противоречит (2) и завершает доказательство необходимости, а вместе с ней и доказательство теоремы 2.

В заключение автор приносит благодарность О. В. Бесову за постановку задачи и внимание к работе, а также В. М. Тихомирову за интерес, проявленный к настоящей работе, и полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Михайлов В. П. О поведении на бесконечности одного класса многочленов. — Докл. АН СССР, 1965, **164**, № 3, 449—502.
2. Казарян Г. Г. Оценки дифференциальных операторов и гипоэллиптические операторы. — Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1976, **140**, 130—168.
3. Галеев Э. М. Приближение суммами Фурье классов функций с несколькими ограниченными производными. — Матем. заметки, 1978, **23**, № 2, 197—212.
4. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М., 1975.

Поступила в редакцию
22.01.82

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА, 1984, № 3

УДК 513.015.7

С. Л. Трегуб

ТРИ КОНСТРУКЦИИ РАЦИОНАЛЬНОСТИ ЧЕТЫРЕХМЕРНОЙ КУБИКИ

1. Задача о рациональности четырехмерной кубической гиперповерхности является одной из ярких классических задач. В 1940 г. У. Морин [1] опубликовал доказательство рациональности общей четырехмерной кубики, «показав», что на ней существует одномерное семейство рациональных поверхностей степени 4. Однако это находилось в несоответствии с известным предположением (недавно доказано Ю. Г. Зархиным) о том, что группа классов алгебраических 2-циклов относительно численной эквивалентности на общей кубике порождается пересечениями дивизоров. Более того, А. С. Тихомиров непосредственно установил, что доказательство Морина ошибочно, показав, что если на гладкой кубической гиперповерхности в $\mathbf{P}^5$ лежит требуемая поверхность, то она варьируется не в одномерном, а в двумерном семействе. Таким образом, вопрос о рациональности общей кубики в $\mathbf{P}^5$ остается открытым. В. А. Исковских высказал предположение, что на всякой рациональной гладкой кубике $\mathbf{P}^5$ ранг группы классов алгебраических 2-циклов больше единицы и, следовательно, общая кубика не рациональна.

В настоящей работе рассмотрены три известные автору конструкции бирациональных изоморфизмов некоторых гладких кубик с $\mathbf{P}^4$ и конкретно описаны соответствующие бирациональные перестройки. Во всех этих конструкциях, очевидно, ранг группы классов 2-циклов не меньше двух. На протяжении всей работы основное поле алгебраически замкнуто и имеет характеристику нуль.

2. В дальнейшем мы будем пользоваться информацией, собранной в следующей лемме.

Лемма 1. *Пусть V — гладкая кубическая гиперповерхность в $\mathbf{P}^5$, H — класс гиперплоского сечения V; $F \overset{g}{\hookrightarrow} V$ — гладкая поверхность на V и N — нормальный пучок к F; $\sigma: V_1 \to V$ — моноидальное преобразование с центром F и* $B=\sigma^{-1}(F) \overset{g'}{\hookrightarrow} V_1$ *и пусть, как обычно, $c_i(\cdot)$ обозначают классы Чженя соответствующего объекта. Справедливы следующие утверждения:*

1) $c_1(V_1) = 3H - B,\ c_2(V_1) = 6H^2 - B^2 - g'_* g^*(c_1(F))$;

2) $B^4 = -c_1^2(N) + c_2(N);\ (B^3 \cdot D)_{V_1} = -(c_1(N) \cdot D)_F,\ (B^2 \cdot D^2)_{V_1} = -(D^2 \cdot F)_V$;

здесь $D \in \operatorname{Pic} V$;

3) *если F — поверхность Дель Пеццо степени 5 в $\mathbf{P}^5$, то*

$$c_1(F) = H, \quad c_2(F) = 7,$$
$$c_1(N) = 2H, \quad c_2(N) = 13,$$
$$B^4 = -7,\ B^3 \cdot H = -10,\ B^2 \cdot H^2 = -5;$$

