}=\Theta\circ\widehat{\Psi\circ\Phi}$. Поэтому из цепного правила для χ-функции следует, что

$$\Delta_{\Psi\circ\Phi}(\rho)=H(\rho)-\chi_{\widehat{\Psi\circ\Phi}}(\rho)\leqslant H(\rho)-\chi_{\widehat{\Phi}}(\rho)=\Delta_\Phi(\rho).$$

5) Поскольку $\widehat{\Phi\otimes\Psi}=\widehat{\Phi}\otimes\widehat{\Psi}$ (см. [7]), это следует из очевидного неравенства $\chi_{\widehat{\Phi}\otimes\widehat{\Psi}}(\rho\otimes\sigma)\geqslant\chi_{\widehat{\Phi}}(\rho)+\chi_{\widehat{\Psi}}(\sigma)$, которое выполнено в виде равенства, если для каналов Φ и Ψ имеет место сильная аддитивность пропускной способности Холево [8]. ▲

Следующее предложение поясняет смысл максимального значения функции Δ_Φ.

[6] Функция Δ_Φ не является вогнутой на множестве $\mathfrak{S}(\mathfrak{H}_A)$ в общем случае, поскольку это означало бы, что $\Delta_\Phi(\rho)\leqslant\Delta_\Phi(\rho_c)=0$ для любого ковариантного канала Φ, такого что $C_{\mathrm{ea}}(\Phi)=\bar{C}(\Phi)$.

Предложение 7. *Пусть $\Phi\colon \mathfrak{S}(\mathfrak{H}_A) \to \mathfrak{S}(\mathfrak{H}_B)$ – квантовый канал. Тогда*

$$\max_{\rho\in\mathfrak{S}(\mathfrak{H}_A)} \Delta_\Phi(\rho) = \sup_{H,h}\left[C_{\mathrm{ea}}(\Phi,H,h) - \bar{C}(\Phi,H,h)\right], \tag{24}$$

где супремум берется по множеству всех пар вида (положительный оператор $H\in\mathfrak{B}(\mathfrak{H}_A)$, $h>0$).

Доказательство. Для заданных H и h пусть ρ – такое состояние из $\mathfrak{S}(\mathfrak{H}_A)$, что $\mathrm{Tr}\, H\rho \leqslant h$ и $C_{\mathrm{ea}}(\Phi,H,h) = I(\rho,\Phi)$. Поскольку $\bar{C}(\Phi,H,h) \geqslant \chi_\Phi(\rho)$, имеем

$$\Delta_\Phi(\rho) = I(\rho,\Phi) - \chi_\Phi(\rho) \geqslant C_{\mathrm{ea}}(\Phi,H,h) - \bar{C}(\Phi,H,h),$$

что доказывает "$\geqslant$" в (24).

Пусть $\varepsilon > 0$ и ρ_ε – состояние полного ранга в $\mathfrak{S}(\mathfrak{H}_A)$, такое что $\Delta_\Phi(\rho_\varepsilon) \geqslant \max\limits_{\rho\in\mathfrak{S}(\mathfrak{H}_A)} \Delta_\Phi(\rho) - \varepsilon$. В силу леммы 1 из [8] существует пара (H,h), такая что $\mathrm{Tr}\, H\rho_\varepsilon \leqslant h$ и $\bar{C}(\Phi,H,h) = \chi_\Phi(\rho_\varepsilon)$. Поскольку $C_{\mathrm{ea}}(\Phi,H,h) \geqslant I(\rho_\varepsilon,\Phi)$, имеем

$$C_{\mathrm{ea}}(\Phi,H,h) - \bar{C}(\Phi,H,h) \geqslant I(\rho_\varepsilon,\Phi) - \chi_\Phi(\rho_\varepsilon) = \Delta_\Phi(\rho_\varepsilon) \geqslant \max_{\rho\in\mathfrak{S}(\mathfrak{H}_A)} \Delta_\Phi(\rho) - \varepsilon,$$

