О супераддитивности выпуклого замыкания выходной энтропии квантового канала

М. Е. Широков

Одним из основных достижений квантовой теории информации (см. [1]) последних лет является доказательство эквивалентности различных гипотез (суб-, супер-) аддитивности для конечномерных квантовых каналов и систем [2] (см. обзор в [3]). Основной целью данной статьи является обобщение этого результата на бесконечномерный случай.

Пусть $\mathscr{H}$, $\mathscr{H}'$ – сепарабельные гильбертовы пространства. Квантовым каналом называется линейное вполне положительное сохраняющее след отображение $\Phi\colon \mathfrak{T}(\mathscr{H}) \mapsto \mathfrak{T}(\mathscr{H}')$, где $\mathfrak{T}(\mathscr{H})$ – идеал всех ядерных операторов в $\mathscr{H}$. В частности, Φ порождает аффинное отображение выпуклого множества $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$ состояний (операторов плотности) на пространстве $\mathscr{H}$ в множество $\mathfrak{S}(\mathscr{H}')$ состояний на пространстве $\mathscr{H}'$ [1].

Важными характеристиками квантового канала являются его выходная энтропия $H_\Phi(\rho) = H(\Phi(\rho))$ – вогнутая полунепрерывная снизу функция на пространстве состояний входной системы с множеством значений $[0,+\infty]$ – и ее выпуклое замыкание (см. [4]), которое будем обозначать $\widehat{H}_\Phi(\rho)$ и называть $\widehat{H}$-функцией канала Φ. В [5] показано, что выпуклое замыкание выходной энтропии произвольного квантового канала определяется выражением

$$\widehat{H}_\Phi(\rho) = \inf_\mu \int_{\mathfrak{S}(\mathscr{H})} H_\Phi(\sigma)\,\mu(d\sigma), \tag{1}$$

в котором точная нижняя грань берется по множеству всех вероятностных мер на $\mathfrak{S}(\mathscr{H})$ с барицентром ρ, и что эта нижняя грань всегда достигается на некоторой мере с носителем на множестве чистых состояний.

В [5] (предложение 7) получено достаточное условие непрерывности $\widehat{H}$-функции бесконечномерного канала Φ на подмножестве состояний, которое равносильно следующему утверждению:

$$\Bigl\{\lim_{n\to+\infty} H_\Phi(\rho_n) = H_\Phi(\rho_0) < +\infty\Bigr\} \ \Rightarrow\ \Bigl\{\lim_{n\to+\infty} \widehat{H}_\Phi(\rho_n) = \widehat{H}_\Phi(\rho_0)\Bigr\}. \tag{2}$$

Свойство *супераддитивности $\widehat{H}$-функции* для каналов Φ и Ψ состоит в выполнении неравенства

$$\widehat{H}_{\Phi\otimes\Psi}(\omega) \geqslant \widehat{H}_\Phi(\omega^{\mathscr{H}}) + \widehat{H}_\Psi(\omega^{\mathscr{K}}) \tag{3}$$

для всех $\omega \in \mathfrak{S}(\mathscr{H}\otimes\mathscr{K})$, где $\omega^{\mathscr{H}} = \mathrm{Tr}_{\mathscr{K}}\,\omega$ и $\omega^{\mathscr{K}} = \mathrm{Tr}_{\mathscr{H}}\,\omega$. Данное свойство гарантирует *аддитивность минимальной выходной энтропии* для каналов Φ и Ψ (см. [1], [3]). Если Φ и Ψ – частичные следы, то супераддитивность $\widehat{H}$-функции для этих каналов означает *супераддитивность* "*сцепленности формирования*" EoF (*Entanglement of Formation*) – важной характеристики состояния составной квантовой системы, являющейся мерой его сцепленности (см. [1], [5]).

Для конечномерных каналов Φ и Ψ супераддитивность $\widehat{H}$-функции равносильна *аддитивности χ-пропускной способности* этих каналов *с произвольными ограничениями* [6]. Одним из препятствий для доказательства аналогичного утверждения для бесконечномерных каналов является существование *суперсцепленных состояний* – чистых состояний составной системы, имеющих частичные следы с бесконечной энтропией (см. замечание 4 в [7]). Именно наличие таких состояний не позволяло до сих пор доказать супераддитивность $\widehat{H}$-функции (и даже аддитивность минимальной выходной энтропии) для некоторых классов бесконечномерных каналов, для которых аддитивность χ-пропускной способности с произвольными ограничениями выведена в [7] из соответствующих конечномерных утверждений [6], [8].

Работа выполнена при поддержке научной программы Отделения математических наук РАН "Современные проблемы теоретической математики" и РФФИ (проект № 06-01-00164-а).