4) *если F есть поверхность $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$, вложенная в $\mathbf{P}^5$ рядом* $|2s+f|$, то

$$c_1(F) = 2s + 2f, \quad c_2(F) = 4,$$
$$c_1(F) = 4s + f, \quad c_2(N) = 10,$$
$$B^4 = 2,\ B^3H = -6,\ B^2H^2 = -4.$$

Доказательство. Утверждение 1 следует из общей формулы для классов Чженя моноидального преобразования [2]. Утверждение 2 вытекает из равенства $l^2 - c_1(\mathscr{E})\, l + c_2(\mathscr{E}) = 0$ для классов Чженя локально-свободного пучка ранга 2, где l — класс дивизоров, соответствующий расслоению $\mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathscr{E})}(1)$. Классы Чженя нормального пучка к F вычисляются из стандартной точной последовательности $0 \to T_F \to T_{V|F} \to N \to 0$.

Рассмотрим сначала классический случай [3], когда кубика V содержит пару непересекающихся плоскостей P_1 и P_2. Прежде чем воспроизвести известную конструкцию рациональности кубики в этом случае, введем следующие обозначения: H_0 — достаточно общая (условия на H_0 следуют из дальнейшего) гиперплоскость в $\mathbf{P}^5$; $L_i = H_0 \cap \mathbf{P}_i$ — прямая в $\mathbf{P}^5$; R — трехмерное подпространство $\mathbf{P}^5$, содержащее L_1 и L_2; S_1 — гиперплоскость, содержащая L_i и P_j $(i \neq j)$; $F = R \cap V$ — гладкая кубическая поверхность в R; $\sigma: V_1 \to V$ — последовательное раздутие P_1, P_2 и F; $\pi: \bar{P} \to \mathbf{P}^5$ — раздутие P_1 и P_2; $\bar{V}$ — собственный прообраз V относительно π.

Конструкция 1. Через каждую точку $x \in \mathbf{P}^5 \setminus (P_1 \cup P_2)$ проходит единственная прямая l_x, пересекающая P_1 и P_2; так что определены два рациональных отображения:

$$\varphi_1 : x \in \mathbf{P}^5 \to (l_x \cap P_1,\ l_x \cap P_2) \in P_1 \times P_2 \quad \text{и} \quad \varphi_2 : x \to l_x \cap H_0 \in \mathbf{P}^4.$$

Собственные прообразы прямых l_x на $\bar{P}$ не пересекаются, поэтому $\varphi_1 \circ \pi : \bar{P} \to P_1 \times P_2$ — регулярное отображение, сужение которого на $\bar{V}$ — $\bar{\varphi}$ будет бирациональным морфизмом. Линейный ряд $|H_1 + H_2 - L_1 \times L_2|$ на $P_1 \times P_2$, где $H_i \in |p_i^* \mathcal{O}_{P_i}(1)|$ и $p_i : P_1 \times P_2 \to P_i$, задает бирациональный изоморфизм $f : P_1 \times P_2 \to \mathbf{P}^4$ и $\varphi = f \circ \varphi_1$.

Предложение 1 (а). *Отображение φ стягивает гладкий неприводимый дивизор $D \in |3H - 2\pi^{-1}(P_1) - 2\pi^{-1}(P_2)|$ на поверхность $F' \subset P_1 \times P_2$. Поверхность F' является поверхностью типа* К3, *и $p_i : F' \to P_i$ — накрытие степени 2 в общей точке с ветвлением в секстике.* (б). *Отображение $\varphi : V \to \mathbf{P}^4$ осуществляется линейным рядом $|2H - P_1 - P_2 - F|$; $\varphi \circ \sigma : V_1 \to \mathbf{P}^4$ — морфизм, и этот морфизм стягивает три дивизора: 1, 2 — собственный прообраз дивизора $S_i \cap V$ стягивается на прямую $l_i \subset \mathbf{P}^4$; 3 — собственный прообраз D стягивается на поверхность $G = f(F')$ степени 9 в $\mathbf{P}^4$; неопределенность f на F' разрешается* *раздутием пяти точек; вне кривой* $(f^{-1}(l_1))\cup(f^{-1}(l_2))\cap F'$ *отображение* $f|_{F'}$ — *изоморфизм.*