что доказывает "$\leqslant$" в (24). ▲

Нетрудно видеть, что $\max\limits_{\rho\in\mathfrak{S}(\mathfrak{H}_A)} \Delta_\Phi(\rho) \in [0, \log\dim\mathfrak{H}_A]$. Если $\Delta_\Phi(\rho)\equiv 0$, то выполнены условия предложения 6. Если $\max\limits_{\rho\in\mathfrak{S}(\mathfrak{H}_A)} \Delta_\Phi(\rho) = \log\dim\mathfrak{H}_A$, то канал Φ унитарно эквивалентен каналу $\rho\mapsto\rho\otimes\sigma$, где σ – заданное состояние. Действительно, это значит, что $\chi_{\widehat{\Phi}}(\rho_c) = 0$, где ρ_c – хаотическое состояние в $\mathfrak{S}(\mathfrak{H}_A)$, и следовательно, $\chi_{\widehat{\Phi}}(\rho)\equiv 0$ в силу вогнутости и неотрицательности χ-функции, а это означает, что $\widehat{\Phi}$ – полностью деполяризирующий канал.

Замечание 4. Субаддитивность функции Δ_Φ (свойство 5 в теореме 3) гарантирует существование регуляризации $\Delta^*_\Phi(\rho) = \lim\limits_{n\to+\infty} n^{-1}\Delta_{\Phi^{\otimes n}}(\rho^{\otimes n})$. Повторяя аргументы доказательства предложения 7 и используя субаддитивность квантовой взаимной информации, нетрудно показать, что

$$\max_{\rho\in\mathfrak{S}(\mathfrak{H}_A)} \Delta^*_\Phi(\rho) \geqslant \sup_{H,h}\left[C_{\mathrm{ea}}(\Phi,H,h) - C(\Phi,H,h)\right].$$

Равенство в этом неравенстве имеет место, если для канала Φ имеет место сильная аддитивность пропускной способности Холево (см. [8]), но оно, видимо, не выполнено в общем случае.

Пусть $\Phi\colon \mathfrak{S}(\mathfrak{H}_A) \to \mathfrak{S}(\mathfrak{H}_B)$ и $\Psi\colon \mathfrak{S}(\mathfrak{H}_B) \to \mathfrak{S}(\mathfrak{H}_C)$ – квантовые каналы. Монотонность функции Δ_Φ (свойство 4 в теореме 3) показывает, что неравенство

$$C_{\mathrm{ea}}(\Psi\circ\Phi,H,h) - \bar{C}(\Psi\circ\Phi,H,h) \leqslant C_{\mathrm{ea}}(\Phi,H,h) - \bar{C}(\Phi,H,h)$$

выполнено, если функции $\rho\mapsto I(\rho,\Psi\circ\Phi)$ и $\rho\mapsto\chi_\Phi(\rho)$ имеют общую точку максимума при условии $\mathrm{Tr}\, H\rho\leqslant h$ (это имеет место для каналов Φ и Ψ без ограничений, удовлетворяющих условию ковариантности (14) при $\mathfrak{H}_A = \mathfrak{H}_B$ и $V_g = W_g$).

Справедливость этого неравенства в общем случае – интересный открытый вопрос, однако из монотонности функции Δ_Φ и предложения 7 вытекает следующее наблюдение.

Следствие 2. *Пусть $\Phi\colon \mathfrak{S}(\mathfrak{H}_A) \to \mathfrak{S}(\mathfrak{H}_B)$ и $\Psi\colon \mathfrak{S}(\mathfrak{H}_B) \to \mathfrak{S}(\mathfrak{H}_C)$ – произвольные квантовые каналы. Тогда*

$$\sup_{H,h}\left[C_{\mathrm{ea}}(\Psi\circ\Phi,H,h) - \bar{C}(\Psi\circ\Phi,H,h)\right] \leqslant \sup_{H,h}\left[C_{\mathrm{ea}}(\Phi,H,h) - \bar{C}(\Phi,H,h)\right].$$

Если ввести параметр

$$D(\Phi) = \sup_{H,h} \bigl[C_{\mathrm{ea}}(\Phi, H, h) - \bar{C}(\Phi, H, h)\bigr]$$

канала $\Phi\colon \mathfrak{S}(\mathfrak{H}_A) \to \mathfrak{S}(\mathfrak{H}_B)$, то предыдущие утверждения можно переформулировать следующим образом:

- $D(\Phi) = \max\limits_{\rho \in \mathfrak{S}(\mathfrak{H}_A)} \Delta_\Phi(\rho)$;
- $D(\Psi \circ \Phi) \leqslant D(\Phi)$ для любого канала $\Psi\colon \mathfrak{S}(\mathfrak{H}_B) \to \mathfrak{S}(\mathfrak{H}_C)$;
- $D(\Phi) \in [0, \log\dim\mathfrak{H}_A]$;
- $D(\Phi) = \log\dim\mathfrak{H}_A$ тогда и только тогда, когда канал Φ унитарно эквивалентен каналу $\rho \mapsto \rho \otimes \sigma$, где σ – заданное состояние;
- $D(\Phi) = 0$, если Φ – полностью деполяризирующий канал (обратное утверждение справедливо, если верна гипотеза, сформулированная в конце § 3).

