ПРОБЛЕМА АДДИТИВНОСТИ ДЛЯ КВАНТОВЫХ КАНАЛОВ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

А. С. Холево, М. Е. Широков

Одной из центральных проблем квантовой теории информации [1] является гипотеза об аддитивности классической пропускной способности квантовых каналов связи [2]–[4]. Недавно П. Шор показал [5], что выполнимость этой гипотезы для всех квантовых каналов эквивалентна целому ряду свойств (супер)аддитивности других важных характеристик таких, как минимальная выходная энтропия и мера сцепленности (entanglement of formation). В настоящей работе вводится новое свойство сильной аддитивности (аддитивности для каналов с ограничениями на входе), дается ряд его равносильных формулировок, устанавливается его выполнимость для некоторых нетривиальных классов каналов и отмечается, что выполнимость гипотезы аддитивности для всех каналов влечет сильную аддитивность.

Пусть $\mathscr{H}$, $\mathscr{H}'$ – конечномерные унитарные пространства. Квантовым каналом называется линейное вполне положительное сохраняющее след отображение $\Phi\colon \mathfrak{B}(\mathscr{H}) \mapsto \mathfrak{B}(\mathscr{H}')$, где $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ – алгебра всех операторов в $\mathscr{H}$. В частности, Φ порождает аффинное отображение выпуклого множества $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$ состояний (операторов плотности) на пространстве $\mathscr{H}$ в множество $\mathfrak{S}(\mathscr{H}')$ состояний на пространстве $\mathscr{H}'$ [1].

Квантовый аналог теоремы Шеннона, установленный в [4], дает следующее выражение для классической пропускной способности:

$$C(\Phi) = \lim_{n\to\infty} n^{-1}\overline{C}(\Phi^{\otimes n}),$$

где $\Phi^{\otimes n} = \Phi\otimes\dots\otimes\Phi$ – n-я тензорная степень канала Φ,

$$\overline{C}(\Phi) = \max_{\{\pi_i,\rho_i\}}\biggl\{H\biggl(\sum_i \pi_i\Phi(\rho_i)\biggr) - \sum_i \pi_i H(\Phi(\rho_i))\biggr\}. \tag{1}$$

Здесь $H(\rho) = -\operatorname{Tr}\rho\log\rho$ – энтропия фон Неймана, а максимум берется по произвольным входным ансамблям $\{\pi_i,\rho_i\}$, представляющим собой конечный набор состояний $\{\rho_i\}\subset\mathfrak{S}(\mathscr{H})$ с соответствующими вероятностями $\{\pi_i\}$. Гипотеза аддитивности состоит в том, что

$$\overline{C}(\Phi\otimes\Psi) = \overline{C}(\Phi) + \overline{C}(\Psi), \tag{2}$$

где $\Phi\otimes\Psi$ – тензорное произведение каналов Φ, Ψ. Ее выполнимость для фиксированного канала Φ и произвольного Ψ влечет, в частности, равенство $\overline{C}(\Phi) = C(\Phi)$. Обзор относящихся сюда результатов см. в [3], [5].

Обозначая $\chi_\Phi(\{\pi_i,\rho_i\})$ выражение в фигурных скобках в (1), введем функцию

$$\chi_\Phi(\rho) = \max_{\rho_{\mathrm{av}}=\rho}\chi_\Phi(\{\pi_i,\rho_i\}) = H(\Phi(\rho)) - \widehat{H}_\Phi(\rho), \tag{3}$$

где $\rho_{\mathrm{av}} = \sum_i\pi_i\rho_i$ – среднее ансамбля $\{\pi_i,\rho_i\}$, $\widehat{H}_\Phi(\rho) = \min_{\rho_{\mathrm{av}}=\rho}\sum_i\pi_i H(\Phi(\rho_i))$ – выпуклое замыкание [6] выходной энтропии канала $H(\Phi(\rho))$. Функция $\chi_\Phi(\rho)$, как и $H(\Phi(\rho))$, является вогнутой непрерывной функцией на $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$. Введем также функцию

$$\nu_H(\Phi,A) = \min_{\rho\in\mathfrak{S}(\mathscr{H})}[H(\Phi(\rho)) + \operatorname{Tr}A\rho], \tag{4}$$

которая является сопряженной к минимальной выходной энтропии [6].

Пусть $\mathscr{A}\subseteq\mathfrak{S}(\mathscr{H})$ – некоторое замкнутое подмножество состояний на входе канала. Рассмотрим величину

$$\overline{C}(\Phi,\mathscr{A}) = \max_{\rho\in\mathscr{A}}\chi_\Phi(\rho) = \max_{\rho_{\mathrm{av}}\in\mathscr{A}}\chi_\Phi(\{\pi_i,\rho_i\}). \tag{5}$$

В приложениях $\mathscr{A}$ обычно определяется линейным неравенством $\operatorname{Tr}A\rho\leqslant\alpha$, где A – некоторый положительный оператор (например, энергия), $\alpha\geqslant 0$.

Работа выполнена при частичной поддержке грантов НШ 1758.2003.1 и ИНТАС 00-738.