Доказательство. Исключительный дивизор D морфизма $\bar\varphi$ заметается собственными прообразами прямых l_x, которые целиком лежат на V. Записав уравнения V в виде

$$\Sigma u_i Q_i+\Sigma v_i R_i=0,$$

где Q_i, R_i — формы степени 2 соответственно от переменных $\{v_i\}_1^3$, $\{u_i\}_1^3$, убеждаемся, что $(x, y)\in\bar\varphi(D)$ удовлетворяет уравнениям

$$\Sigma x_i Q_i(y)=0,\quad \Sigma y_i R_i(x)=0.$$

Поскольку слои отображения $\bar\varphi:\bar V\to P_1\times P_2$ не более чем одномерны, $\bar\varphi$ раскладывается в композицию раздутий гладких поверхностей [4]. Сравнивая группы Пикара $\bar V$ и $P_1\times P_2$, получаем, что D и $\bar\varphi(D)$ неприводимы и гладки. Канонический класс F' можно вычислить по формуле присоединения, и он оказывается нулевым; $h^1(\mathcal{O}_{F'})=0$ по теореме Лефшеца. Из теоремы Римана—Роха получаем:

$$\chi(\mathcal{O}(3H-2\Sigma\pi^{-1}(P_i)))=1.$$

По теореме Кодаиры об обращении в нуль и в силу двойственности Серра

$$h^i(\mathcal{O}(3H-2\Sigma\pi^{-1}(P_i)))=0,$$

поэтому

$$\dim|3H-2P_1-2P_2|=0.$$

В то же время $|2H-2P_1-2P_2|=\varnothing$ и, следовательно, $D\in|3H-2P_1-2P_2|$. Неопределенность отображения f разрешается раздутием $L_1\times L_2$. Поскольку прообраз пучка идеалов $L_1\times L_2$ относительно $\bar\varphi$ будет пучком идеалов для $F=R\cap V$, то $\varphi\circ\sigma$ — морфизм. Так как $F'\cdot(L_1\times L_2)=5$, то $f|_{F'}$ имеет пять точек неопределенности, и степень $f(F')=G$ равна

$$(H_1+H_2)^2(2H_1+H_2)(2H_2+H_1)-5=9.$$

Вне дивизоров $L_i\times P_j$ отображение f — изоморфизм, так что $f|_{F'}$ — изоморфизм вне кривой $(f^{-1}(l_1)\cup f^{-1}(l_2))\cap F'$. Предложение 1 доказано.

3. Второй пример гладких четырехмерных рациональных кубик дает следующая конструкция, сообщенная автору Д. Логачевым.

Конструкция 2. Пусть L — линейное пространство, $\dim L=6$; L_1 — подпространство в L коразмерности 1; M — гиперповерхность степени 3 в $\mathbf{P}^{14}=P(\lambda^2 L^*)$, которая состоит из вырожденных матриц (элементы $\lambda^2 L^*$ рассматриваются как линейные отображения из L в L^*). Определено рациональное отображение $\varphi': x\in M\to\ker x\cap L_1\in\mathbf{P}(L_1)$, осуществляемое подсистемой линейной системы $|2H|$, где — H — класс гиперплоского сечения M. Множество точек неопределенности φ' — многообразие M' — состоит из двух компонент: $M_1=\{x\in M:\ker x\subset L_1\}$ и $M_2=\{x\in M:\dim\ker x=4\}$. Многообразие M_1 имеет размерность 11 и степень 5 и есть просто конус над $\mathrm{Gr}(2,5)\subset\mathbf{P}(\lambda^2 L_1^*)\subset\mathbf{P}(\lambda^2 L^*)$; $\mathrm{Gr}(2,5)=\{x: x\in\mathbf{P}(\lambda^2 L_1^*),\ \dim\ker x=3\}$. Сечение M подпространством S размерности 5 задает четырехмерную кубику V и бирациональный изоморфизм $\varphi: V\to\mathbf{P}^4$. Если S достаточно общее, то $M_2\cap V=\varnothing$ и линейная проекция из вершины конуса M_1 осуществляет изоморфизм $M_1\cap V$ на сечение $\mathrm{Gr}(2,5)\subset\mathbf{P}^5$ подпространством размерности 5, то есть на поверхность Дель Пеццо степени 5 с антиканоническим вложением в $\mathbf{P}^5$.

