ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том 49 2013 Вып. 1

УДК 621.391.1 : 519.72

© 2013 г. **А.С. Холево, М.Е. Широков**

О КЛАССИЧЕСКИХ ПРОПУСКНЫХ СПОСОБНОСТЯХ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ КВАНТОВЫХ КАНАЛОВ[1]

Получено обобщение теоремы кодирования для классической пропускной способности с использованием сцепленности на случай произвольных бесконечномерных квантовых каналов с любыми ограничениями линейного типа. Установлены соотношения между классической пропускной способностью с использованием сцепленности и χ-пропускной способностью, а также условия их совпадения. Получены достаточные условия непрерывности классической пропускной способности с использованием сцепленности как функции канала. Рассмотрены приложения полученных результатов к бозонным квантовым гауссовским каналам. Получена общая форма фундаментального соотношения между когерентной информацией и мерой секретности передачи классической информации для бесконечномерных квантовых каналов.

§ 1. Введение

Центральную роль в квантовой теории информации играет понятие квантового канала – некоммутативного аналога матрицы переходных вероятностей в классической теории. Информационные свойства квантовых каналов характеризуются различными пропускными способностями, определяемыми типом передаваемой информации, дополнительными ресурсами, используемыми при передаче, требованиями секретности и т.п. (см., например, [1]). Одной из наиболее важных характеристик является классическая пропускная способность с использованием сцепленности, которая определяет предельную скорость передачи классической информации при использовании сцепленного состояния между входом и выходом. В силу определения эта пропускная способность не меньше, чем обычная классическая пропускная способность канала. Теорема Беннетта–Шора – Смолина – Таплияла (BSST-теорема) [2] дает явное выражение для пропускной способности с использованием сцепленности конечномерного канала без ограничений в виде максимума квантовой взаимной информации.

При передаче информации по *бесконечномерному* каналу налагаются определенные ограничения на входные состояния. Типичное физически мотивированное ограничение на среднюю энергию состояний, используемых для кодирования, определяется линейным неравенством

$$\operatorname{Tr}\rho F \leqslant E, \quad E > 0, \tag{1}$$

где F (положительный самосопряженный оператор) – гамильтониан входной квантовой системы. Операциональное определение классической пропускной способности

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке научной программы “Математическая теория управления и динамических систем” РАН и Российского фонда фундаментальных исследований (номера проектов 12-01-00319-а, 13-01-00295-а).

с использованием сцепленности бесконечномерного квантового канала с линейным ограничением (1) дано в [3], где получено обобщение BSST-теоремы при определенных предположениях относительно канала и оператора F. Недавние результаты относительно энтропийных характеристик бесконечномерных квантовых каналов (в частности, по поводу квантовой условной энтропии см. [4]) дают возможность получить обобщение BSST-теоремы для каналов с линейными ограничениями без каких-либо упрощающих предположений. Доказательство этого результата составляет первую часть статьи.

Вторая часть посвящена исследованию соотношений между классическими пропускными способностями с использованием и без использования сцепленности для бесконечномерных каналов с ограничениями, а также условий их (не)совпадения. При определенных условиях показано, что совпадение этих пропускных способностей возможно только для каналов, которые являются в существенном классически-квантовыми (см. определение в [1]).

Мы также рассматриваем вопрос о непрерывности классической пропускной способности с использованием сцепленности как функции канала. Физическая мотивация этого вопроса связана с тем, что квантовый канал в реальном эксперименте подвержен возмущениям. В конечномерном случае непрерывность классической пропускной способности с использованием сцепленности доказана в [5]. В бесконечномерном случае эта пропускная способность является лишь полунепрерывной снизу, и нами установлены достаточные условия ее непрерывности, а также рассмотрены некоторые их приложения.

В § 6 получено бесконечномерное обобщение соотношения, предложенного Шумахером и Вестморлендом [6], которое отражает фундаментальную связь между квантовой пропускной способностью и мерой секретности передачи классической информации по квантовому каналу.

В Приложении рассмотрены некоторые вспомогательные результаты о бозонных гауссовских каналах.

§ 2. Предварительные сведения

Всюду далее $\mathcal{H}$ – сепарабельное гильбертово пространство, $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ – алгебра всех ограниченных операторов в $\mathcal{H}$ и $\mathfrak{B}_+(\mathcal{H})$ – положительный конус в $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$. Пусть $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$ – банахово пространство всех ядерных операторов в $\mathcal{H}$, а $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ – замкнутое выпуклое подмножество пространства $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$, состоящее из положительных операторов с единичным следом, называемых *состояниями* [1, 7]. Обозначим через $I_{\mathcal{H}}$ единичный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, а через $\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$ – тождественное преобразование банахова пространства $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$.

Линейное вполне положительное сохраняющее след отображение $\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathcal{H}_A) \to \mathfrak{T}(\mathcal{H}_B)$ называется *каналом* [1, 7]. В силу теоремы Стайнспринга полная положительность влечет существование гильбертова пространства $\mathcal{H}_E$ и изометрии $V\colon \mathcal{H}_A \to \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_E$, таких что[2]

$$\Phi[\rho] = \mathrm{Tr}_E\, V\rho V^*, \quad \rho \in \mathfrak{T}(\mathcal{H}_A). \tag{2}$$

Канал $\widehat{\Phi}\colon \mathfrak{T}(\mathcal{H}_A) \to \mathfrak{T}(\mathcal{H}_E)$, определяемый выражением

$$\widehat{\Phi}[\rho] = \mathrm{Tr}_B\, V\rho V^*, \quad \rho \in \mathfrak{T}(\mathcal{H}_A), \tag{3}$$

называется *комплементарным* к каналу Φ [8]. Комплементарный канал определен однозначно в следующем смысле: если $\widehat{\Phi}'\colon \mathfrak{T}(\mathcal{H}_A) \to \mathfrak{T}(\mathcal{H}_{E'})$ – канал, определенный

[2] Здесь и далее $\mathrm{Tr}_X(\cdot) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_X}(\cdot)$.

выражением (3) посредством другой изометрии $V'\colon \mathcal{H}_A \to \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_{E'}$, для которой выполняется (2), то существует частичная изометрия $W\colon \mathcal{H}_E \to \mathcal{H}_{E'}$, такая что

$$\widehat{\Phi}'[\rho] = W\widehat{\Phi}[\rho]W^*, \quad \widehat{\Phi}[\rho] = W^*\widehat{\Phi}'[\rho]W, \quad \rho \in \mathfrak{T}(\mathcal{H}_A).$$

Пусть $H(\rho)$ – энтропия фон Неймана состояния ρ, а $H(\rho\,\|\,\sigma)$ – квантовая относительная энтропия состояний ρ и σ [7, 9, 10]. Конечный набор состояний $\{\rho_i\}$ с соответствующим распределением вероятностей $\{\pi_i\}$ называется *ансамблем* и обозначается $\{\pi_i, \rho_i\}$. Состояние $\bar{\rho} = \sum_i \pi_i \rho_i$ называется *средним состоянием* ансамбля $\{\pi_i, \rho_i\}$.

χ-величина ансамбля $\{\pi_i, \rho_i\}$ определяется выражением

$$\chi(\{\pi_i, \rho_i\}) \doteq \sum_i \pi_i H(\rho_i\,\|\,\bar{\rho}) = H(\bar{\rho}) - \sum_i \pi_i H(\rho_i),$$

второе равенство в котором имеет место при условии $H(\bar{\rho}) < +\infty$. Будем использовать обозначение $\chi_\Phi(\{\pi_i, \rho_i\}) = \chi(\{\pi_i, \Phi[\rho_i]\})$. χ-величина является одним из квантовых аналогов шенноновской информации, она участвует в выражениях для классической пропускной способности квантового канала (см. ниже).

Пусть F – положительный самосопряженный оператор в $\mathcal{H}_A$. Для любого состояния $\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)$ величина $\operatorname{Tr}\rho F$ (конечная или бесконечная) определяется как $\sup_n \operatorname{Tr}\rho P_n F P_n$, где P_n – спектральный проектор оператора F, соответствующий отрезку $[0, n]$.

Зададим линейные ограничения на входные состояния $\rho^{(n)}$ канала $\Phi^{\otimes n}$ вида

$$\operatorname{Tr}\rho^{(n)} F^{(n)} \leqslant nE, \tag{4}$$

где

$$F^{(n)} = F \otimes \ldots \otimes I + \ldots + I \otimes \ldots \otimes F. \tag{5}$$

Операциональное определение классической пропускной способности квантового канала с линейным ограничением приведено в [3]. Чтобы задать аналитическое выражение, введем χ-пропускную способность канала Φ с ограничением (4):

$$C_\chi(\Phi, F, E) = \sup_{\rho\colon \operatorname{Tr}\rho F \leqslant E} C_\chi(\Phi, \rho),$$

где

$$C_\chi(\Phi, \rho) = \sup_{\sum_i \pi_i \rho_i = \rho} \chi_\Phi(\{\pi_i, \rho_i\}) \tag{6}$$

– так называемая χ-функция канала Φ (супремум берется по всем ансамблям со средним состоянием ρ). Если $H(\Phi[\rho]) < +\infty$, то

$$C_\chi(\Phi, \rho) = H(\Phi[\rho]) - \widehat{H}_\Phi(\rho), \tag{7}$$

где $\widehat{H}_\Phi(\rho) = \inf_{\sum_i \pi_i \rho_i = \rho} \sum_i \pi_i H(\Phi[\rho_i])$ – σ-выпуклая оболочка функции $\rho \mapsto H(\Phi[\rho])$. В силу вогнутости этой функции инфимум можно брать только по ансамблям чистых состояний. В силу теоремы Холево – Шумахера – Вестморленда (HSW-теоремы) для каналов с линейными ограничениями (см. [3, предложение 3]) классическая пропускная способность канала Φ с ограничением (4) дается следующим регуляризованным выражением:

$$C(\Phi, F, E) = \lim_{n\to+\infty} n^{-1} C_\chi(\Phi^{\otimes n}, F^{(n)}, nE),$$

в котором оператор $F^{(n)}$ определен соотношением (5).

