

Раскрашенные графы и матричные интегралы.

И.В.Арташкин*

1. Введение.

В этой работе обсуждаются два различных асимптотических разложения матричных интегралов. Первоначальный подход, использующий так называемую технику фейнмановских диаграмм, которая описана, например, в [3], приводит к суммированию по классам изоморфных ленточных графов. Асимптотические разложения более общих гауссовых интегралов, описанные в [2], представляют собой суммы по классам изоморфных раскрашенных графов без всякой ленточной структуры. Здесь мы выводим первое разложение из второго, что дает независимое доказательство разложения, использованного Концевичем в [4]. Было бы весьма интересно сравнить алгебраический аппарат, возникающий при каждом из этих подходов. Асимптотическое разложение по ленточным графам приводит к тау-функции иерархии КДВ, в то время как суммы по раскрашенным графам удовлетворяют достаточно простой системе дифференциальных уравнений в частных производных, обобщающей уравнение Бюргерса (подробности см. [1] или в [2]).

Общий подход с использованием раскрашенных графов описан во втором параграфе. В третьем параграфе мы подробно разбираем частный случай, соответствующий матричному интегралу, рассматриваемому в [4]. Там же мы получаем разложение по ленточным графам. Доказательство основано на простых топологических соображениях, описанных в четвертом параграфе. В пятом параграфе мы приводим явное вычисления первого члена разложения по раскрашенным графам.

*При частичной поддержке грантов РФФИ 07-01-92211, 07-01-00441.

Эта работа появилась в качестве ответа на вопрос Бориса Дубровина, которому я благодарен за многочисленные полезные обсуждения. Я также признателен Международному центру теоретической физики (ICTP) в Триесте, где была подготовлена предварительная версия этой работы.

2. Раскрашенные графы.

Раскрашенные графы вводятся в работе [1]. Говоря неформально, раскрашенный граф — это конечный комбинаторный объект, полученный соединением конечного числа ”деталей” следующих двух типов.

- (1) *Вершины*, имеющие конечное число *хвостов* (т.е. полуребер), каждый из которых раскрашен одним из $r \geq 1$ заданных цветов. Обозначим множество цветов через Ω ; в этом разделе нам будет удобно занумеровать цвета и считать, что

$$\Omega = \{1, \dots, r\}. \quad (2.1)$$

Каждой вершине v можно сопоставить ее *мультииндекс валентностей* $\nu(v) = (n_1, \dots, n_r)$, где $n_i \geq 0$ — это количество выходящих из вершины v хвостов, окрашенных цветом i . Полная валентность вершины — это $|\nu(v)| = \sum n_i$. В общем случае раскрашенный граф является взвешенным графом, это значит, что каждой вершине v сопоставляется неотрицательное целое число $g(v)$, называемое *родом* вершины v . Иногда, однако, нет необходимости рассматривать взвешенные графы, для этого можно просто считать, что рода всех вершин равны нулю. Соответствующие упрощения обозначений описаны ниже в замечании 2.1.

- (2) Для соединения двух хвостов цветов i и j в одно ребро требуются детали второго типа, которые мы будем называть *(ij)-коннекторами*. Таким образом, коннектор можно рассматривать как особого рода двухвалентную вершину, но, вероятно, правильнее представлять его как своего рода ”середины” ребра.

Таким образом, по определению раскрашенный граф Γ представляет собой объект, полученный при помощи соединения конечного числа

описанных деталей; некоторые хвосты могут при этом оставаться свободными, но каждый использованный коннектор должен обязательно соединять ровно два полуребра. Для раскрашенного графа Γ определяется мультииндекс его хвостов $N(\Gamma) = (N_1, \dots, N_r)$, где $N_i \geq 0$ представляет собой число хвостов цвета i . Родом связного графа Γ называется

$$g(\Gamma) = b_1(\Gamma) + \sum_{v \in V(\Gamma)} g(v), \quad (2.2)$$

где $b_1(\Gamma)$ — первое число Бетти графа Γ .