Предложение 2. *Пусть V — гладкая четырехмерная кубика в $\mathbf{P}^5$; $F\subset V$ — поверхность Дель Пеццо степени 5; $\sigma: V_1\to V$ — моноидальное преобразование с центром в F; $B=\sigma^{-1}(F)$; H — гиперплоское сечение V. Тогда*

1) *линейная система $|2H-F|$ осуществляет бирациональный изоморфизм $\varphi: V\to\mathbf{P}^4$;*

2) *система $|2H-B|$ на V_1 не имеет базисных точек и неподвижных компонент;*

3) *система $|7H-4B|$ содержит единственный неприводимый гладкий дивизор D; морфизм $\varphi_1=\varphi\circ\sigma$ вне D есть изоморфизм, он стягивает D на поверхность G степени 9 в $\mathbf{P}^4$. G изоморфна поверхности К3 (точнее, сечению $\mathrm{Gr}(2,6)$) с пятью раздутыми точками;*

4) *обратное отображение осуществляется системой $|4H'-G|$; H' — гиперплоскость в $\mathbf{P}^4$.*

Доказательство. Покажем, что $\dim|2H-F|=4$. Из проективной нормальности F следует точность последовательности

$$0\to H^0(\mathcal{O}(2)\otimes I_F)\to H^0(\mathcal{O}(2))\to H^0(\mathcal{O}_F(2))\to 0,$$

из которой получаем требуемое равенство. Градуированный идеал F порождается элементами степени 2, поэтому линейная система $|2H-B|$ не имеет базисных точек и неподвижных компонент. Степень морфизма φ_1 равна $(2H-B)^4$. Используя лемму 1, находим, что $(2H-B)^4=1$. Таким образом, φ_1 — изоморфизм в общей точке.

Пусть исключительный дивизор D равен $xH-yB$ в $\mathrm{Pic}\,V_1$. Тогда $(xH-yB)(2H-B)^3=0$, или $4x-7y=0$. Используя теорему Римана — Роха, двойственность Серра и теорему Кодаиры об обращении в нуль [5], получаем $h^0(\mathcal{O}(7H-4B))=1$ (нужные для применения теоремы Римана — Роха классы Чженя многообразия V_1 выписаны в лемме 1). Дивизор $D_1\in|7H-4B|$ неприводим, ибо каждая его компонента принадлежит системе $|7nH-4nB|$ для какого-то $n>0$. Неравенство

$$D_1(7nH-4nB)(2H-B)^2=-9n<0$$

показывает, что D_1 — неподвижная компонента $|7nH-4nB|$ для любого $n>0$, то есть $h^0(\mathcal{O}(7nH-4nB))=1$ для $n>0$, и единственным дивизором в системе $|7nH-4nB|$ является nD_1. Из сказанного выше следует, что $D=D_1$ и D неприводим. Дивизор D гладок. Гладкость D будет следовать из основного результата работы [4], если мы убедимся, что слои не более чем одномерны. Система $|2H-F|$ определяет отображение $\varphi':\mathbf{P}^5\to\mathbf{P}^4$. Слоями φ' будут: а) плоскости лежащих на F коник, б) хорды F, не лежащие на слоях а). Если теперь V не содержит плоскость, то слои φ_1 не более чем одномерны.

Перейдем к поверхности G. Вычислим $\deg\varphi_1(B)$ и $\deg G$:

$$\deg\varphi_1(B)=B(2H-B)^3=7,\quad \deg G=-(2H-B)^2(7H-4B)^2=9.$$

Пусть обратное отображение осуществляется системой $|kH-zG|$; тогда $2k-7z=1$ ($\varphi^{-1}\circ\varphi: V\to V$ осуществляется линейным рядом $|H|$) и $2k-7=1$ ($\varphi\circ\varphi^{-1}:\mathbf{P}^4\to\mathbf{P}^4$ осуществляется линейным рядом $|H'|$); отсюда $k=4$ и $z=1$.

