О ПОНЯТИИ СЦЕПЛЕННОСТИ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Р. Ф. Вернер, А. С. Холево, М. Е. Широков

Оператор плотности (состояние) в тензорном произведении $\mathscr{H}\otimes\mathscr{K}$ гильбертовых пространств называется *разделимым*, если он принадлежит выпуклому замыканию подмножества состояний-произведений. Неразделимые состояния называются *сцепленными* (entangled). Эти понятия имеют важное значение в квантовой теории информации, однако они подробно изучались только в конечномерном случае [1]. В этом сообщении дается общее интегральное представление для разделимых состояний и впервые построен пример разделимого состояния, которое не является счетно разложимым. Мы также доказываем структурную теорему для квантовых каналов, разрушающих сцепленность (entanglement-breaking), которая обобщает конечномерный результат из [2]. В конечномерном случае такие каналы могут быть охарактеризованы как имеющие представление Стайнспринга–Крауса (3) с операторами V_j ранга 1. Пример не счетно разложимого состояния показывает существование бесконечномерных каналов, разрушающих сцепленность, которые не имеют такого представления.

В дальнейшем $\mathscr{H},\mathscr{K},\dots$ – сепарабельные гильбертовы пространства, $\mathfrak{T}(\mathscr{H})$ – банахово пространство ядерных операторов и $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$ – выпуклое множество всех операторов плотности в $\mathscr{H}$. Для краткости мы называем их *состояниями*, подразумевая, что оператор плотности ρ однозначно задает нормальное состояние на алгебре $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ всех ограниченных операторов в $\mathscr{H}$. Множество $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$ с расстоянием, определяемым следовой нормой, является полным сепарабельным метрическим пространством. Если π – борелевская вероятностная мера на $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$, то интеграл Бохнера

$$\bar{\rho}(\pi)=\int_{\mathfrak{S}(\mathscr{H})}\sigma\,\pi(d\sigma) \tag{1}$$

определяет состояние, называемое *барицентром* меры π.

Следующая лемма, которая усиливает утверждение о разложении Шоке для случая замкнутых выпуклых подмножеств $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$, доказывается с использованием критерия компактности семейств вероятностных мер на $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$ [3]. Мы обозначаем $\overline{\mathrm{co}}\mathscr{A}$ выпуклое замыкание множества $\mathscr{A}$ [4].

Лемма. *Пусть $\mathscr{A}$ – замкнутое подмножество $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$. Тогда $\overline{\mathrm{co}}\mathscr{A}$ совпадает с множеством барицентров всех борелевских вероятностных мер с носителем $\mathscr{A}$.*

Определение 1. Состояние в $\mathscr{H}\otimes\mathscr{K}$ называется *разделимым*, если оно принадлежит выпуклому замыканию подмножества всех состояний-произведений $\rho\otimes\sigma$, где $\rho\in\mathfrak{S}(\mathscr{H})$, $\sigma\in\mathfrak{S}(\mathscr{K})$. Состояние называется *сцепленным*, если оно не разделимо.

В данном определении множество всех состояний-произведений можно заменить на подмножество всех чистых состояний-произведений (крайних точек множества $\mathfrak{S}(\mathscr{H}\otimes\mathscr{K})$). Подмножество $\mathfrak{P}(\mathscr{H}\otimes\mathscr{K})$ чистых состояний замкнуто в топологии следовой нормы. Поэтому из леммы следует, что состояние ρ является разделимым тогда и только тогда, когда существует борелевская вероятностная мера μ на $\mathfrak{P}(\mathscr{H})\times\mathfrak{P}(\mathscr{K})$ такая, что

$$\rho=\int_{\mathfrak{P}(\mathscr{H})}\int_{\mathfrak{P}(\mathscr{K})}|\varphi\rangle\langle\varphi|\otimes|\psi\rangle\langle\psi|\,\mu(d\varphi d\psi). \tag{2}$$

В конечномерном случае в силу теоремы Каратеодори данное представление сводится к известному определению разделимого состояния как конечной выпуклой комбинации чистых состояний-произведений [1]. В общем случае назовем состояние *счетно разложимым*, если для него существует представление (2) с чисто атомической мерой μ.

Канал – это линейное сохраняющее след отображение из $\mathfrak{T}(\mathscr{H})$ в $\mathfrak{T}(\mathscr{H}')$ такое, что двойственное отображение $\Phi^*\colon\mathfrak{B}(\mathscr{H}')\mapsto\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ (которое существует, поскольку Φ ограничено) является вполне положительным. Для любого канала существует (неединственное) представление Стайнспринга–Крауса

$$\Phi(\rho)=\sum_j V_j\rho V_j^*, \tag{3}$$

в котором V_j – ограниченные операторы из $\mathscr{H}$ в $\mathscr{H}'$ такие, что $\sum_j V_j^*V_j=I$.

