М. Е. Широков, О квантовой пропускной способности при нулевой ошибке, *УМН*, 2015, том 70, выпуск 1(421), 187–188

О квантовой пропускной способности при нулевой ошибке

М. Е. Широков

Понятие пропускной способности канала связи при нулевой ошибке появилось в классических трудах Шеннона; существенное продвижение в его изучении связано с работами Ловача. Квантовое обобщение этого понятия и связанного с ним понятия некоммутативного графа смежности дано в [1], [2]. В настоящей заметке построено семейство квантовых каналов Φ_n с положительной (асимптотической) квантовой пропускной способностью при нулевой ошибке, для которых соответствующая n-шаговая пропускная способность равна нулю. Этот эффект является новым проявлением недавно открытого феномена “суперактивации” пропускных способностей квантового канала при блочном кодировании [3]–[5].

Квантовым каналом называется линейное вполне положительное сохраняющее след отображение $\Phi\colon \mathfrak{M}(\mathscr{H}_A)\to\mathfrak{M}(\mathscr{H}_B)$, где $\mathfrak{M}(\mathscr{H}_X)$ – алгебра всех операторов в конечномерном унитарном пространстве $\mathscr{H}_X$.

Определение (см. [6; гл. 9]). Квантовый канал $\Phi\colon \mathfrak{M}(\mathscr{H}_A)\to\mathfrak{M}(\mathscr{H}_B)$ обратим на подпространстве $\mathscr{H}_0\subset\mathscr{H}_A$, если существует квантовый канал $\Psi\colon \mathfrak{M}(\mathscr{H}_B)\to\mathfrak{M}(\mathscr{H}_A)$ такой, что $\Psi(\Phi(\rho))=\rho$ для любого состояния ρ с носителем в $\mathscr{H}_0$.

Сужение канала Φ на подалгебру $\mathfrak{M}(\mathscr{H}_0)$ будем называть *идеальным подканалом* канала Φ. Именно идеальные подканалы осуществляют безошибочную передачу квантовых состояний при однократном использовании канала Φ. Если же используется блочное кодирование для n копий канала Φ, то безошибочная передача квантовых состояний осуществляется идеальными подканалами канала $\Phi^{\otimes n}$.

В данной заметке показано, как для любого $n\in\mathbb{N}$ явно построить такой квантовый канал Φ_n, что у канала $\Phi_n^{\otimes n}$ (а значит, и у каналов $\Phi_n^{\otimes k}$, $k<n$) нет идеальных подканалов, но при некотором $m>n$ у канала $\Phi_n^{\otimes m}$ появляется идеальный подканал. Это означает, что, используя не более n копий канала Φ_n, нельзя безошибочно передать никаких квантовых состояний, но такая передача становится возможной, если число используемых копий данного канала не меньше m, причем это число m можно явно вычислить по заданному n.

Для фиксированного $\theta\in(-\pi,\pi]$ рассмотрим подпространство

$$\mathfrak{L}_\theta=\left\{\begin{bmatrix} a & b & \gamma c & d\\ b & a & d & \overline{\gamma}c\\ \overline{\gamma}c & d & a & b\\ d & \gamma c & b & a\end{bmatrix},\ a,b,c,d\in\mathbb{C},\ \gamma=\exp\biggl(\frac{\mathrm{i}}{2}\theta\biggr)\right\} \tag{1}$$

алгебры всех (4×4)-матриц, которое можно считать деформацией максимальной коммутативной $*$-подалгебры $\mathfrak{L}_0$ (ср. [7]). Поскольку $\mathfrak{L}_\theta$ симметрично ($\mathfrak{L}_\theta^*=\mathfrak{L}_\theta$), содержит единичную матрицу и $\dim\mathfrak{L}_\theta=4$, нетрудно явно построить квантовые каналы с $\mathscr{H}_A=\mathbb{C}^4$ и рангом Чоя, равным 2, для которых подпространство $\mathfrak{L}_\theta$ является некоммутативным графом смежности (см. [8; приложение]). Множество всех таких каналов обозначим $\widehat{\mathfrak{L}}_\theta$.

Для заданного $n\in\mathbb{N}$ пусть $\mathscr{H}_n$ – подпространство в $\mathbb{C}^{4n}=[\mathbb{C}^4]^{\otimes n}$, порожденное векторами $x=e_1\otimes\dots\otimes e_1+\mathrm{i}\cdot e_2\otimes\dots\otimes e_2$ и $y=e_3\otimes\dots\otimes e_3+\mathrm{i}\cdot e_4\otimes\dots\otimes e_4$, где $\{e_1,\dots,e_4\}$ – канонический базис в $\mathbb{C}^4$ (в каждом произведении n сомножителей).

Теорема. *Пусть Φ_θ – произвольный канал из $\widehat{\mathfrak{L}}_\theta$ и n – любое натуральное число.*
A) *У канала Φ_θ есть идеальные подканалы тогда и только тогда, когда $\theta=\pi$.*

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-21-00162).
DOI: 10.4213/rm9642

B) *Если* $|\theta_1|+\dots+|\theta_n|\leqslant 2\ln(3/2)$, *то у канала* $\Phi_{\theta_1}\otimes\dots\otimes\Phi_{\theta_n}$ *нет идеальных подканалов*.