Сечение D общим дивизором H дает неособую поверхность G' и морфизм $\varphi'_1: G'\to G$; φ'_1 состоит в стягивании 25 кривых Z_i — прообразов хорд кривой $F\cap H$, лежащих в V. Используя формулу присоединения и эти замечания, вычисляем

$$\deg K_G=H(7H-4B)(5H-3B)(2H-B)=5,$$

$$K^2_{G'}=H(7H-4B)(5H-3B)^2=-30,\quad K^2_G=K^2_{G'}+25=-5.$$

Рассмотрим теперь гладкую кубику $M\subset P^4$. Пусть G — гладкая кривая рода 1 и степени 5 на M; $\sigma_1: M_1\to M$ — раздутие C; $E=\sigma^{-1}(C)$; L —

гиперплоское сечение M. Как известно [6], линейный ряд $|7L-4E|$ определяет бирациональное отображение f (не определенное на прообразах хорд C) из M_1 на сечение $\mathrm{Gr}(2, 6)$; ограничение f на $S\in\in|7L-4E|$ дает бирациональный морфизм S на двумерное сечение $\mathrm{Gr}(2, 6)$. Отождествим M с H — гиперплоским сечением V — и докажем, что $f(G')$ неособо. Пусть $R\in|5L-3E|$ и C^0 — слой отображения $R\to\mathrm{Gr}(2, 6)$. Тогда $C^0\cdot(2L-E)=1$, поскольку $C^0\cdot(7L-4E)=0$ и $C^0\cdot R=-1$ (см. [6]). Таким образом,

$$\varphi_1'(R\cap G')=\Sigma\, m_i l_i,$$

где l_i — прямые в $\mathbf{P}^4$. По формуле присоединения находим, что $K_{G'}=(R\cdot G')_{M_1}$ и $K_G=\Sigma\, m_i l_i$. Отсюда имеем равенства

$$K_G^2=\Sigma\, m_i^2 l_i^2+\sum_{i\neq j} m_i m_j l_i l_j=-5, \tag{1}$$

$$-2m_i=m_i(2\rho_{l_i}-2)=m_i(m_i+1)\, l_i^2+\sum_j m_i m_j l_i l_j, \tag{2}$$

$$\deg K_G=\Sigma\, m_i=5.$$

Складывая все (2) и вычитая (1), получаем $\Sigma m_i l_i^2=-5$, и поскольку из (2) следует, что $l_i^2<0$, то $l_i^2=-1$. Из равенства

$$\Sigma\,(m_i+1)\, l_i^2+\Sigma\,(m_i+m_j)\, l_j l_i=-10$$

выводим, что

$$\Sigma\,(m_i+m_j)\, l_j l_i=0,$$

то есть $l_i l_j=0$ для любых i, j.

Мы получили, что K_G есть сумма пяти непересекающихся исключительных кривых первого рода. Отображение f стягивает 25 кривых Z_i и кривые $(\varphi'_1)^{-1}(l_i)$. Таким образом, поверхность $f(G')$ гладкая и существует бирациональный морфизм $G\to f(G')$, стягивающий пять исключительных кривых в неособые точки. Предложение 2 доказано.

4. Третий пример рациональных кубик в $\mathbf{P}^5$ принадлежит У. Морину [1].

К о н с т р у к ц и я 3. Пусть кубика V содержит поверхность F — образ $\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1$ при вложении в $\mathbf{P}^5$ рядом $|2s+f|$; s и f здесь стандартные образующие $\mathrm{Pic}(\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1)$. Поверхность F содержится в многообразии $\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^2$, вложенном в $\mathbf{P}^5$ по Сегре. Через любую точку $x\in\mathbf{P}^5\setminus\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^2$ проходит единственная прямая l_x, пересекающая F в двух точках, — хорда F. Таким образом, определен следующий бирациональный изоморфизм $x\in V\to l_x\cap H\in\mathbf{P}^4$, где H — фиксированная гиперплоскость в $\mathbf{P}^5$.

Мы рассмотрим здесь слегка измененное отображение $\bar\varphi: V\to\mathbf{P}^4$.