Другим важным аналогом шенноновской информации, который возникает в связи с классической пропускной способностью с использованием сцепленности (см. § 3), является *квантовая взаимная информация*. В конечномерном случае для любого состояния $\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)$ она определяется выражением (см. [11])

$$I(\rho, \Phi) = H(\rho) + H(\Phi[\rho]) - H((\Phi \otimes \mathrm{Id}_R)[\widehat{\rho}]), \tag{8}$$

в котором $\mathcal{H}_R$ – гильбертово пространство эталонной системы, изоморфное пространству $\mathcal{H}_A$, а $\widehat{\rho}$ – очищение состояния ρ в пространстве $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_R$, так что $\rho = \mathrm{Tr}_R\, \widehat{\rho}$. С помощью комплементарного канала квантовую взаимную информацию можно выразить следующим образом:

$$I(\rho, \Phi) = H(\rho) + H(\Phi[\rho]) - H(\widehat{\Phi}[\rho]). \tag{9}$$

В бесконечномерном случае выражения (8), (9) могут содержать неопределенность типа $\infty - \infty$; чтобы этого избежать, следует использовать определение

$$I(\rho, \Phi) = H\left((\Phi \otimes \mathrm{Id}_R)[\widehat{\rho}] \,\|\, (\Phi \otimes \mathrm{Id}_R)[\rho \otimes \varrho]\right), \tag{10}$$

в котором $\varrho = \mathrm{Tr}_A\, \widehat{\rho}$ – состояние из $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_R)$ с тем же ненулевым спектром, что и ρ. Аналитические свойства функции $(\rho, \Phi) \mapsto I(\rho, \Phi)$, определенной в (10), в бесконечномерном случае изучены в [12].

§ 3. Классическая пропускная способность с использованием сцепленности

Рассмотрим следующий протокол передачи классической информации по квантовому каналу $\Phi\colon \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A) \to \mathfrak{S}(\mathcal{H}_{A'})$.[3] Системы A и B находятся в сцепленном (чистом) состоянии ω_{AB}. Система A осуществляет кодирование $\lambda \to \mathcal{E}_\lambda$ классического сигнала λ из конечного алфавита Λ с вероятностями π_λ и посылает свою часть общего состояния по каналу Φ в B. Здесь $\mathcal{E}_\lambda$ – кодирующие каналы, зависящие от сигнала λ. В результате B получает состояния $(\Phi \otimes \mathrm{Id}_B)[\omega_\lambda]$, где $\omega_\lambda = (\mathcal{E}_\lambda \otimes \mathrm{Id}_B)[\omega_{AB}]$, с вероятностями π_λ, и целью B является получение максимальной информации о λ, на основании измерений этих состояний. Для осуществления блочного кодирования эту процедуру следует применить к каналу $\Phi^{\otimes n}$. При этом сигнальные состояния $\omega_\lambda^{(n)}$, передаваемые по каналу $\Phi^{\otimes n} \otimes \mathrm{Id}_B^{\otimes n}$, имеют вид

$$\omega_\lambda^{(n)} = (\mathcal{E}_\lambda^{(n)} \otimes \mathrm{Id}_B^{\otimes n})\bigl[\omega_{AB}^{(n)}\bigr], \tag{11}$$

где $\omega_{AB}^{(n)}$ – чистое сцепленное состояние в n копиях системы AB, а $\lambda \to \mathcal{E}_\lambda^{(n)}$ – кодирующие каналы в n копиях системы A.

Ограничение (4) равносильно аналогичному ограничению на входные состояния канала $\Phi^{\otimes n} \otimes \mathrm{Id}_B^{\otimes n}$ с оператором $F_{AB}^{(n)} = F^{(n)} \otimes I_B^{\otimes n}$. Пусть $\mathcal{P}_{AB}^{(n)}$ – множество всех ансамблей $\pi^{(n)} = \{\pi_\lambda^{(n)}, \omega_\lambda^{(n)}\}$, где $\omega_\lambda^{(n)}$ – состояния вида (11), удовлетворяющие неравенству

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} \pi_\lambda^{(n)} \,\mathrm{Tr}\, \omega_\lambda^{(n)} F_{AB}^{(n)} \leqslant nE.$$

[3] В этом параграфе будет удобно обозначать выход квантового канала через A' вместо B.

Классическая пропускная способность данного протокола называется *классической пропускной способностью с использованием сцепленности* канала Φ с ограничением (4) и обозначается $C_{\mathrm{ea}}(\Phi, F, E)$ (более подробное определение см. в [3]). Модифицируя доказательство предложения 2 в [3], получаем

$$C_{\mathrm{ea}}(\Phi, F, E) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} C_{\mathrm{ea}}^{(n)}(\Phi, F, E), \tag{12}$$

где

$$C_{\mathrm{ea}}^{(n)}(\Phi, F, E) = \sup_{\pi^{(n)} \in \mathcal{P}_{AB}^{(n)}} \chi_{\Phi^{\otimes n}\otimes \mathrm{Id}_B^{\otimes n}}\bigl(\{\pi_\lambda^{(n)}, \omega_\lambda^{(n)}\}\bigr). \tag{13}$$

Именно эти выражения будут использоваться в статье. Следующая теорема обобщает предложение 4 из [3] на случай произвольного канала Φ и произвольного оператора F, определяющего ограничение.

Теорема 1. *Пусть $\Phi\colon \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A) \to \mathfrak{S}(\mathcal{H}_{A'})$ – квантовый канал, а F – самосопряженный положительный оператор в пространстве $\mathcal{H}_A$. Пропускная способность с использованием сцепленности* (*конечная или бесконечная*) *канала Φ с ограничением* (4) *дается выражением*

$$C_{\mathrm{ea}}(\Phi, F, E) = \sup_{\rho\colon \mathrm{Tr}\,\rho F \leqslant E} I(\rho, \Phi). \tag{14}$$

В силу теоремы 1 пропускная способность с использованием сцепленности канала Φ без ограничений равна

$$C_{\mathrm{ea}}(\Phi) = \sup_{\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)} I(\rho, \Phi).$$

Доказательство. Для доказательства неравенства $\geqslant$ в (14) предположим сначала, что канал Φ имеет конечномерный выход (система A' имеет конечную размерность). В этом случае требуемое неравенство можно доказать, повторяя рассуждения из соответствующей части доказательства предложения 4 из [3], основанного на специальном кодирующем протоколе. Сделаем только несколько замечаний об обобщении этого рассуждения:

1. Из конечномерности системы A' следует конечность выходной энтропии канала Φ на всем пространстве входных состояний;
2. Из конечности величины $\mathrm{Tr}\,\rho F$ следует принадлежность всех собственных векторов состояния ρ области определения оператора $\sqrt{F}$;
3. В силу конечномерности системы A' для любого состояния ρ конечного ранга сужение канала $\Phi^{\otimes n}$ на носитель состояния $\rho^{\otimes n}$ можно считать конечномерным каналом при каждом n;
4. Если состояний, удовлетворяющих неравенству $\mathrm{Tr}\,\rho F < E$, не существует, но есть состояние ρ_0 бесконечного ранга, такое что $\mathrm{Tr}\,\rho_0 F = E$, то найдется последовательность $\{\rho_n\}$ состояний конечного ранга, сходящаяся к ρ_0, такая что $\mathrm{Tr}\,\rho_n F = E$, для которой

   $$\liminf_{n\to+\infty} I(\rho_n, \Phi) \geqslant I(\rho_0, \Phi)$$

   в силу полунепрерывности снизу квантовой взаимной информации.