Рассмотрим набор независимых переменных $a_{m,N}$ для всех неотрицательных целых m и всех мультииндексов $N = (n_1, \dots, n_r)$, где все $n_i \geq 0$, и рассмотрим симметрическую $r \times r$ матрицу $\Sigma = (\sigma_{ij})$. Переменные $a_{m,N}$ можно рассматривать как коэффициенты формального ряда Тейлора

$$U(X, \hbar) = \sum_{m,N} a_{m,N} \frac{Y^N}{N!} \hbar^{m-1} \in \frac{1}{\hbar} \mathbb{C}[[y_1, \dots, y_r, \hbar]], \quad (2.3)$$

где $Y = (y_1, \dots, y_r)$, $Y^N = y_1^{n_1} \dots y_r^{n_r}$ и $N! = n_1! \dots n_r!$. Мы будем также использовать следующие обозначения: мультииндекс с одной единичкой на i -ом месте и остальными нулями $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ будет обозначаться $\{i\}$; мультииндекс $\{i\} + \{j\}$ будет обозначаться $\{ij\}$; мультииндекс $\{i\} + \{j\} + \{k\}$ будет обозначаться $\{ijk\}$ и так далее.

Рассмотрим разложение

$$U(X, \hbar) = \sum_m U_m(Y) \hbar^{m-1} \quad (2.4)$$

и определим его градиентный вектор (компонентами которого будут формальные ряды)

$$F(Y) = \nabla_Y U_0(Y) = \left(\frac{\partial U_0(Y)}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial U_0(Y)}{\partial y_r} \right), \quad (2.5)$$

а также матрицу Гессе

$$H(Y) = \nabla_Y F(Y); \quad H(Y)_{ij} = \frac{\partial^2 U_0(Y)}{\partial y_i \partial y_j}. \quad (2.6)$$

Рассмотрим следующие производящие формальные ряды:

$$\Psi(\{a_{m,N}\}, Y, \Sigma, \hbar) = \sum_{\substack{\text{Все} \\ \text{раскра-} \\ \text{шенные} \\ \text{графы } \Gamma}} \frac{Y^{N(\Gamma)} \hbar^{g(\Gamma)-1}}{|\text{Aut } \Gamma|} \prod_{v \in V(\Gamma)} a_{g(v), \nu(v)} \prod_{e \in E(\Gamma)} s_{ij} \quad (2.7)$$

и

$$\mathcal{P}(\{a_{m,N}\}, \Sigma, \hbar) = \sum_{\substack{\text{Все стабильные} \\ \text{раскрашенные} \\ \text{графы } \Gamma}} \frac{\hbar^{g(\Gamma)-1}}{|\text{Aut } \Gamma|} \prod_{v \in V(\Gamma)} a_{g(v), \nu(v)} \prod_{e \in E(\Gamma)} s_{ij} \quad (2.8)$$

Напомним, что граф называется *стабильным*, если у него нет вершин рода 0 валентности менее, чем три, и нет отдельно стоящих (валентности 0) вершин рода 1. Поэтому стабильных графов рода 0 и 1 не существует. Рассмотрим разложения

$$\Psi(\{a_{m,N}\}, Y, \Sigma, \hbar) = \sum_{g \geq 0} \Psi_g(\{a_{m,N}\}, Y, \Sigma) \hbar^{g-1} \quad (2.9)$$

и

$$\mathcal{P}(\{a_{m,N}\}, \Sigma, \hbar) = \sum_{g \geq 2} \mathcal{P}_g(\{a_{m,N}\}, \Sigma) \hbar^{g-1}. \quad (2.10)$$

Отметим, что все Ψ_g являются формальными степенными рядами, в то время как \mathcal{P}_g являются многочленами, зависящими от конечного числа $a_{m,N}$ с $m \leq g$ и удовлетворяющими определенным условиям однородности, приведенным в [1]. Там они называются *многочленами стабильных графов*. (В настоящей работе явный вид соотношений однородности и другие свойства этих многочленов нам не потребуются.)