П р е д л о ж е н и е 3. *Пусть V — гладкая кубика в $\mathbf{P}^5$ и F — поверхность на ней указанного выше вида; $\sigma: V_1\to V$ — раздутие F; $B=\sigma^{-1}(F)$ и* H *— класс гиперплоского сечения V. Тогда*

1) *линейная система $|2H-F|$ осуществляет бирациональный изоморфизм φ кубики V с неособой квадрикой $K\subset\mathbf{P}^5$;*
2) *система $|2H-B|$ свободна от базисных точек и неподвижных компонент;*
3) $\dim|5H-3B|=0$; *единственный дивизор $D\in|5H-3B|$ гладок и неприводим; морфизм $\varphi_1=\varphi\circ\sigma$ вне D есть изоморфизм, и он стягивает D на поверхность G степени 10; G изоморфна поверхности* К3 *с одной раздутой точкой;*
4) *обратное отображение задается системой $|3H'-G|$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поверхность F проективно-нормальна, поэтому из точной последовательности

$$0\to H^0(\mathcal{O}(2H)\otimes I_F)\to H^0(\mathcal{O}(2H))\to H^0(\mathcal{O}_F(2H))\to 0$$

получаем $\dim|2H-F|=5$. Градуированный идеал F порождается элементами степени 2, откуда выводим, что линейная система $|2H-B|$ не имеет базисных точек и неподвижных компонент.

Используя лемму 1, вычисляем степень $\varphi_1(V_1)$: $\deg\varphi_1(V_1)=2$. Квадрика K гладкая. Действительно, достаточно указать четырехмерное семейство особых гиперплоских сечений K, то есть гиперплоских сечений, касающихся K. Каждая хорда l поверхности F определяет проекцию π_l на $\mathbf{P}^3\subset\mathbf{P}^5$; гиперповерхность $S_l=\pi_l^{-1}(\pi_l(F))$ имеет степень 2 и особа вдоль l. Для общей l многообразие $S_l\cap V$ имеет особую точку $p_l=l_x\cap(V\setminus F)$. Для общей точки $x\in V$ существует единственная l, такая, что $p_l=x$; таким образом, квадрики S_l образуют четырехмерное подмногообразие в пространстве всех квадрик в $\mathbf{P}^5$.

Пусть исключительный дивизор D равен $xH-yB$ в $\mathrm{Pic}\, V_1$, тогда

$$(xH-yB)\,(2H-B)^3=0,\ \text{ или }\ 3x-5y=0.$$

Из теоремы Римана — Роха, двойственности Серра и теоремы Кодаиры об обращении в нуль получаем $h^0(\mathcal{O}(5H-3B))=1$. Дивизор $D_1\in\in|5H-3B|$ неприводим. Так как $D_1(5nH-3nB)\,(2H-B)^2=-10n<0$, то D_1 — неподвижная компонента во всех системах $|5nH-3nB|$. Как и в пункте 3, отсюда выводим, что D_1 неприводим и $D=D_1$. Доказательство гладкости D аналогично доказательству, проведенному в пункте 3. Надо лишь заметить, что здесь слоями φ': $\mathbf{P}^5\to K$ будут либо хорды F, либо плоскости коник, лежащих на F.

Вычислим степени образов B и D:

$$\deg\varphi_1(B)=(2H-B)^3 B=10,$$
$$\deg\varphi_1(D)=-(2H-B)^2(5H-3B)^2=10.$$

Если отображение $\varphi^{-1}: K\to V\hookrightarrow P^5$ осуществляется линейной системой вида $|mH'-nG|$, то $2n-5=1$ и $2n-5m=1$, то есть $n=3$ и $m=1$.

Далее вычислим некоторые характеристики поверхности G. Обозначим через π: $K_1\to K$ раздутие G и $E=\pi^{-1}(G)$. Равенства

$$(3H'-E)^3E=\deg\varphi^{-1}(G)=\deg(D)=15,\quad (3H'-E)^4=\deg V=3$$

дают нам линейные уравнения на $H'E^3$ и E^4:

$$9H'\circ E^3-E^4=-255,\quad -12H'\circ E^3+E^4=381,$$

решая которые, находим $H'\circ E^3=-42$, $E^4=-123$. Из точной последовательности $0\to T_G\to T_K\to N_{G|K}\to 0$ получаем

$$c_1=4H'-d_1,\quad c_2=7H'^2-d_2-d_1(4H'-d_1); \tag{3}$$

здесь через d_i обозначены классы Чженя G, а через c_i — классы Чженя пучка $N_{G|K}$.