Работа выполнена при поддержке фонда А. фон Гумбольдта и гранта НШ 1758.2003.1.

Определение 2. Канал Φ называется *каналом, разрушающим сцепленность*, если для любого гильбертова пространства $\mathscr{K}$ и любого состояния $\omega \in \mathfrak{S}(\mathscr{H} \otimes \mathscr{K})$ состояние $(\Phi \otimes \mathrm{Id}_{\mathscr{K}})(\omega)$, где $\mathrm{Id}_{\mathscr{K}}$ – тождественный канал в $\mathscr{K}$, является разделимым.

Теорема 1. *Канал Φ является каналом, разрушающим сцепленность, тогда и только тогда, когда существует полное сепарабельное метрическое пространство $\mathscr{X}$, борелевская $\mathfrak{S}(\mathscr{H}')$-значная функция $x \mapsto \rho'(x)$ и разложение единицы (положительная операторно-значная мера) $M(dx)$ на $\mathscr{X}$ такие, что*

$$\Phi(\rho) = \int_{\mathscr{X}} \rho'(x)\, \mu_\rho(dx), \tag{4}$$

где $\mu_\rho(B) = \operatorname{Tr} \rho M(B)$ для любого борелевского множества $B \subseteq \mathscr{X}$.

Доказательство использует обобщение известного соответствия между вполне положительными отображениями и состояниями в $\mathscr{H}' \otimes \mathscr{K}$ [5].

Если существует представление (4) с чисто атомической мерой $M(dx)$, то канал Φ называется *счетно разложимым*. Нетрудно убедиться, что канал является счетно разложимым тогда и только тогда, когда для него существует представление (3) с операторами V_j ранга 1. С другой стороны, канал является счетно разложимым тогда и только тогда, когда состояния в $(\Phi \otimes \mathrm{Id}_{\mathscr{K}})(\mathfrak{S}(\mathscr{H} \otimes \mathscr{K}))$ счетно разложимы. Это сводит вопрос о существовании канала, разрушающего сцепленность, но не имеющего представления (3) с операторами ранга 1, к вопросу о существовании разделимого состояния, которое не является счетно разложимым. Ниже приведена конструкция такого состояния.

Рассмотрим одномерный тор $\mathbb{T}$, параметризованный как интервал $[0, 2\pi)$ со сложением $\operatorname{mod} 2\pi$. Пусть $\mathscr{H} = L^2(\mathbb{T})$ с нормированной мерой Лебега $\frac{dx}{2\pi}$. Рассмотрим унитарное представление $x \to V_x$ группы $\mathbb{T}$, где $(V_u\psi)(x) = \psi(x-u)$.

Теорема 2. *Для любых векторов состояний $|\varphi_j\rangle \in \mathscr{H}_j \simeq L^2(\mathbb{T})$, $j = 1, 2$, с отличными от нуля коэффициентами Фурье разделимое состояние*

$$\rho_{12} = \int_0^{2\pi} V_x^{(1)} |\varphi_1\rangle\langle\varphi_1| V_x^{(1)*} \otimes V_x^{(2)} |\varphi_2\rangle\langle\varphi_2| V_x^{(2)*} \, \frac{dx}{2\pi}$$

в $\mathfrak{S}(\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2)$ не является счетно разложимым.

Следствие 1. *Существует канал, разрушающий сцепленность, не представимый в виде (3) с операторами V_j ранга 1.*

Доказательство состоит в явном построении, опирающемся на пример теоремы 2 и соответствие между вполне положительными отображениями и состояниями в тензорном произведении пространств. Имеется гипотеза, что не счетно разложимые состояния образуют плотное подмножество во множестве всех разделимых состояний. В пользу этого говорит следующий результат.

Следствие 2. *В любой окрестности произвольного чистого состояния-произведения найдутся разделимые состояния, которые не счетно разложимы.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[**1**] R. F. Werner. Quantum Information Theory – an Invitation // Springer Tracts Modern Phys.. V. 173, 2001; e-print quant-ph/0101061. [**2**] M. Horodecki, P. W. Shor, M. B. Ruskai // Rev. Math. Phys. 2003. V. 15. P. 629–641; e-print quant-ph/0302031. [**3**] А. С. Холево, М. Е. Широков // Теория вероятн. и ее примен. 2005 (to appear); e-print quant-ph/0408176. Т. 50. №1. [**4**] А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. [**5**] M.-D. Choi // Linear Algebra Appl. 1975. V. 10. P. 285–290.

Institute of Mathematical Physics, TUB,
Braunschweig, Germany;
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: holevo@mi.ras.ru, msh@mi.ras.ru

Представлено А. В. Булинским
Принято редколлегией 15.03.2005