Эти свойства параметра $D(\Phi)$ показывают, что его можно рассматривать как характеристику "уровня шума" канала Φ. К сожалению, не ясен способ вычисления этого параметра для нетривиальных квантовых каналов.

Обобщения полученных в данной статье результатов на случай бесконечномерных квантовых каналов с ограничениями представлены во второй части работы [18].

Автор благодарен А.С. Холево и участникам семинара "Квантовая вероятность, статистика, информация" (Математический институт им. В.А. Стеклова РАН) за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bennett C.H., Shor P.W., Smolin J.A., Thapliyal A.V.* Entanglement-Assisted Classical Capacity of Noisy Quantum Channel // Phys. Rev. Lett. 1999. V. 83. № 15. P. 3081–3084.
2. *Холево А.С.* Квантовые системы, каналы, информация. М.: МЦНМО, 2010.
3. *Нильсен М.А., Чанг И.* Квантовые вычисления и квантовая информация. М.: Мир, 2006.
4. *Hastings M.B.* Superadditivity of Communication Capacity Using Entangled Inputs // Nature Physics. 2009. V. 5. № 4. P. 255–257.
5. *Bennett C.H., Shor P.W., Smolin J.A., Thapliyal A.V.* Entanglement-Assisted Capacity of a Quantum Channel and the Reverse Shannon Theorem // IEEE Trans. Inform. Theory. 2002. V. 48. № 10. P. 2637–2655.
6. *Холево А.С.* Информационная емкость квантовой наблюдаемой // Пробл. передачи информ. 2012. Т. 48. № 1. С. 3–14.
7. *Холево А.С.* Комплементарные каналы и проблема аддитивности // Теория вероятностей и ее применения. 2006. Т. 51.№ 1. С. 133–143.
8. *Holevo A.S., Shirokov M.E.* On Shor's Channel Extension and Constrained Channels // Commun. Math. Phys. 2004. V. 249. № 2. P. 417–430.
9. *Schumacher B., Westmoreland M.D.* Optimal Signal Ensembles // Phys. Rev. A. 2001. V. 63. № 2. P. 022308 (electronic).
10. *Holevo A.S.* Remarks on the Classical Capacity of Quantum Channel // ArXiv e-print `arXiv:quant-ph/0212025`, 2002.
11. *Fan H.* Remarks on Entanglement Assisted Classical Capacity // Phys. Lett. A. 2003. V. 313. № 3. P. 182–187.
12. *Schumacher B., Westmoreland M.D.* Quantum Privacy and Quantum Coherence // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 80. № 25. P. 5695–5697.
13. *Hayden P., Jozsa R., Petz D., Winter A.* Structure of States Which Satisfy Strong Subadditivity of Quantum Entropy with Equality // Commun. Math. Phys. 2004. V. 246. № 2. P. 359–374.

14. *Cubitt T.S., Ruskai M.B., Smith G.* The Structure of Degradable Quantum Channels // J. Math. Phys. 2008. V. 49. № 10. P. 102104 (electronic).
15. *Fukuda M., Holevo A.S.* On Weyl-Covariant Channels // ArXiv e-print `arXiv:quant-ph/0510148v3`, 2006.
16. *Холево А.С.* Классические пропускные способности квантового канала с ограничением на входе // Теория вероятностей и ее применения. 2003. Т. 48. № 2. С. 359–374.
17. *Audenaert K.M.R., Braunstein S.L.* On Strong Superadditivity of the Entanglement of Formation // Commun. Math. Phys. 2004. V. 246. № 3. P. 443–452.
18. *Shirokov M.E.* A Criterion for Coincidence of the Entanglement-Assisted Classical Capacity and the Holevo Capacity of a Quantum Channel // ArXiv e-print `arXiv:quant-ph/1202.3449v2`, 2012.

Широков Максим Евгеньевич
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
`msh@mi.ras.ru`

Поступила в редакцию
06.09.2011
После переработки
21.03.2012