Пусть Φ – произвольный канал, а $\{P_n\}$ – последовательность проекторов в $\mathcal{H}_{A'}$ конечного ранга, сильно сходящаяся к единичному оператору $I_{A'}$. Канал Φ является пределом в топологии сильной сходимости (см. [13]) последовательности каналов $\Pi_n\circ\Phi$ с конечномерным выходом, где $\Pi_n(\rho) = P_n\rho P_n + [\mathrm{Tr}\,\rho(I_{A'} - P_n)]\tau$, а τ – заданное состояние в A'. Поскольку неравенство $\geqslant$ в (14) доказано для каналов с конечномерным выходом, цепное правило для пропускной способности с использованием сцепленности показывает, что

$$C_{\mathrm{ea}}(\Phi, F, E) \geqslant C_{\mathrm{ea}}(\Pi_n \circ \Phi, F, E) \geqslant I(\rho, \Pi_n \circ \Phi)$$

для всех ρ, таких что $\operatorname{Tr} \rho F \leqslant E$. Из полунепрерывности снизу функции $\Phi \mapsto I(\rho, \Phi)$ в топологии сильной сходимости и цепного правила для квантовой взаимной информации (см. [12, предложение 1]) следует, что

$$\lim_{n\to+\infty} I(\rho, \Pi_n \circ \Phi) = I(\rho, \Phi) \leqslant +\infty \quad \text{для всех } \rho.$$

Поэтому неравенство $\geqslant$ в (14) для канала Φ следует из приведенного выше неравенства.

Докажем неравенство $\leqslant$ в (14). В силу доказываемой ниже леммы величина $\chi_{\Phi^{\otimes n}\otimes \mathrm{Id}_B^{\otimes n}}(\dots)$ в правой части неравенства (13) ограничена сверху величиной $I\Bigl(\sum\limits_{\lambda} \pi_\lambda^{(n)} (\omega_\lambda^{(n)})_A, \Phi^{\otimes n}\Bigr)$. Из (12) получаем

$$C_{\mathrm{ea}}(\Phi, F, E) \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sup_{\pi^{(n)} \in \mathcal{P}_{AB}^{(n)}} I\biggl(\sum_{\lambda} \pi_\lambda^{(n)} (\omega_\lambda^{(n)})_A, \Phi^{\otimes n}\biggr).$$

Правая часть не превосходит

$$\sup_{\rho^{(n)}\colon \operatorname{Tr} \rho^{(n)} F^{(n)} \leqslant nE} I\bigl(\rho^{(n)}, \Phi^{\otimes n}\bigr) \equiv \bar{I}_n(\Phi).$$

Заметим, что последовательность $\bar{I}_n(\Phi)$ аддитивна. Для доказательства достаточно установить, что

$$\bar{I}_n(\Phi) \leqslant n \bar{I}_1(\Phi). \tag{15}$$

В силу субаддитивности квантовой взаимной информации

$$I\bigl(\rho^{(n)}, \Phi^{\otimes n}\bigr) \leqslant \sum_{j=1}^{n} I\bigl(\rho_j^{(n)}, \Phi\bigr),$$

где $\rho_j^{(n)}$ – частичные состояния, и в силу вогнутости

$$\sum_{j=1}^{n} I\bigl(\rho_j^{(n)}, \Phi\bigr) \leqslant n I\biggl(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \rho_j^{(n)}, \Phi\biggr).$$

Неравенство $\operatorname{Tr} \rho^{(n)} F^{(n)} \leqslant nE$ равносильно неравенству $\operatorname{Tr}\biggl(\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} \rho_j^{(n)}\biggr) F \leqslant E$, откуда следует (15). Поэтому

$$C_{\mathrm{ea}}(\Phi, F, E) \leqslant \sup_{\rho\colon \operatorname{Tr} \rho F \leqslant E} I(\rho, \Phi).$$

Лемма. *Пусть $\Phi\colon \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A) \to \mathfrak{S}(\mathcal{H}_{A'})$ – квантовый канал, а σ – произвольное состояние из $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_B)$. Для любого ансамбля $\{\pi_i, \omega_i\}$ состояний из $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$, таких что $(\omega_i)_B = \sigma \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_B)$ для всех i, имеет место неравенство*

$$\chi_{\Phi\otimes \mathrm{Id}_B}(\{\pi_i, \omega_i\}) \leqslant I(\omega_A, \Phi), \tag{16}$$

где $\omega = \sum\limits_i \pi_i \omega_i$ – среднее состояние ансамбля $\{\pi_i, \omega_i\}$.

Для доказательства леммы потребуется бесконечномерное обобщение квантовой условной энтропии, предложенное в [4].

В конечномерном случае условная энтропия состояния ρ составной системы AB определяется выражением

$$H(A\,|\,B)_\rho \doteq H(\rho) - H(\rho_B). \tag{17}$$

Условная энтропия всегда конечна, но в отличие от классического случая может быть отрицательной.

Следуя работе [4], условную энтропию состояния ρ бесконечномерной составной системы AB определим выражением

$$H(A\,|\,B)_\rho \doteq H(\rho_A) - H(\rho\,\|\,\rho_A \otimes \rho_B) \tag{18}$$

при условии $H(\rho_A) < +\infty$. Нетрудно видеть, что правые части (17) и (18) совпадают в случае $H(\rho) < +\infty$ (конечность любых двух величин из тройки $H(\rho_A), H(\rho_B), H(\rho)$ гарантирует конечность третьей).

В [4] показано, что определенная таким образом условная энтропия является вогнутой функцией на выпуклом множестве всех состояний ρ системы AB, таких что $H(\rho_A) < +\infty$, и обладает следующими свойствами:

$$H(A\,|\,B)_{\rho_{AB}} \geqslant H(A\,|\,BC)_\rho \tag{19}$$

для любого состояния ρ системы ABC (монотонность);

$$H(A\,|\,B)_{\rho_{AB}} = -H(A\,|\,C)_{\rho_{AC}} \tag{20}$$

для любого чистого состояния ρ системы ABC в предположении, что $H(\rho_A) < +\infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы. Пусть $\{\pi_i, \omega_i\}$ – ансамбль состояний из множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$ со средним состоянием ω, такой что $(\omega_i)_B = \sigma \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_B)$ для всех i. Надо показать, что

$$\sum_i \pi_i H\big(\Phi \otimes \mathrm{Id}_B[\omega_i]\,\|\,\Phi \otimes \mathrm{Id}_B[\omega]\big) \leqslant I(\omega_A, \Phi). \tag{21}$$

Докажем сначала неравенство (21), предполагая, что $\dim \mathcal{H}_{A'} < +\infty$ и $\dim \mathcal{H}_B <$ $< +\infty$. В этом случае левую часть этого неравенства можно переписать в виде

$$L \doteq H(\Phi \otimes \mathrm{Id}_B[\omega]) - \sum_i \pi_i H(\Phi \otimes \mathrm{Id}_B[\omega_i]).$$

В силу субаддитивности энтропии фон Неймана имеем

$$L \leqslant H(\Phi[\rho]) + \sum_i \pi_i \big[H(\sigma) - H(\Phi \otimes \mathrm{Id}_B[\omega_i])\big],$$

где $\rho = \omega_A$. Заметим, что $H(\Phi \otimes \mathrm{Id}_B[\omega_i]) - H(\sigma)$ – условная энтропия $H(A'\,|\,B)$ в состоянии $\Phi \otimes \mathrm{Id}_B(\omega_i)$. Пусть $\widehat{\omega}_i$ – чистое состояние системы ABR_i, такое что $(\widehat{\omega}_i)_{AB} = \omega_i$. В силу монотонности условной энтропии (свойство (19)) имеем

$$H(\Phi \otimes \mathrm{Id}_B[\omega_i]) - H(\sigma) = H(A'\,|\,B)_{\Phi \otimes \mathrm{Id}_B[\omega_i]} \geqslant H(A'\,|\,BR_i)_{\Phi \otimes \mathrm{Id}_{BR_i}[\widehat{\omega}_i]}, \tag{22}$$

где величина $H(A'\,|\,BR_i)$ определена в (18) (система R_i бесконечномерна, однако система A' предполагается конечномерной). Поскольку $\widehat{\omega}_i$ – очищение состояния

$\rho_i \doteq (\omega_i)_A$, т.е. $(\widehat{\omega}_i)_A = \rho_i$, то в силу свойства (20) условной энтропии имеем

$$
\begin{aligned}
&H(A' \,|\, BR_i)_{\Phi\otimes \mathrm{Id}_{BR_i}[\widehat{\omega}_i]} = H(A' \,|\, BR_i)_{\mathrm{Tr}_E\, V\otimes I_{BR_i} \cdot \widehat{\omega}_i \cdot V^*\otimes I_{BR_i}} = \\
&\quad = -H(A' \,|\, E)_{\mathrm{Tr}_{BR_i}\, V\otimes I_{BR_i} \cdot \widehat{\omega}_i \cdot V^*\otimes I_{BR_i}} = -H(A' \,|\, E)_{V\rho_i V^*},
\end{aligned} \tag{23}
$$

где E – система-окружение для канала Φ, а V – изометрия Стайнспринга (что означает $\Phi[\rho] = \mathrm{Tr}_E\, V\rho V^*$).

Используя вогнутость условной энтропии (определенной формулой (18)) и свойство (20), получаем

$$
\sum_i \pi_i H(A' \,|\, E)_{V\rho_i V^*} \leqslant H(A' \,|\, E)_{V\rho V^*} = -H(A' \,|\, R)_{\mathrm{Tr}_E\, V\otimes I_R \cdot \widehat{\rho} \cdot V^*\otimes I_R},
$$

где R – эталонная система для состояния ρ, а $\widehat{\rho}$ – чистое состояние системы AR, такое что $\widehat{\rho}_A = \rho$. Поэтому из (22) и (23) получаем

$$
L \leqslant H(\Phi[\rho]) - H(A' \,|\, R)_{\Phi\otimes \mathrm{Id}_R[\widehat{\rho}]} = H\bigl(\Phi\otimes \mathrm{Id}_R[\widehat{\rho}] \,\|\, \Phi[\rho]\otimes \widehat{\rho}_R\bigr) = I(\rho, \Phi),
$$

где были использованы определения (10) и (18).

