От автора

Работа, результаты которой отражены в книге, носит поисковый характер. Начало работы можно отнести к 1983 году. Рассматривая некоторый вопрос теории симметрических гиперболических по Фридрихсу систем уравнений первого порядка, я придумал новое умножение неоднородных дифференциальных форм, которое задает на множестве дифференциальных форм структуру алгебры Клиффорда. Позже узнал, что эта конструкция была предложена Е. Кэлером (1962) и переоткрыта М. Атьи (1970). В литературе она называется алгеброй Атьи–Кэлера.

Важный рубеж в работе и жизни составила командировка в Индию (Indian Institute of Science, 1992-1994), где я начал систематические исследования, направленные на применение алгебры Клиффорда и алгебры Атьи–Кэлера к уравнению Дирака. В литературе удалось найти три уравнения, аналогичные (или эквивалентные) уравнению Дирака и использующие алгебру Клиффорда или алгебру Атьи–Кэлера. Вместе со стандартным уравнением Дирака получился следующий список из четырех уравнений:

- стандартное уравнение Дирака (1928), в нем используются матрицы и спиноры;
- уравнение Дирака–Рисса (1947), в нем используются элементы алгебры Клиффорда и левые идеалы;
- уравнение Дирака–Хестенеса (1967), в нем используются четные элементы алгебры Клиффорда;
- уравнение Иваненко–Ландау–Кэлера (1928, 1962), в нем используются неоднородные дифференциальные формы.

Первые три уравнения из этого списка эквивалентны друг другу, тогда как уравнение Иваненко–Ландау–Кэлера не эквивалентно трем указанным уравнениям т.к., во-первых, волновая функция в нем имеет 16 комплексных компонент (по сравнению с 4 в уравнении Дирака) и, во-вторых, волновая функция представляется неоднородной дифференциальной формой (т.е. описывается тензорными величинами), тогда как волновая функция уравнения Дирака является спинором.

Цель работы состояла в том, чтобы на основе анализа общего и различий уравнения Иваненко–Ландау–Кэлера по сравнению с первыми тремя уравнениями, попытаться найти такие модификации ILK–уравнения, которые естественным образом соотносятся с уравнением Дирака.

То обстоятельство, что базой исследования было не одно, а четыре уравнения, позволило существенно расширить круг идей и методов, с помощью которых велась работа.

Введя в рассмотрение локальную тетраду на псевдоримановом многообразии (т.е. фактически перейдя к многообразиям Римана–Картана) и "поколдовав" с оператором $d - \delta$, удалось получить модификации уравнения ILK в которых волновая функция принадлежит левому идеалу алгебры Атьи–Кэлера и имеет либо 4, либо 8, либо 12, либо 16 комплексных компонент. Показано, что соответствующие уравнения имеют либо $\mathrm{U}(1)$, либо $\mathrm{U}(2)$, либо $\mathrm{U}(3)$, либо $\mathrm{U}(4)$ унитарную калибровочную симметрию. Таким образом, вопрос об уменьшении числа компонент волновой функции в ILK–уравнении был решен.

Второй вопрос – почему волновая функция в ILK–уравнении описывается тензорными (а не спинорными) величинами, был решен в 2000 году. Удалось построить специальные варианты модифицированных уравнений ILK (в книге они называются *модельными уравнениями Дирака*) обладающие дополнительной симметрией по отношению к псевдоунитарной группе $\mathrm{SU}(2,2)$ (эта группа среди своих подгрупп содержит симплектическую и спинорную группы). Псевдоунитарная симметрия является внутренней симметрией модельных уравнений и никак не связана с заменами координат (пространства Минковского, либо псевдориманова многообразия). Тензоры и спиноры являются разными алгебро-геометрическими объектами, которые, вообще говоря, не сводятся друг к другу. Это ясно видно в пространстве Минковского, где тензоры и спиноры реализуют разные (тензорные и спинорные) представления группы Лоренца. Но если рассматривать не просто тензоры, а тензорные решения модельного уравнения Дирака с псевдоунитарной симметрией, то ситуация изменится. Из любого тензорного решения модельного уравнения Дирака можно получить спинорное решение с помощью процедуры спиноризации, состоящей в следующем: каждую лоренцеву замену координат пространства Минковского надо сопроводить соответствующим (синхронизованным) преобразованием из спинорной подгруппы псевдоунитарной группы симметрии.

Таким образом приходим к модельному уравнению Дирака (а также к модельным системам уравнений Дирака–Максвелла и Дирака–Янга–Миллса), которые можно рассматривать как обобщения соответствующих стандартных (спинорных) уравнений теории поля. Логично предположить, что из модельных уравнений могут быть выведены все следствия, которые могут быть выведены из стандартных уравнений поля (Дирака, Дирака–Максвелла, Дирака–Янга–Миллса). Вместе с тем, как мы увидим, из модельных уравнений выводятся такие математические следствия, которые принципиально не могут быть выведены из стандартного уравнения Дирака. В этой связи встает интригующий вопрос: можно ли из новых математических следствий модельных уравнений получить новые физические следствия? Ответ на этот вопрос мне пока не известен.

Несмотря на тот длинный путь, который привел к модельным уравнениям теории поля, конечные уравнения получились достаточно простыми. Они допускают формулировку не только в технике дифференциальных форм и алгебры Атьи–Кэлера, но и в более простой и привычной технике матриц (см. главу 1), либо в технике алгебры Клиффорда.

Если попытаться позиционировать модельные уравнения по отношению к четырем уравнениям в вышеприведенном списке, то они будут занимать место между тремя первыми уравнениями (уравнения Дирака, Дирака–Рисса, Дирака–Хестенеса) и уравнением Иваненко–Ландау–Кэлера.

Планирую продолжать работу по развитию излагаемого в книге подхода к уравнениям теории поля. Еще многое предстоит сделать. Надеюсь, что выход книги позволит бо́льшему числу специалистов познакомиться с новыми результатами в теории поля и принять участие в развитии этого направления, либо использовать изложенные идеи и методы для решения своих задач.

Я признателен Д. С. Широкову, который активно участвовал в обсуждениях и в разработке ряда вопросов связанных с используемой техникой алгебр Клиффорда.

Я благодарен И. Я. Арефьевой, Д. Г. Васильеву, В. С. Владимирову, И. В. Воловичу, В. Г. Кадышевскому, М. О. Катанаеву и В. П. Маслову, проявившим интерес к работе. Их поддержка и доброжелательные конструктивные обсуждения результатов стимулируют дальнейшие исследования.

Еще хочу выразить благодарность своему учителю С. К. Годунову, под руководством которого я сделал первые шаги в исследовательской работе. Он научил меня вырабатывать собственную точку зрения на

предмет исследования и следовать ей несмотря на то, что моя точка зрения может отличается от общепринятой.

Буду рад получить от читателей замечания, отзывы, комментарии, а также указания на обнаруженные опечатки, неточности, ошибки.

Почтовый адрес:
Москва 119991, ул. Губкина д.8,
Математический институт им. В.А.Стеклова РАН,
Отдел математической физики.

e-mail: nmarchuk2005@yandex.ru

Николай Марчук, 6 ноября 2006