Частично проблему суперсцепленных состояний удается преодолеть с помощью следующего утверждения, играющего ключевую роль в доказательстве всех приведенных ниже результатов, которое получено на основе свойства непрерывности (2) и некоторых других результатов из [5].

Лемма. *Пусть* $\Phi\colon \mathfrak{S}(\mathscr{H}) \mapsto \mathfrak{S}(\mathscr{H}')$ *и* $\Psi\colon \mathfrak{S}(\mathscr{K}) \mapsto \mathfrak{S}(\mathscr{K}')$ – *произвольные квантовые каналы. Неравенство* (3) *имеет место для всех состояний* ω *из* $\mathfrak{S}(\mathscr{H}\otimes\mathscr{K})$, *если для любого состояния конечного ранга* ω_0 *из* $\mathfrak{S}(\mathscr{H}\otimes\mathscr{K})$ *с конечной выходной энтропией* $H_{\Phi\otimes\Psi}(\omega_0)$ *существует последовательность* $\{\omega_n\}$ *состояний из* $\mathfrak{S}(\mathscr{H}\otimes\mathscr{K})$ *со свойствами*: (i) $\lim_{n\to+\infty}\omega_n=\omega_0$ *и* $\lim_{n\to+\infty}H_{\Phi\otimes\Psi}(\omega_n)=H_{\Phi\otimes\Psi}(\omega_0)$, (ii) *неравенство* (3) *имеет место при* $\omega=\omega_n$ *для всех* $n\in\mathbb{N}$.

С помощью данной леммы, предложения 7 и теоремы 2 из [7], а также теоремы 1 из [9], получаем бесконечномерный вариант результатов из [9], [6], [8].

Предложение. *Пусть* Ψ – *произвольный канал. Супераддитивность* $\widehat{H}$*-функции имеет место в следующих случаях*: (i) Φ – *тождественный канал*; (ii) Φ – *канал, разрушающий сцепленность* (*см.* [3]); (iii) Φ – *канал, комплементарный* (*см.* [9]) *каналу, разрушающему сцепленность*; (iv) Φ – *прямая сумма* (*см.* [6]) *тождественного канала и канала* Φ_0 *такого, что супераддитивность* $\widehat{H}$*-функции имеет место для каналов* Φ_0 *и* Ψ.

Приведенная выше лемма позволяет доказать следующее утверждение.

Теорема 1. *Если супераддитивность* $\widehat{H}$*-функции имеет место для всех конечномерных квантовых каналов, то это свойство имеет место и для всех бесконечномерных квантовых каналов.*

Следствие 1. *Если супераддитивность* EoF *имеет место для всех состояний конечномерной составной квантовой системы, то это свойство имеет место и для всех состояний бесконечномерной составной квантовой системы.*

Следствие 2. *Если аддитивность минимальной выходной энтропии имеет место для всех конечномерных квантовых каналов, то это свойство имеет место и для всех бесконечномерных квантовых каналов.*

Теорема 1 и теорема 3 из [7] позволяют получить бесконечномерный вариант теоремы Шора [2].

Теорема 2. *Следующие свойства равносильны*: (i) *аддитивность* χ*-пропускной способности для всех бесконечноменых каналов с произвольными ограничениями*; (ii) *аддитивность минимальной выходной энтропии для всех бесконечноменых каналов*; (iii) *супераддитивность* EoF *для всех состояний произвольной бесконечномерной составной квантовой системы.*

Последнее свойство в теореме 2 равносильно супераддитивности $\widehat{H}$-функции для всех бесконечномерных квантовых каналов.

Доказательства всех утверждений данной статьи приведены в [10].

Список литературы

[**1**] А. С. Холево, *Введение в квантовую теорию информации*, МЦНМО, М., 2002. [**2**] P. W. Shor, *Comm. Math. Phys.*, **246**:3 (2004), 453–472; corrections: ibid. 473. [**3**] А. С. Холево, *УМН*, **61**:2 (2006), 113–152. [**4**] А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров, *Теория экстремальных задач*, Наука, М., 1974. [**5**] M. E. Shirokov, `arXiv: quant-ph/0411091`. [**6**] A. S. Holevo, M. E. Shirokov, *Comm. Math. Phys.*, **249**:2 (2004), 417–430. [**7**] M. E. Shirokov, *Comm. Math. Phys.*, **262**:1 (2006), 137–159. [**8**] P. W. Shor, *J. Math. Phys.*, **43**:9 (2002), 4334–4340. [**9**] А. С. Холево, *Теория вероятн. и ее примен.*, **51**:1 (2006), 133–143. [**10**] M. E. Shirokov, `arXiv: quant-ph/0608090`.

М. Е. Широков (M. E. Shirokov)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: `msh@mi.ras.ru`

Представлено А. В. Булинским
Принято редколлегией
24.10.2006