Неравенство (21) доказано в предположении $\dim \mathcal{H}_{A'} < +\infty$, $\dim \mathcal{H}_B < +\infty$. Для его доказательства в общем случае воспользуемся методом аппроксимации.

Пусть $\{\pi_i, \omega_i\}$ – такой ансамбль, что $(\omega_i)_B = \sigma \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_B)$, а Q_n – спектральный проектор состояния σ, соответствующий его n наибольшим собственным значениям. Пусть $\lambda_n = \mathrm{Tr}\, Q_n\sigma$ и $C_n = I_A \otimes Q_n$. При каждом натуральном n рассмотрим ансамбль $\{\pi_i, \omega_i^n\}$ со средним состоянием ω^n, где

$$
\omega_i^n = \lambda_n^{-1} C_n \omega_i C_n, \quad \omega^n = \lambda_n^{-1} C_n \omega C_n.
$$

Пусть $\{P_n\}$ – последовательность проекторов конечного ранга в пространстве $\mathcal{H}_{A'}$, сильно сходящаяся к единичному оператору $I_{A'}$, а τ – чистое состояние из $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_{A'})$. Рассмотрим последовательность каналов $\Phi_n = \Pi_n \circ \Phi$, где

$$
\Pi_n[\rho] = P_n\rho P_n + \tau\, \mathrm{Tr}(I_{A'} - P_n)\rho, \quad \rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_{A'}).
$$

Поскольку $(\omega_i^n)_B = \lambda_n^{-1} Q_n \sigma$ для всех i, из первой части доказательства следует, что

$$
\sum_i \pi_i H\left(\Phi_n \otimes \mathrm{Id}_B[\omega_i^n] \,\|\, \Phi_n \otimes \mathrm{Id}_B[\omega^n]\right) \leqslant I(\omega_A^n, \Phi_n).
$$

Поскольку $\lambda_n \omega_A^n \leqslant \omega_A$, из леммы 4 работы [12] вытекает, что $\lim\limits_{n\to+\infty} I(\omega_A^n, \Phi_n) = I(\omega_A, \Phi)$. Поэтому из приведенного выше неравенства, в силу полунепрерывности снизу относительной энтропии, следует неравенство (21). Лемма, а значит, и теорема 1, полностью доказаны. ▲

§ 4. Соотношения между классическими пропускными способностями с использованием и без использования сцепленности

При исследовании бесконечномерных квантовых систем и каналов необходимо рассматривать *обобщенные ансамбли*, которые определяются как борелевские вероятностные меры μ на множестве всех квантовых состояний. При таком подходе обычным ансамблям соответствуют меры с конечным носителем. Обозначим через $\mathcal{P}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$ множество всех обобщенных ансамблей состояний из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$.

χ-величина обобщенного ансамбля μ определяется выражением

$$\chi(\mu) = \int\limits_{\mathfrak{S}(\mathcal{H})} H(\rho \,\|\, \bar{\rho}(\mu))\mu(d\rho) = H(\bar{\rho}(\mu)) - \int\limits_{\mathfrak{S}(\mathcal{H})} H(\rho)\mu(d\rho), \tag{24}$$

в котором $\bar{\rho}(\mu) = \int\limits_{\mathfrak{S}(\mathcal{H})} \rho\mu(d\rho)$ – среднее состояние ансамбля μ (интеграл в смысле Бохнера), а второе равенство справедливо при условии $H(\bar{\rho}(\mu)) < +\infty$ (см. [14]). Для произвольного обобщенного ансамбля $\mu \in \mathcal{P}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}_A))$ и канала $\Phi\colon \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A) \to \mathfrak{S}(\mathcal{H}_B)$ можно рассмотреть ансамбль $\mu \circ \Phi^{-1} \in \mathcal{P}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}_B))$ – образ ансамбля μ при действии канала Φ, определяемый следующим образом:

$$\mu \circ \Phi^{-1}(B) = \mu(\{\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A) \mid \Phi[\rho] \in B\}).$$

χ-величину ансамбля $\mu \circ \Phi^{-1}$ будем обозначать через $\chi_\Phi(\mu)$. Она равна

$$\begin{aligned}\chi_\Phi(\mu) &= \int\limits_{\mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)} H(\Phi[\rho] \,\|\, \Phi[\bar{\rho}(\mu)])\mu(d\rho) = \\ &= H(\Phi[\bar{\rho}(\mu)]) - \int\limits_{\mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)} H(\Phi[\rho])\mu(d\rho),\end{aligned} \tag{25}$$

где второе равенство справедливо при условии $H(\Phi[\bar{\rho}(\mu)]) < +\infty$.

В [14] показано, что для χ-функции, определенной формулой (6), справедливо выражение

$$C_\chi(\Phi, \rho) = \sup_{\mu\colon \bar{\rho}(\mu)=\rho} \chi_\Phi(\mu) \tag{26}$$

(здесь супремум берется по множеству всех обобщенных ансамблей из $\mathcal{P}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}_A))$ со средним состоянием ρ), а значит,

$$C_\chi(\Phi, F, E) = \sup_{\mu\colon \operatorname{Tr}\bar{\rho}(\mu)F \leqslant E} \chi_\Phi(\mu). \tag{27}$$

В этом параграфе будут исследованы общие соотношения между пропускными способностями $C_\chi(\Phi, F, E)$, $C(\Phi, F, E)$ и $C_{\mathrm{ea}}(\Phi, F, E)$, а также условия их совпадения в предположении[4]

$$H(\rho) < +\infty \quad \text{для всех } \rho, \text{ таких что } \operatorname{Tr}\rho F \leqslant E, \tag{28}$$

которое гарантирует, в частности, конечность всех этих величин. Центральную роль в этом исследовании будет играть следующее выражение для квантовой взаимной информации:

$$I(\Phi, \rho) = H(\rho) + C_\chi(\Phi, \rho) - C_\chi(\widehat{\Phi}, \rho), \tag{29}$$

справедливое при условии $H(\rho) < +\infty$ (поскольку $C_\chi(\Phi, \rho) \leqslant H(\rho)$ для любого канала Φ, это условие гарантирует конечность всех слагаемых в правой части (29)).

Если $H(\Phi[\rho])$ и $H(\widehat{\Phi}[\rho])$ конечны, то выражение (29) прямо следует из (7), (9), поскольку $\widehat{H}_\Phi \equiv \widehat{H}_{\widehat{\Phi}}$ (это следует из совпадения $H(\Phi[\rho])$ и $H(\widehat{\Phi}[\rho])$ для чистого состояния ρ); в общем случае оно доказывается с помощью предложения 4 в § 6.

[4] Можно показать, что это предположение равносильно тому, что $\operatorname{Tr}\exp(-\lambda F) < +\infty$ при некотором $\lambda > 0$.

В силу субаддитивности квантовой взаимной информации из выражения (29) следует формальное доказательство неравенства

$$C(\Phi, F, E) \leqslant C_{\mathrm{ea}}(\Phi, F, E), \tag{30}$$

которое представляется очевидным с точки зрения операционального понимания пропускных способностей. Это выражение также позволяет получить следующие неравенства.

П р е д л о ж е н и е 1. *Пусть* $\Phi\colon \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A) \to \mathfrak{S}(\mathcal{H}_B)$ *– квантовый канал, а* F *– положительный оператор, для которого выполнено условие* (28). *Имеют место неравенства*

$$\begin{aligned} &C_{\mathrm{ea}}(\Phi, F, E) \geqslant 2C_{\chi}(\Phi, F, E) - C_{\chi}(\widehat{\Phi}, F, E), \\ &C_{\mathrm{ea}}(\Phi, F, E) \geqslant 2C(\Phi, F, E) - C(\widehat{\Phi}, F, E), \end{aligned} \tag{31}$$

в которых $\widehat{\Phi}\colon \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A) \to \mathfrak{S}(\mathcal{H}_E)$ *– комплементарный канал к* Φ.