Рассмотрим два канала $\Phi\colon \mathfrak{S}(\mathscr{H}) \mapsto \mathfrak{S}(\mathscr{H}')$ и $\Psi\colon \mathfrak{S}(\mathscr{K}) \mapsto \mathfrak{S}(\mathscr{K}')$ с ограничениями, определяемыми множествами $\mathscr{A} \subseteq \mathfrak{S}(\mathscr{H})$ и $\mathscr{B} \subseteq \mathfrak{S}(\mathscr{K})$ соответственно. Для канала $\Phi \otimes \Psi$ естественно ввести "наследственное" ограничение, определяемое включениями $\omega_{\mathrm{av}}^{\Phi} = \operatorname{Tr}_{\mathscr{K}} \omega_{\mathrm{av}} \in \mathscr{A}$ и $\omega_{\mathrm{av}}^{\Psi} = \operatorname{Tr}_{\mathscr{H}} \omega_{\mathrm{av}} \in \mathscr{B}$, где ω_{av} – среднее входного ансамбля $\{\mu_i, \omega_i\}$. Соответствующее подмножество в $\mathfrak{S}(\mathscr{H} \otimes \mathscr{K})$ обозначим $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$. Гипотеза аддитивности для каналов с ограничениями состоит в том, что

$$\overline{C}(\Phi \otimes \Psi; \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}) = \overline{C}(\Phi; \mathscr{A}) + \overline{C}(\Psi; \mathscr{B}). \tag{6}$$

Теорема 1. *Пусть Φ и Ψ – произвольные каналы. Следующие свойства равносильны*:

(i) *равенство* (6) *имеет место для произвольных замкнутых подмножеств $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$*;

(ii) *равенство* (6) *имеет место для подмножеств $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$, определяемых соответственно неравенствами $\operatorname{Tr} A\rho_{\mathrm{av}} \leqslant \alpha$ и $\operatorname{Tr} B\sigma_{\mathrm{av}} \leqslant \beta$ при произвольных A, α, B, β*;

(iii) $\chi_{\Phi\otimes\Psi}(\omega) \leqslant \chi_{\Phi}(\omega^{\Phi}) + \chi_{\Psi}(\omega^{\Psi}) \quad \forall\, \omega \in \mathfrak{S}(\mathscr{H} \otimes \mathscr{K})$; (7)

(iv) $\widehat{H}_{\Phi\otimes\Psi}(\omega) \geqslant \widehat{H}_{\Phi}(\omega^{\Phi}) + \widehat{H}_{\Psi}(\omega^{\Psi}) \quad \forall\, \omega \in \mathfrak{S}(\mathscr{H} \otimes \mathscr{K})$; (8)

(v) $\nu_H(\Phi \otimes \Psi, A \otimes I + I \otimes B) = \nu_H(\Phi, A) + \nu_H(\Psi, B) \ \forall\, A \in \mathfrak{B}_+(\mathscr{H}), \ \forall\, B \in \mathfrak{B}_+(\mathscr{K})$.

Если выполняется одно из этих эквивалентных свойств, то будем говорить, что для каналов Φ и Ψ имеет место *сильная аддитивность*.

Рассмотрим канал $\Phi\colon \mathfrak{S}(\mathscr{H}) \mapsto \mathfrak{S}(\mathscr{H}')$, и пусть $E \in \mathfrak{B}(\mathscr{H})$, $0 \leqslant E \leqslant I$. Пусть $q \in [0;1]$ и $d \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. Расширение Шора $\widehat{\Phi}(E, q, d)$ с вероятностью $1-q$ действует как канал Φ, а с вероятностью q производит измерение в $\mathscr{H}$ с двумя исходами $\{0, 1\}$, описываемое разложением единицы $\{I - E, E\}$. Если исход измерения 1, то на выход посылаются $\log d$ бит классической информации, в противном случае – сигнал неудачи. Точное определение см. в [7], [5]. Интересна асимптотика, когда q стремится к нулю, а d – к бесконечности, причем отношение $q\log d = \lambda$ остается постоянным. Тогда $\widehat{\Phi}$ с высокой вероятностью действует на входные состояния ρ как Φ, изредка посылая большое количество информации, пропорциональное величине $\operatorname{Tr} \rho E$. Это объясняет связь между пропускной способностью расширения $\widehat{\Phi}$ и канала Φ с линейным ограничением на входе.

Теорема 2. *Пусть $\Phi\colon \mathfrak{S}(\mathscr{H}) \mapsto \mathfrak{S}(\mathscr{H}')$ и $\Psi\colon \mathfrak{S}(\mathscr{K}) \mapsto \mathfrak{S}(\mathscr{K}')$ – произвольные каналы с фиксированным ограничением $\mathscr{B}$ на входе второго канала. Следующие утверждения эквивалентны*:

(i) *аддитивность* (6) *имеет место для канала Φ с произвольным замкнутым ограничением на входе и канала Ψ с ограничением $\mathscr{B}$*;

(ii) *свойство аддитивности выполняется асимптотически при $d \to \infty$ для последовательности каналов $\{\widehat{\Phi}(E, \lambda/\log d, d)\}_{d\in\mathbb{N}}$ с произвольным оператором $0 \leqslant E \leqslant I$ и произвольным $\lambda > 0$ и канала Ψ с ограничением $\mathscr{B}$.*

Применяя эту теорему дважды, получаем

Следствие. *Выполнимость гипотезы аддитивности* (2) *для всех каналов влечет свойство сильной аддитивности* (6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[**1**] А. С. Холево. Введение в квантовую теорию информации. М.: МЦНМО, 2002. [**2**] Г. Г. Амосов, Р. Ф. Вернер, А. С. Холево // Проблемы передачи информации. 2000. Т. 36. №4. С. 25–34. [**3**] A. S. Holevo. http://www.imaph.nat.tu-bs.de/qi/problems/problems.html. [**4**] А. С. Холево // УМН. 1998. Т. 53. №6. С. 193–230. [**5**] P. Shor. Arxiv e-print quant-ph/0305035, 2003. [**6**] А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. [**7**] A. S. Holevo, M. E. Shirokov. Arxiv e-print quant-ph/0306196, 2003.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Принято редколлегией
23.01.2004