C) *Если* $\theta_1+\dots+\theta_n=\pi \pmod{2\pi}$, *то у канала* $\Phi_{\theta_1}\otimes\dots\otimes\Phi_{\theta_n}$ *есть идеальный подканал, соответствующий подпространству* $\mathscr{H}_n$.

Комбинируя утверждения B) и C) теоремы, получаем наш основной результат.

Следствие 1. *Пусть n произвольно, а m – такое натуральное число, что* $\theta_*=\pi/m\leqslant 2\ln(3/2)/n$. *Тогда у каналов* $\Phi_{\theta_*}^{\otimes k}$, $k=1,2,\dots,n$, *нет идеальных подканалов, а у канала* $\Phi_{\theta_*}^{\otimes m}$ *есть идеальный подканал, соответствующий подпространству* $\mathscr{H}_m$.

В квантовой теории информации величина $\overline{Q}_0(\Phi)=\sup_{\mathscr{H}\in q_0(\Phi)}\log_2\dim\mathscr{H}$, где $q_0(\Phi)$ – множество всех подпространств в $\mathscr{H}_A$, на которых канал Φ обратим, называется *одношаговой* (*one-shot*) *квантовой пропускной способностью канала* Φ *при нулевой ошибке*. Эта величина характеризует предельную скорость безошибочной передачи квантовой информации при отсутствии блочного кодирования. Соответственно, (*асимптотическая*) *квантовая пропускная способностью канала* Φ *при нулевой ошибке* определяется с помощью регуляризации: $Q_0(\Phi)=\sup_n n^{-1}\overline{Q}_0(\Phi^{\otimes n})$ [1], [2].

Следствие 1 показывает, что для любого n существует такой канал Φ_n с $\mathscr{H}_A=\mathbb{C}^4$ и рангом Чоя 2, что

$$\overline{Q}_0(\Phi_n^{\otimes n})=0,\quad \text{но}\quad Q_0(\Phi_n)\geqslant\biggl(\biggl[\frac{\pi n}{2\ln(3/2)}\biggr]+1\biggr)^{-1}=\frac{2\ln(3/2)}{\pi n}+o\biggl(\frac{1}{n}\biggr),\quad n\to+\infty,$$

где $[x]$ – целая часть x.

Аналогичный результат для квантовой пропускной способности с ε-малой ошибкой был недавно получен в [9].

В силу утверждений A) и C) теоремы для каналов Φ_θ имеет место суперактивация одношаговой квантовой пропускной способности при нулевой ошибке.

Следствие 2. *Если* $\theta\neq 0,\pi$, *то для любых каналов* $\Phi_\theta\in\widehat{\mathfrak{L}}_\theta$ *и* $\Phi_{\pi-\theta}\in\widehat{\mathfrak{L}}_{\pi-\theta}$

$$\overline{Q}_0(\Phi_\theta)=\overline{Q}_0(\Phi_{\pi-\theta})=0,\quad \textit{но}\quad \overline{Q}_0(\Phi_\theta\otimes\Phi_{\pi-\theta})>0.$$

При любом $\theta\in(-\pi,\pi]$ *канал* $\Phi_\theta\otimes\Phi_{\pi-\theta}$ *обратим на подпространстве* $\mathscr{H}_2$.

В частности, канал $\Phi_{\pi/2}$ дает пример симметричной суперактивации одношаговой квантовой пропускной способности при нулевой ошибке с рангом Чоя 2. Ранее такой пример с рангом Чоя 3 и тем же входным пространством $\mathscr{H}_A=\mathbb{C}^4$ был построен в [8].

Доказательство теоремы и ее многомерное обобщение приведены в [10].

Список литературы

[1] R. A. C. Medeiros, F. M. de Assis, *Int. J. Quantum Inf.*, **3**:1 (2005), 135–139. [2] R. Duan, S. Severini, A. Winter, *IEEE Trans. Inform. Theory*, **59**:2 (2013), 1164–1174. [3] G. Smith, J. Yard, *Science*, **321**:5897 (2008), 1812–1815. [4] T. S. Cubitt, J. Chen, A. W. Harrow, *IEEE Trans. Inform. Theory*, **57**:12 (2011), 8114–8126. [5] R. Duan, *Super-activation of zero-error capacity of noisy quantum channels*, arXiv: 0906.2527. [6] А. С. Холево, *Квантовые системы, каналы, информация*, МЦНМО, М., 2010, 328 с. [7] Н. Ю. Решетихин, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Алгебра и анализ*, **1**:1 (1989), 178–206. [8] М. Е. Широков, Т. В. Шульман, *Пробл. передачи информ.*, **50**:3 (2014), 35–50. [9] T. Cubitt, D. Elkouss, W. Matthews, M. Ozols, D. Perez-Garcia, S. Strelchuk, *Unbounded number of channel uses are required to see quantum capacity*, arXiv: 1408.5115. [10] M. E. Shirokov, *On channels with positive quantum zero-error capacity having vanishing n-shot capacity*, arXiv: 1407.8524.

Максим Евгеньевич Широков
(Maxim E. Shirokov)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: msh@mi.ras.ru

Представлено А. В. Булинским
Принято редколлегией
05.12.2014