Заметим, что в отличие от (30) оба неравенства в (31) превращаются в равенства, если Φ – обратимый унитарный канал. Эти неравенства показывают, что равенство $C_{\mathrm{ea}}(\Phi, F, E) = C_{\chi}(\Phi, F, E)$ (или аналогичное равенство для $C(\Phi, F, E)$) возможно только в случае $C_{\chi}(\Phi, F, E) \leqslant C_{\chi}(\widehat{\Phi}, F, E)$ (соответственно, $C(\Phi, F, E) \leqslant C(\widehat{\Phi}, F, E)$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любого $\varepsilon > 0$ обозначим через ρ_ε состояние из $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)$, такое что

$$C_{\chi}(\Phi, F, E) < C_{\chi}(\Phi, \rho_\varepsilon) + \varepsilon, \quad \operatorname{Tr} \rho_\varepsilon F \leqslant E.$$

Поскольку $C_{\chi}(\Phi, \rho_\varepsilon) \leqslant H(\rho_\varepsilon) < +\infty$, теорема 1 и формула (29) показывают, что

$$\begin{aligned} &C_{\mathrm{ea}}(\Phi, F, E) \geqslant I(\rho_\varepsilon, \Phi) \geqslant 2C_{\chi}(\Phi, \rho_\varepsilon) - C_{\chi}(\widehat{\Phi}, \rho_\varepsilon) \geqslant \\ &\quad \geqslant 2C_{\chi}(\Phi, F, E) - C_{\chi}(\widehat{\Phi}, F, E) - 2\varepsilon, \end{aligned}$$

откуда следует первое неравенство в (31). Второе неравенство в (31) выводится из первого посредством регуляризации. ▲

Рассмотрим вопрос о совпадении пропускных способностей $C_{\mathrm{ea}}(\Phi, F, E)$ и $C_{\chi}(\Phi, F, E)$.

Будем называть канал $\Phi\colon \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A) \to \mathfrak{S}(\mathcal{H}_B)$ *классически-квантовым* (c-q каналом), если образ двойственного канала $\Phi^*\colon \mathfrak{B}(\mathcal{H}_B) \to \mathfrak{B}(\mathcal{H}_A)$ состоит из коммутирующих операторов. Если к тому же все эти операторы диагонализуемы в некотором ортонормированном базисе $\{|k\rangle\}$ в $\mathcal{H}_A$, то будем называть этот канал c-q каналом *дискретного типа*. В этом случае он имеет следующее представление:

$$\Phi[\rho] = \sum_{k=1}^{\dim \mathcal{H}_A} \langle k|\rho|k\rangle \sigma_k, \tag{32}$$

в котором $\{\sigma_k\}$ – набор состояний из $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_B)$. Конечномерный c-q канал всегда является каналом дискретного типа. Примером c-q канала недискретного типа является бозонный гауссовский c-q канал (см. Приложение).

В [15] показано, что $C_{\chi}(\Phi) = C_{\mathrm{ea}}(\Phi)$ для любого конечномерного c-q канала Φ без ограничений; более того, из этого равенства следует, что сужение канала Φ на носитель среднего состояния любого оптимального ансамбля является c-q каналом (ансамбль называется оптимальным [16], если его χ-величина совпадает с $C_{\chi}(\Phi)$). Пример из [17] показывает, что при этом сам канал Φ может не быть c-q каналом.

Чтобы распространить это утверждение на бесконечномерный случай, необходимо использовать понятие обобщенного оптимального ансамбля для бесконечномерного канала с ограничением [14]. Обобщенный ансамбль μ_* является оптимальным для канала Φ с ограничением (4), если

$$\operatorname{Tr}\bar{\rho}(\mu_*)F \leqslant E \quad \text{и} \quad C_\chi(\Phi, F, E) = \chi_\Phi(\mu_*),$$

т.е. если супремум в (27) достигается на мере μ_*.

Это определение – естественное обобщение понятия оптимального ансамбля для конечномерного канала. В отличие от конечномерного случая оптимальный обобщенный ансамбль для бесконечномерного канала с ограничением существует не всегда, однако имеет место следующее достаточное условие.

Предложение 2 [14]. *Если подмножество множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)$, определяемое неравенством $\operatorname{Tr}\rho F \leqslant E$, компактно*[5]*, а функция $\rho \mapsto H(\Phi[\rho])$ непрерывна на этом подмножестве, то существует обобщенный оптимальный ансамбль для канала Φ с ограничением* (4).

Это условие выполнено для произвольного бозонного гауссовского канала с ограничением на среднюю энергию, когда F – гамильтониан осцилляторного типа, задаваемый строго положительно определенной квадратичной формой от канонических наблюдаемых (см. [14, замечание после предложения 3]). Оно также выполнено для любого канала, имеющего представление Крауса с конечным числом слагаемых, если оператор F удовлетворяет условию $\operatorname{Tr}\exp(-\lambda F) < +\infty$ при всех $\lambda > 0$ (это можно показать, используя предложение 6.6 из [10]).

Следующая теорема дает необходимое условие совпадения пропускных способностей $C_\chi(\Phi, F, E)$ и $C_{\mathrm{ea}}(\Phi, F, E)$.

Теорема 2. *Предположим, что существует обобщенный оптимальный ансамбль μ_* для канала $\Phi\colon \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A) \to \mathfrak{S}(\mathcal{H}_B)$ с ограничением* (4) *(например, выполнено условие предложения* 2) *и что выполнено условие* (28). *Пусть $\mathcal{H}_*$ – носитель среднего состояния ансамбля μ_*, т.е. $\mathcal{H}_* = \operatorname{supp}\bar{\rho}(\mu_*)$.*

Если $C_\chi(\Phi, F, E) = C_{\mathrm{ea}}(\Phi, F, E)$, то сужение канала Φ на множество $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_*)$ является c-q каналом дискретного типа.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что оптимальный обобщенный ансамбль μ_* состоит из чистых состояний. Это следует из выпуклости функции $\sigma \mapsto H(\Phi[\sigma] \,\|\, \Phi[\rho])$, поскольку для произвольной меры $\mu \in \mathcal{P}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}_A))$ существует мера $\widehat{\mu} \in \mathcal{P}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}_A))$ с носителем на множестве чистых состояний, такая что $\bar{\rho}(\widehat{\mu}) = \bar{\rho}(\mu)$ и $\int f(\sigma)\widehat{\mu}(d\sigma) \geqslant \int f(\sigma)\mu(d\sigma)$ для любой выпуклой полунепрерывной снизу неотрицательной функции f на $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)$ (эту меру $\widehat{\mu}$ можно построить, используя рассуждение из доказательства теоремы в [14]).

Из равенства $C_\chi(\Phi, F, E) = C_{\mathrm{ea}}(\Phi, F, E)$ следует, что $C_\chi(\Phi, \bar{\rho}(\mu_*)) = I(\Phi, \bar{\rho}(\mu_*))$. В силу условия (28) и представления (29) это равносильно равенству $H(\bar{\rho}(\mu_*)) = C_\chi(\widehat{\Phi}, \bar{\rho}(\mu_*)) < +\infty$. В силу замечания после предложения 4 в § 6 и условия (28) из равенства $C_\chi(\Phi, \bar{\rho}(\mu_*)) = \chi_\Phi(\mu_*)$ следует, что $C_\chi(\widehat{\Phi}, \bar{\rho}(\mu_*)) = \chi_{\widehat{\Phi}}(\mu_*)$. Поскольку $H(\bar{\rho}(\mu_*)) = \chi(\mu_*)$, равенство $H(\bar{\rho}(\mu_*)) = \chi_{\widehat{\Phi}}(\mu_*)$ показывает, что канал $\widehat{\Phi}$ сохраняет χ-величину ансамбля μ_*, т.е. $\chi_{\widehat{\Phi}}(\mu_*) = \chi(\mu_*)$. В силу теоремы 5 из [18] сужение канала $\widehat{\widehat{\Phi}} \cong \Phi$ на множество $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_*)$ является c-q каналом дискретного типа. ▲

Замечание. В отличие от каналов без ограничений утверждение, обратное к утверждению теоремы 2, не имеет места даже в конечномерном случае: классическая пропускная способность с использованием сцепленности c-q канала дискретного

[5] Это подмножество компактно тогда и только тогда, когда спектр оператора F состоит из собственных значений конечной кратности, стремящихся к бесконечности (см. лемму в [3] и лемму 3 в [14]).

типа с линейным ограничением может быть больше классической пропускной способности [15, пример 3]. Повторяя рассуждение из доказательства теоремы 2 в [15] и используя условие (28), можно показать, что $C_\chi(\Phi, F, E) = C_{\mathrm{ea}}(\Phi, F, E)$ *для любого c-q канала дискретного типа* Φ *с ограничением* (4), *если оператор* F *диагонализуем в базисе* $\{|k\rangle\}$ *из представления* (32) *канала* Φ.

Для произвольного нетривиального подпространства $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_A$ сужение канала $\Phi\colon \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A) \to \mathfrak{S}(\mathcal{H}_B)$ на подмножество $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_0)$ будем называть *подканалом* канала Φ, соответствующим подпространству $\mathcal{H}_0$.

Теорема 2 дает следующее достаточное условие выполнения строгого неравенства $C_{\mathrm{ea}}(\Phi, F, E) > C_\chi(\Phi, F, E)$.

Следствие. *Если выполнены условия теоремы* 2, *то* $C_{\mathrm{ea}}(\Phi, F, E) > C_\chi(\Phi, F, E)$ *в любом из следующих случаев*:

1. *Канал* Φ *не является c-q каналом дискретного типа, а оптимальная мера* μ_* *имеет невырожденное среднее состояние*;
2. *Канал* Φ *не имеет c-q подканалов дискретного типа.*

Как было отмечено выше, условия теоремы 2 выполнены для произвольного гауссовского канала $\Phi_{K,l,\alpha}$, если F – гамильтониан осцилляторного типа (K, l, α – параметры канала, см. Приложение). В силу следствия и предложения 5 строгое неравенство $C_{\mathrm{ea}}(\Phi_{K,l,\alpha}, F, E) > C_\chi(\Phi_{K,l,\alpha}, F, E)$ имеет место в каждом из следующих случаев:

1. $K \neq 0$, и оптимальная мера μ_* имеет невырожденное среднее состояние;
2. Ранг матрицы K совпадает с размерностью $2k$ входного симплектического пространства (k – число входных мод).