По лемме 1 из (3) следует

$$H'E^3=-(4H'-d_1)\,H'=-42\ \text{ и }\ d_1H'=-2,$$
$$E^4=-(16H'^2-8H'd_1+d_1^2)+7H'^2-d_2-4d_1H'+d_1^2=-123\ \text{ и }\ d_2=25.$$

Линейная система $|K_G|$ непуста. Действительно, канонический класс поверхности $D\cap H$ считается по формуле присоединения и равен

$DH(3H-2B)$. Линейная система $|3L-2C|$ на трехмерной кубике M непуста (здесь C — гиперплоское сечение F, а L — гиперплоское сечение M): многообразие R, заметаемое хордами C, имеет степень 3 и особо вдоль C, так что $R\cap M\in|3L-2C|$. Если $|K_G|$ содержит неприводимую кривую, то из формулы присоединения тут же получаем $K_G^2=-1$. В противном случае $K_G=l_1+l_2$ и l_i — прямые. По формуле присоединения $2l_i^2+l_il_j=-2$, $l_il_j=0$, $l_i^2=-1$ (l_il_j равно 0 или 1). Таким образом, линейная система $|K_G|$ содержит исключительную кривую первого рода, при стягивании которой получаем поверхность К3 $(h'(\mathcal{O}_G)=p_a-2=$ $=\frac{1}{12}(K_G^2+d_2)-2=0)$.

Проекция π из точки $p\in K$ осуществляет бирациональный изоморфизм K и $\mathbf{P}^4$. Отображение $\bar{\varphi}=\pi\circ\varphi: V\to\mathbf{P}^4$ состоит в раздутии F и точки $\varphi^{-1}(p)$ и в стягивании D на поверхность степени 10 и $S_{l_{\varphi^{-1}(p)}}\cap V$ на двумерную квадрику в $\mathbf{P}^4$.

Автор благодарен В. А. Исковских за постановку темы и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Morin U. Sulla razionalita del'ipersuperficie cubica generale dello spazio lineare S_5. — Rend. Semin. mat. Univ. Padova, 1940, **11**, N 3—4, 108—112.
2. Porteaus J. Blowing up Chern classes. — Proc. Cambridge Phill. Soc., 1960, **56**, N 2, 118—124.
3. Roth L. Algebraic threefolds with special regard to problems of rationality. Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1955.
4. Данилов В. И. Декомпозиция некоторых бирациональных морфизмов. — Изв. АН СССР. Сер. Матем., 1980, **44**, № 2, 465—477.
5. Ramanujam C. P. Remarks on Kodaira vanishing theorem. — J. Indian Math. Soc., 1972, **36**, N 1—2, 41—51.
6. Исковских В. А. Бирациональные автоморфизмы трехмерных алгебраических многообразий. — В кн.: Современные проблемы математики (Итоги науки и техники. Т. 12). М., 1979, с. 220—228.

Поступила в редакцию
25.03.82

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА, 1984, № 3

УДК 517.98

Г. Ш. Гусейнов

О КВАДРАТИЧНОМ ПУЧКЕ ОПЕРАТОРОВ ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

1. Рассмотрим краевые задачи, порожденные на интервале $(0,\pi)$ уравнением

$$-y''+[q(x)+2\lambda p(x)]y=\lambda^2y \tag{1}$$

и разделенными граничными условиями вида

$$y(0)=y(\pi)=0 \tag{2}$$

или

$$y'(0)=y'(\pi)=0, \tag{3}$$

а также периодическими

$$y(0)-y(\pi)=y'(0)-y'(\pi)=0 \tag{4}$$

и антипериодическими

$$y(0)+y(\pi)=y'(0)+y'(\pi)=0 \tag{5}$$

граничными условиями.