2008 г. сентябрь — октябрь *т. 63, вып. 5 (383)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

О характеризации выпуклых μ-компактных множеств

М. Е. Широков

Изучению свойств компактных множеств в контексте выпуклого анализа посвящена обширная литература (см. [1] и библиографию в этой книге). Естественно возникают вопросы о возможности обобщения результатов о свойствах выпуклых компактов на некомпактные множества. Одно из таких обобщений рассмотрено в [2], где определен класс множеств, названных μ-компактными. В [2], [3] показано, что на этот класс множеств, включающий в себя как все выпуклые компакты, так и некоторые важные для приложений некомпактные множества, распространяются многие результаты теории Шоке [1] и теории Вестерстрёма–О'Брайена [4], [5]. В настоящей работе дана характеризация выпуклого μ-компактного множества в терминах свойств функций, определенных на этом множестве.

Везде далее $\mathscr{A}$ – ограниченное метризуемое выпуклое подмножество локально выпуклого топологического пространства, являющееся полным сепарабельным метрическим пространством. Пусть $C(\mathscr{A})$ – множество непрерывных ограниченных функций на множестве $\mathscr{A}$, а $M(\mathscr{A})$ – множество всех борелевских вероятностных мер на множестве $\mathscr{A}$, снабженное топологией слабой сходимости [6]. Будем обозначать $\overline{\mathrm{co}}\, f$ выпуклое замыкание функции f [7] (нижнюю обертывающую в терминах [1]).

Каждой мере $\mu \in M(\mathscr{A})$ можно сопоставить ее барицентр $\mathbf{b}(\mu)$, определяемый интегралом Петтиса (см. [6]):

$$\mathbf{b}(\mu) = \int_{\mathscr{A}} x\,\mu(dx) \in \mathscr{A}. \tag{1}$$

Определение. Множество $\mathscr{A}$ называется *μ-компактным*, если прообраз любого компактного подмножества множества $\mathscr{A}$ при барицентрическом отображении (1) является компактным подмножеством множества $M(\mathscr{A})$.

Любое компактное множество является μ-компактным. Действительно, из компактности $\mathscr{A}$ следует компактность $M(\mathscr{A})$ [6]. В [2], [3] доказана μ-компактность следующих некомпактных выпуклых замкнутых множеств:

– ограниченные части положительных конусов в банаховом пространстве l_1 и в банаховом пространстве $\mathfrak{T}(\mathscr{H})$ ядерных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$;
– ограниченное по вариации множество борелевских мер на *любом* полном сепарабельном метрическом пространстве, снабженное топологией слабой сходимости;

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 06-01-00164-а и 07-01-00156).

– ограниченное по норме множество положительных линейных операторов в банаховых пространствах l_1 и $\mathfrak{T}(\mathscr{H})$, снабженное сильной операторной топологией.

В частности, μ-компактами являются множество вероятностных мер на любом полном сепарабельном метрическом пространстве, снабженное топологией слабой сходимости, множество квантовых состояний и множество квантовых операций, снабженное сильной операторной топологией [8].

Отметим, что свойство μ-компактности выпуклого множества не является чисто топологическим, но отражает определенное соотношение между топологией и выпуклой структурой этого множества [3].

Как оказалось, класс выпуклых μ-компактов может быть охарактеризован как класс множеств, для которых операция выпуклого замыкания функции обладает определенным свойством непрерывности по отношению к поточечно сходящимся монотонным последовательностям функций.

Теорема. *Следующие свойства равносильны*:

(i) *множество* $\mathscr{A}$ *является* μ-*компактным*;

(ii) *для любой возрастающей последовательности* $\{f_n\}$ *функций из* $C(\mathscr{A})$, *поточечно сходящейся к функции* f_0 *из* $C(\mathscr{A})$, *последовательность* $\{\overline{\mathrm{co}}\, f_n\}$ *поточечно сходится к функции* $\overline{\mathrm{co}}\, f_0$;

(iii) *для любой возрастающей последовательности* $\{f_n\}$ *полунепрерывных снизу ограниченных снизу функций на* $\mathscr{A}$, *поточечно сходящейся к функции* f_0, *последовательность* $\{\overline{\mathrm{co}}\, f_n\}$ *поточечно сходится к функции* $\overline{\mathrm{co}}\, f_0$.

Если эти свойства выполнены, то для любой убывающей последовательности $\{f_n\}$ *полунепрерывных снизу ограниченных функций на* $\mathscr{A}$, *поточечно сходящейся к полунепрерывной снизу ограниченной функции* f_0, *последовательность* $\{\overline{\mathrm{co}}\, f_n\}$ *поточечно сходится к функции* $\overline{\mathrm{co}}\, f_0$.

Доказательство этой теоремы приведено в [9], некоторые ее применения в квантовой теории информации рассмотрены в [10].

Список литературы

[**1**] E. M. Alfsen, *Compact convex sets and boundary integrals*, Ergeb. Math. Grenzgeb., **57**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1971. [**2**] М. Е. Широков, *Матем. заметки*, **82**:3 (2007), 441–458; англ. пер.: M. E. Shirokov, *Math. Notes*, **82**:3–4 (2007), 395–409. [**3**] В. Ю. Протасов, М. Е. Широков, "Обобщенная компактность в линейных пространствах и ее приложения", *Матем. сб.* (в печати). [**4**] J. Vesterstrøm, *J. London Math. Soc.* (2), **6** (1973), 289–297. [**5**] R. O'Brien, *Math. Ann.*, **223**:3 (1976), 207–212. [**6**] П. Биллингсли, *Сходимость вероятностных мер*, Наука, М., 1977; пер. с англ.: P. Billingsley, *Convergence of probability measures*, Wiley, New York–London–Sydney–Toronto, 1968. [**7**] А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров, *Теория экстремальных задач*, Нелинейный анализ и его приложения, Наука, М., 1974. [**8**] А. С. Холево, *Статистическая структура квантовой теории*, М.–Ижевск, 2003; пер. с англ.: A. S. Holevo, *Statistical structure of quantum theory*, Lect. Notes Phys. Monogr., **67**, Springer-Verlag, Berlin, 2001. [**9**] М. Е. Широков, *Современные проблемы фундаментальной и прикладной математики*: *Сборник научных трудов МФТИ*, М., 2008, 193–203. [**10**] M. E. Shirokov, `arXiv: 0804-1515`, 2008.

М. Е. Широков (M. E. Shirokov)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: `msh@mi.ras.ru`

Представлено В. М. Тихомировым
Принято редколлегией
10.07.2008