Условие 1 выполнено, если для канала $\Phi_{K,l,\alpha}$ справедлива гипотеза о гауссовских оптимизаторах (см. [1, глава 12]).

§ 5. О непрерывности пропускной способности с использованием сцепленности

Поскольку физический канал определяется с некоторой конечной точностью, возникает вопрос о непрерывности его пропускных способностей по отношению к малым возмущениям канала.

В этом параграфе рассмотрим свойства непрерывности пропускной способности с использованием сцепленности по отношению к топологии сильной сходимости на множестве всех каналов [13]. Сильная сходимость последовательности каналов $\Phi_n\colon \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A) \to \mathfrak{S}(\mathcal{H}_B)$ к каналу $\Phi_0\colon \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A) \to \mathfrak{S}(\mathcal{H}_B)$ означает, что $\lim_{n\to+\infty} \Phi_n[\rho] = \Phi_0[\rho]$ для любого состояния $\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)$.

Из теоремы 1 и полунепрерывности снизу квантовой взаимной информации следует, что $\Phi \mapsto C_{\mathrm{ea}}(\Phi, F, E)$ – полунепрерывная снизу функция в топологии сильной сходимости на множестве всех квантовых каналов, т.е.

$$\liminf_{n\to+\infty} C_{\mathrm{ea}}(\Phi_n, F, E) \geqslant C_{\mathrm{ea}}(\Phi_0, F, E) \quad (\leqslant +\infty)$$

для любой последовательности $\{\Phi_n\}$ каналов, сильно сходящейся к каналу Φ_0.

Следующее предложение дает достаточные условия непрерывности.

Предложение 3. *Пусть* F – *положительный оператор, такой что неравенство* $\operatorname{Tr}\exp(-\lambda F) < +\infty$ *выполнено для всех* $\lambda > 0$, *а* $\{\Phi_n\}$ – *последовательность каналов, сильно сходящаяся к каналу* Φ_0. *Соотношение*

$$\lim_{n\to+\infty} C_{\mathrm{ea}}(\Phi_n, F, E) = C_{\mathrm{ea}}(\Phi_0, F, E) < +\infty \tag{33}$$

имеет место при выполнении одного из следующих условий:

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} H(\Phi_n[\rho_n]) = H(\Phi_0[\rho_0])$ *для произвольной последовательности* $\{\rho_n\}$, *сходящейся к состоянию* ρ_0, *такой что* $\operatorname{Tr}\rho_n F \leqslant E$ *для всех* $n = 0, 1, 2, \ldots$;
2. *Существует последовательность каналов* $\{\widehat{\Phi}_n\}$, *сильно сходящаяся к каналу* $\widehat{\Phi}_0$, *такая что* $(\Phi_n, \widehat{\Phi}_n)$ – *комплементарная пара при каждом* $n = 0, 1, 2, \ldots$

Условие 1 предложения 3 выполнено для любой сходящейся последовательности гауссовских каналов, если F – осцилляторный гамильтониан бозонной системы.

Условие 2 предложения 3 выполнено для последовательности каналов

$$\Phi_n[\rho] = \sum_{i=1}^{+\infty} V_i^n \rho (V_i^n)^*,$$

где $\{V_i^n\}_n$ – последовательность операторов из $\mathcal{H}_A$ в $\mathcal{H}_B$, сильно сходящаяся к оператору V_i^0 при каждом i, таких что $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} (V_i^n)^* V_i^n = I_A$ для всех n. Действительно,

$$\widehat{\Phi}_n[\rho] = \sum_{i,j=1}^{+\infty} [\operatorname{Tr} V_i^n \rho (V_j^n)^*] |i\rangle\langle j|,$$

где $\{|i\rangle\}_{i=1}^{+\infty}$ – ортонормированный базис в $\mathcal{H}_E$, и нетрудно видеть, что последовательности $\{\Phi_n\}$ и $\{\widehat{\Phi}_n\}$ сильно сходятся к каналам Φ_0 и $\widehat{\Phi}_0$ соответственно (которые определены аналогичными формулами при $n = 0$).

Доказательство. Прежде всего заметим, что множество

$$\mathcal{A} = \{\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A) \mid \operatorname{Tr}\rho F \leqslant E\}$$

компактно (в силу леммы из [3]), а функция $\rho \mapsto H(\rho)$ непрерывна на этом множестве (в силу предложения 6.6 из [10]).

В силу предложения 4 из [12] функция $\rho \mapsto I(\rho, \Phi_n)$ непрерывна на компактном множестве $\mathcal{A}$ при каждом n, и следовательно,

$$C_{\mathrm{ea}}(\Phi_n, F, E) = \sup_{\rho\in\mathcal{A}} I(\rho, \Phi_n) = I(\rho_n, \Phi_n) < +\infty$$

для некоторого состояния ρ_n из $\mathcal{A}$.

Предположим, что существует

$$\lim_{n\to+\infty} C_{\mathrm{ea}}(\Phi_n, F, E) > C_{\mathrm{ea}}(\Phi_0, F, E). \tag{34}$$

В силу замечания перед предложением 3 для доказательства (33) достаточно установить, что (34) приводит к противоречию.

Поскольку множество $\mathcal{A}$ компактно, можно считать (переходя к подпоследовательности), что последовательность $\{\rho_n\}$ сходится к некоторому состоянию $\rho_0 \in \mathcal{A}$. Поэтому для получения противоречия с (34) достаточно показать, что

$$\lim_{n\to+\infty} I(\rho_n, \Phi_n) = I(\rho_0, \Phi_0). \tag{35}$$

Условия 1 и 2 предложения 3 дают разные способы доказательства соотношения (35). Если выполнено условие 1, то

$$I(\rho_n, \Phi_n) = H(\rho_n) + H(\Phi_n[\rho_n]) - H(\Phi_n \otimes \mathrm{Id}_R[|\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|]),$$

где $|\varphi_n\rangle$ – любое очищение состояния ρ_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$

В силу полунепрерывности снизу функции $(\Phi,\rho)\mapsto I(\rho,\Phi)$, непрерывности энтропии на множестве $\mathcal{A}$ и условия 1 для доказательства (35) достаточно установить, что

$$\liminf_{n\to+\infty} H(\Phi_n\otimes \mathrm{Id}_R[|\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|])\geqslant H(\Phi_0\otimes \mathrm{Id}_R[|\varphi_0\rangle\langle\varphi_0|]).$$

Это соотношение следует из полунепрерывности снизу относительной энтропии, поскольку из сильной сходимости последовательности $\{\Phi_n\}$ к каналу Φ_0 следует сильная сходимость последовательности $\{\Phi_n\otimes \mathrm{Id}_R\}$ к $\Phi_0\otimes \mathrm{Id}_R$, а последовательность $\{|\varphi_n\rangle\}$ можно выбрать сходящейся к вектору $|\varphi_0\rangle$ [12, лемма 2].

Если выполнено условие 2, то утверждение (35) непосредственно следует из предложения 5 в [12]. ▲

§ 6. Когерентная информация и мера секретности передачи классической информации

Пусть $\Phi\colon \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)\to\mathfrak{S}(\mathcal{H}_B)$ – квантовый канал, а $\widehat{\Phi}\colon \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)\to\mathfrak{S}(\mathcal{H}_E)$ – канал, комплементарный к Φ. В конечномерном случае *когерентная информация* канала Φ в любом состоянии ρ определяется как разность между $H(\Phi[\rho])$ и $H(\widehat{\Phi}[\rho])$. Когерентная информация – это еще один квантовый аналог шенноновской информации, имеющий отношение к квантовой пропускной способности канала [1, 6, 7]. В бесконечномерном случае величины $H(\Phi[\rho])$ и $H(\widehat{\Phi}[\rho])$ могут быть бесконечны даже для состояния ρ с конечной энтропией, поэтому когерентную информацию следует определить через квантовую взаимную информацию (как функцию со значениями в $(-\infty,+\infty]$) соотношением (см. [12])

$$I_c(\rho,\Phi)=I(\rho,\Phi)-H(\rho).$$

Пусть ρ – состояние из $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)$ с конечной энтропией. В силу монотонности χ-величины значения $\chi_{\Phi}(\mu)$ и $\chi_{\widehat{\Phi}}(\mu)$ не превосходят $H(\rho)=\chi(\mu)$ для любой меры $\mu\in\mathcal{P}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}_A))$ с носителем на множестве чистых состояний и барицентром ρ. Следующее предложение можно считать обобщением соотношения из работы [6], которое лежит в основе фундаментальной связи между квантовой пропускной способностью и мерой секретности передачи классической информации по квантовому каналу [6]. Эта мера определяется как разность $\chi_{\Phi}(\mu)-\chi_{\widehat{\Phi}}(\mu)$ между χ-величинами приемника и окружения (перехватчика).

Предложение 4. *Если μ – мера из $\mathcal{P}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}_A))$ с носителем на множестве чистых состояний и барицентром ρ, то*

$$\chi_{\Phi}(\mu)-\chi_{\widehat{\Phi}}(\mu)=I(\rho,\Phi)-H(\rho)=I_c(\rho,\Phi). \tag{36}$$

Это предложение показывает, в частности, что разность $\chi_{\Phi}(\mu)-\chi_{\widehat{\Phi}}(\mu)$ не зависит от μ. Поэтому если супремум в выражении (26) для величины $C_{\chi}(\Phi,\rho)$ достигается на некоторой мере μ_*, то и в аналогичном выражении для величины $C_{\chi}(\widehat{\Phi},\rho)$ супремум достигается на той же мере μ_*, и наоборот.

Доказательство. Если $H(\Phi[\rho])<+\infty$, то $H(\widehat{\Phi}[\rho])<+\infty$ в силу неравенства треугольника для энтропий (см. [7]), и соотношение (36) можно вывести из (9), используя второе выражение в (25) и совпадение функций $\rho\mapsto H(\Phi[\rho])$ и $\rho\mapsto H(\widehat{\Phi}[\rho])$ на множестве чистых состояний. В общем случае для доказательства (36) необходимо использовать метод аппроксимации. Для этого нам потребуются некоторые дополнительные понятия.

Пусть $\mathfrak{T}_1(\mathcal{H}) = \{A \in \mathfrak{T}(\mathcal{H}) \,|\, A \geqslant 0,\ \operatorname{Tr} A \leqslant 1\}$. Будем использовать следующие продолжения энтропии фон Неймана на множество $\mathfrak{T}_1(\mathcal{H})$ (см. [9]):

$$S(A) = -\operatorname{Tr} A \log A, \quad H(A) = S(A) + \operatorname{Tr} A \log \operatorname{Tr} A, \quad \forall A \in \mathfrak{T}_1(\mathcal{H}).$$

Из неотрицательности, вогнутости и полунепрерывности снизу энтропии фон Неймана следуют аналогичные свойства функций S и H на множестве $\mathfrak{T}_1(\mathcal{H})$.

Относительная энтропия операторов $A, B \in \mathfrak{T}_1(\mathcal{H})$ определяется следующим образом (подробнее см. в [9]):

$$H(A \,\|\, B) = \sum_i \langle i| \,(A \log A - A \log B + B - A)\, |i\rangle,$$

где $\{|i\rangle\}$ – ортонормированный базис из собственных векторов оператора A. С помощью этого расширения относительной энтропии χ-величину меры μ из $\mathcal{P}(\mathfrak{T}_1(\mathcal{H}))$ можно определить выражением (24).[6]

Линейное вполне положительное отображение $\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathcal{H}_A) \to \mathfrak{T}(\mathcal{H}_B)$, не увеличивающее след, называется *квантовой операцией* [7]. Для любой квантовой операции Φ имеет место представление Стайнспринга (2), в котором V – сжимающий оператор. Комплементарная операция $\widehat{\Phi}\colon \mathfrak{T}(\mathcal{H}_A) \to \mathfrak{T}(\mathcal{H}_E)$ определяется с помощью этого представления формулой (3).

Модифицируя рассуждения в доказательстве предложения 1 из [14], нетрудно показать, что функция $\mu \mapsto \chi(\mu)$ полунепрерывна снизу на множестве $\mathcal{P}(\mathfrak{T}_1(\mathcal{H}))$ и что для произвольной квантовой операции Φ и любой меры $\mu \in \mathcal{P}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}_A))$, таких что $S(\Phi[\bar{\rho}(\mu)]) < +\infty$, χ-величину для меры $\mu \circ \Phi^{-1} \in \mathcal{P}(\mathfrak{T}_1(\mathcal{H}_B))$ можно выразить следующей формулой:

$$\chi_\Phi(\mu) = S(\Phi[\bar{\rho}(\mu)]) - \int\limits_{\mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)} S(\Phi[\rho])\, \mu(d\rho). \tag{37}$$

Теперь можно доказать соотношение (36) в общем случае. Заметим, что для заданной меры $\mu \in \mathcal{P}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}_A))$ функция $\Phi \mapsto \chi_\Phi(\mu)$ полунепрерывна снизу на множестве всех квантовых операций, снабженном топологией сильной сходимости (для которой $\Phi_n \to \Phi$ означает, что $\Phi_n[\rho] \to \Phi[\rho]$ для всех ρ [13]). Это следует из полунепрерывности снизу функции $\mu \mapsto \chi(\mu)$ на множестве $\mathcal{P}(\mathfrak{T}_1(\mathcal{H}_B))$, поскольку для любой последовательности $\{\Phi_n\}$ квантовых операций, сильно сходящейся к квантовой операции Φ, последовательность $\{\mu \circ \Phi_n^{-1}\}$ слабо сходится к мере $\mu \circ \Phi^{-1}$ (это можно проверить непосредственно, используя определение слабой сходимости и заметив, что для последовательностей квантовых операций сильная сходимость равносильна равномерной сходимости на компактных подмножествах множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)$, см. доказательство леммы 1 в [13]).

Пусть $\{P_n\}$ – возрастающая последовательность проекторов конечного ранга в $\mathfrak{B}(\mathcal{H}_B)$, сильно сходящаяся к I_B. Рассмотрим последовательность квантовых операций $\Phi_n = \Pi_n \circ \Phi$, где $\Pi_n[\sigma] = P_n \sigma P_n$. Тогда

$$\widehat{\Phi}_n[\rho] = \operatorname{Tr}_{\mathcal{H}_B} P_n \otimes I_{\mathcal{H}_E} V \rho V^*, \quad \rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A), \tag{38}$$

где V – изометрия из представления Стайнспринга (2) канала Φ.

Последовательности $\{\Phi_n\}$ и $\{\widehat{\Phi}_n\}$ сильно сходятся к каналам Φ и $\widehat{\Phi}$ соответственно. Пусть $\rho = \sum\limits_k \lambda_k |k\rangle\langle k|$ и $|\varphi_\rho\rangle = \sum\limits_k \sqrt{\lambda_k} |k\rangle \otimes |k\rangle$. Поскольку $H(\rho) < +\infty$ и

[6] $\mathcal{P}(\mathfrak{T}_1(\mathcal{H}))$ – множество всех вероятностных мер на $\mathfrak{T}_1(\mathcal{H})$, снабженное топологией слабой сходимости.

$S(\Phi_n[\rho]) < +\infty$, то и $S(\widehat{\Phi}_n[\rho]) < +\infty$ в силу неравенства треугольника для энтропий. Поэтому

$$
\begin{aligned}
I(\rho, \Phi_n) &= H\big(\Phi_n \otimes \mathrm{Id}_R[|\varphi_\rho\rangle\langle\varphi_\rho|] \,\|\, \Phi_n[\rho] \otimes \varrho\big) = \\
&= -S(\widehat{\Phi}_n[\rho]) + S(\Phi_n[\rho]) + a_n = -\chi_{\widehat{\Phi}_n}(\mu) + \chi_{\Phi_n}(\mu) + a_n,
\end{aligned}
\tag{39}
$$

где

$$
a_n = -\sum_k \mathrm{Tr}(\Phi_n[|k\rangle\langle k|])\lambda_k \log \lambda_k, \tag{40}
$$

а последнее равенство получено с помощью соотношения (37), где использовано совпадение функций $\rho \mapsto S(\Phi[\rho])$ и $\rho \mapsto S(\widehat{\Phi}[\rho])$ на множестве чистых состояний.

Поскольку функция $\Phi \mapsto I(\rho, \Phi)$ полунепрерывна снизу (в силу полунепрерывности снизу относительной энтропии) и $I(\rho, \Phi_n) \leqslant I(\rho, \Phi)$ для всех n в силу монотонности относительной энтропии при действии квантовой операции $\Pi_n \otimes \mathrm{Id}_R$, имеем

$$
\lim_{n \to +\infty} I(\rho, \Phi_n) = I(\rho, \Phi). \tag{41}
$$

Покажем также, что

$$
\lim_{n \to +\infty} \chi_{\Phi_n}(\mu) = \chi_\Phi(\mu) \quad \text{и} \quad \lim_{n \to +\infty} \chi_{\widehat{\Phi}_n}(\mu) = \chi_{\widehat{\Phi}}(\mu). \tag{42}
$$

Первое соотношение в (42) следует из полунепрерывности снизу функции $\Phi \mapsto \chi_\Phi(\mu)$ (установленной ранее) и неравенства $\chi_{\Phi_n}(\mu) \leqslant \chi_\Phi(\mu)$, выполненного для всех n в силу монотонности χ-величины при действии квантовой операции Π_n.

Для доказательства второго соотношения в (42) заметим, что из (38) следует $\widehat{\Phi}_n[\rho] \leqslant \widehat{\Phi}[\rho]$ для любого состояния $\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)$. Поэтому лемма 2 из [13] показывает, что

$$
\chi_{\widehat{\Phi}_n}(\mu) \leqslant \chi_{\widehat{\Phi}}(\mu) + f(\mathrm{Tr}\, \widehat{\Phi}_n[\rho]), \tag{43}
$$

где $f(x) = -2x \log x - (1-x)\log(1-x)$, для любой меры $\mu \in \mathcal{P}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}_A))$ с конечным носителем и барицентром ρ. Пусть μ – произвольная мера из $\mathcal{P}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}_A))$, а $\{\mu_k\}$ – последовательность мер с конечным носителем и барицентром ρ, построенная в доказательстве леммы 1 из [14], которая слабо сходится к мере μ. Выполнимость неравенства (43) для меры μ выводится из того, что оно выполнено для всех мер μ_k. При этом используются полунепрерывность снизу функции $\mu \mapsto \chi_{\widehat{\Phi}_n}(\mu)$ и неравенство $\chi_{\widehat{\Phi}}(\mu_k) \leqslant \chi_{\widehat{\Phi}}(\mu)$, которое выполнено для всех k в силу конструкции последовательности $\{\mu_k\}$ и выпуклости относительной энтропии.

Из неравенства (43) и полунепрерывности снизу функции $\Phi \mapsto \chi_\Phi(\mu)$ следует второе соотношение в (42).

Поскольку последовательность $\{a_n\}$ (определенная в (40)), очевидно, сходится к $H(\rho)$, из соотношений (39), (41) и (42) следует (36). ▲

ПРИЛОЖЕНИЕ

Гауссовские классически-квантовые каналы. Основные приложения теории бесконечномерных квантовых систем и каналов связаны с бозонными системами, подробное описание которых можно найти, например, в [1, глава 11]. Пусть $\mathcal{H}_A$ –

пространство неприводимого представления канонических коммутационных соотношений

$$W_A(z_A)W_A(z'_A) = \exp\biggl(-\frac{i}{2}z_A^\top \Delta_A z'_A\biggr)W_A(z'_A + z_A) \tag{44}$$

с координатным симплектическим пространством (Z_A, Δ_A) и семейством операторов Вейля $W_A(z_A) = \exp(iR_A \cdot z_A)$, $z_A \in Z_A$. Здесь R_A – вектор-строка канонических переменных в пространстве $\mathcal{H}_A$, а Δ_A – кососимметрическая коммутационная матрица компонент строки R_A. Гауссовский канал $\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathcal{H}_A) \to \mathfrak{T}(\mathcal{H}_B)$ (где пространство $\mathcal{H}_B$ определяется аналогично пространству $\mathcal{H}_A$) задается действием двойственного отображения Φ^* на операторы Вейля:

$$\Phi^*[W_B(z_B)] = W_A(Kz_B)\exp\biggl[il^\top z_B - \frac{1}{2}z_B^\top \alpha z_B\biggr], \tag{45}$$

где K – матрица линейного оператора $Z_B \to Z_A$, $l \in Z_B$, а α – вещественная симметрическая матрица, удовлетворяющая условию

$$\alpha \geqslant \pm\frac{i}{2}\left(\Delta_B - K^\top \Delta_A K\right).$$

П р е д л о ж е н и е 5. *Пусть $\Phi_{K,l,\alpha}$ – гауссовский канал с параметрами K, l, α.*

1) *Канал $\Phi_{K,l,\alpha}$ является c-q каналом тогда и только тогда, когда*

$$K^\top \Delta_A K = 0.$$

В этом случае он является c-q каналом дискретного типа тогда и только тогда, когда $K = 0$, т.е. когда он является вполне деполяризующим каналом.

2) *Если $\operatorname{rank} K = \dim Z_A$, то канал $\Phi_{K,l,\alpha}$ не имеет c-q подканалов дискретного типа.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Поскольку семейство $\{W_B(z_B)\}_{z_B \in Z_B}$ порождает алгебру $\mathfrak{B}(\mathcal{H}_B)$, все операторы $\Phi^*_{K,l,\alpha}(A)$, $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_B)$, коммутируют тогда и только тогда, когда операторы (45), т.е. $W_A(Kz_B)$, коммутируют для всех z_B. В силу (44)

$$W_A(Kz_B)W_A(Kz'_B) = \exp\left(-iz_B^\top K^\top \Delta_A K z'_B\right) W_A(Kz'_B)W_A(Kz_B),$$

откуда следует первое утверждение. Из предположения о существовании дискретного представления (32) следует, что все операторы $W_A(Kz_B) = \exp(iR_A \cdot Kz_B)$ имеют чисто точечный спектр, что возможно, только если $Kz_B \equiv 0$, поскольку, как известно, канонические наблюдаемые R_A имеют непрерывный спектр.

2) Предположим, что существует подпространство $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_A$, такое что

$$\Phi_{K,l,\alpha}[\rho] = \sum_k \langle k|\rho|k\rangle \sigma_k$$

для всех $\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_0)$, где $\{|k\rangle\}$ – ортонормированный базис в $\mathcal{H}_0$. Тогда

$$\begin{aligned} &PW_A(Kz_B)P\exp\biggl[il^\top z_B - \frac{1}{2}z_B^\top \alpha z_B\biggr] = P\Phi^*_{K,l,\alpha}[W_B(z_B)]P = \\ &\quad= \sum_k [\operatorname{Tr} W_B(z_B)\sigma_k]|k\rangle\langle k|, \end{aligned}$$

где $P = \sum\limits_k |k\rangle\langle k|$ – проектор на $\mathcal{H}_0$. Следовательно, $\langle k|W_A(Kz_B)|j\rangle = 0$ для всех $k \neq j$. Но это невозможно, поскольку $\{Kz_B \mid z_B \in Z_B\} = Z_A$, а значит, семейство $\{W_A(Kz_B)\}_{z_B \in Z_B}$ операторов Вейля действует неприводимо на $\mathcal{H}_A$. ▲

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Холево А.С.* Квантовые системы, каналы, информация. М.: МЦНМО, 2010.
2. *Bennett C.H., Shor P.W., Smolin J.A., Thapliyal A.V.* Entanglement-Assisted Classical Capacity of Noisy Quantum Channels // Phys. Rev. Lett. 1999. V.83. № 15. P. 3081–3084.
3. *Холево А.С.* Классические пропускные способности квантового канала с ограничением на входе // Теория вероятностей и ее применения. 2003. Т. 48. № 2. С. 359–374.
4. *Кузнецова А.А.* Условная энтропия для бесконечномерных квантовых систем // Теория вероятностей и ее применения. 2010. Т. 55. № 4. С. 782–790.
5. *Leung D., Smith G.* Continuity of Quantum Channel Capacities // Comm. Math. Phys. 2009. V. 292. № 1. P. 201–215.
6. *Schumacher B., Westmoreland M.D.* Quantum Privacy and Quantum Coherence // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 80. № 25. P. 5695–5697.
7. *Нильсен М. А., Чанг И.* Квантовые вычисления и квантовая информация. М.: Мир, 2006.
8. *Холево А.С.* Комплементарные каналы и проблема аддитивности // Теория вероятностей и ее применения. 2006. Т. 51. № 1. С. 133–143.
9. *Lindblad G.* Expectations and Entropy Inequalities for Finite Quantum Systems // Commun. Math. Phys. 1974. V. 39. № 2. P. 111–119.
10. *Ohya M., Petz D.* Quantum Entropy and Its Use. Berlin: Springer, 2004.
11. *Adami C., Cerf N.J.* Von Neumann Capacity of Noisy Quantum Channels // Phys. Rev. A. 1997. V. 56. № 5. P. 3470–3483.
12. *Холево А.С., Широков М.Е.* Взаимная и когерентная информации для бесконечномерных квантовых каналов // Пробл. передачи информ. 2010. Т. 46. № 3. С. 3–21.
13. *Холево А.С., Широков М.Е.* Об аппроксимации бесконечномерных квантовых каналов // Пробл. передачи информ. 2008. Т. 44. № 2. С. 3–22.
14. *Холево А.С., Широков М.Е.* Непрерывные ансамбли и пропускная способность квантовых каналов бесконечной размерности // Теория вероятностей и ее применения. 2005. Т. 50. № 1. С. 98–114.
15. *Широков М.Е.* Условия совпадения классической пропускной способности и классической пропускной способности с использованием сцепленности квантового канала // Пробл. передачи информ. 2012. Т. 48. № 2. С. 3–20.
16. *Schumacher B., Westmoreland M.D.* Optimal Signal Ensembles // Phys. Rev. A. 2001. V. 63. № 2. P. 022308.
17. *Bennett C.H., Shor P.W., Smolin J.A., Thapliyal A.V.* Entanglement-Assisted Capacity of a Quantum Channel and the Reverse Shannon Theorem // IEEE Trans. Inform. Theory. 2002. V. 48. № 10. P. 2637–2655.
18. *Shirokov M.E.* On Quantum Channels Reversible with Respect to a Given Family of Pure States // `arXiv:1203.0262v1 [quant-ph]`, 2012.

Холево Александр Семенович
Широков Максим Евгеньевич
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
holevo@mi.ras.ru
msh@mi.ras.ru

Поступила в редакцию
22.10.2012