В [1] доказывается, что основной производящий ряд Ψ можно выразить через ряды F и H (см. (2.5) и (2.6)) и многочлены стабильных графов. Чтобы сформулировать эти результаты, рассмотрим градиент

$$\Phi(\{a_{m,N}\}, Y, \Sigma) = \nabla_Y \Psi_0(\{a_{m,N}\}, Y, \Sigma) = \left(\frac{\partial \Psi_0}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial \Psi_0}{\partial y_r} \right) \quad (2.11)$$

и

$$\Theta(\{a_{m,N}\}, Y, \Sigma) = Y + \Sigma \Phi(\{a_{m,N}\}, Y, \Sigma). \quad (2.12)$$

Приведем теперь без доказательства результаты [1]. Для краткости мы будем опускать аргументы ряда Θ , определенного в (2.12).

(1) Формальный ряд Φ удовлетворяет функциональному уравнению

$$\Phi(\{a_{m,N}\}, Y, \Sigma) = F(\Theta), \quad (2.13)$$

или, что равносильно, формальные ряды

$$Y - \Sigma F(Y) \quad \text{and} \quad \Theta = Y + \Sigma \Phi(\{a_{m,N}\}, Y, \Sigma) \quad (2.14)$$

взаимно обратны. Обращая $Y - \Sigma F(Y)$ или решая уравнение (2.13) и затем, интегрируя, мы Φ можем определить ряд Ψ_0 .

(2) При $g = 1$

$$\Psi_1(\{a_{m,N}\}, Y, \Sigma) = U_1(\Theta) - \frac{1}{2} \text{tr} \log(E - \Sigma H(\Theta)), \quad (2.15)$$

где E обозначает единичную матрицу.

(3) При $g > 1$

$$\Psi_g(\{a_{m,N}\}, Y, \Sigma) = \mathcal{P}_g \left(\left\{ \frac{\partial^N U_m}{\partial Y^N}(\Theta) \right\}, (E - \Sigma H(\Theta))^{-1} \Sigma \right). \quad (2.16)$$

Важным свойством производящего степенного ряда Ψ (2.7) является то, что он является асимптотическим разложением гауссова интеграла определенного вида. Для этого нужно рассматривать Σ как вещественную положительно определенную симметрическую матрицу и рассмотреть гауссову меру на \mathbb{R}^r

$$d\mu_{Y,\Sigma}(X) = \frac{1}{(2\pi\hbar \det \Sigma)^{r/2}} \exp \left(-\frac{(Y - X)^T \Sigma^{-1} (Y - X)}{2\hbar} \right) dX, \quad (2.17)$$

имеющую среднее значение Y и матрицу ковариации $\hbar \Sigma$. В работе [2] доказывается, что формальный ряд (2.7) является тогда асимптотическим разложением следующего гауссового интеграла:

$$\log \int \exp(U(X)) d\mu_{Y,\Sigma}(X) \sim \Psi(\{a_{g,N}\}, Y, \Sigma, \hbar). \quad (2.18)$$

Ряд U задается своим тейлоровским разложением (2.3); поэтому асимптотическое разложение любого интеграла такого типа можно рассматривать как производящую функцию с подходящими коэффициентами $a_{g,N}$. В наиболее часто встречающемся случае, когда

$$a_{0,N} = 0 \quad \text{при} \quad |N| \leq 2 \quad \text{и} \quad a_{1,(0,\dots,0)} = 0 \quad (2.19)$$

нестабильные графы не дают вклада в производящий степенной ряд Ψ (2.7), так что \mathcal{P} можно получить, подставляя в Ψ 0 вместо Y :

$$\mathcal{P}(\{a_{g,N}\}, \Sigma, \hbar) = \Psi(\{a_{g,N}\}, 0, \Sigma, \hbar). \quad (2.20)$$

Таким образом, в этом случае производящий степенной ряд для многочленов стабильных графов (2.8) можно также рассматривать как асимптотическое разложение гауссова интеграла

$$\log \int \exp(U(X)) d\mu_{0,\Sigma}(X) \sim \mathcal{P}(\{a_{g,N}\}, \Sigma, \hbar), \quad (2.21)$$

где

$$d\mu_{0,\Sigma}(X) = \frac{1}{(2\pi\hbar \det \Sigma)^{r/2}} \exp\left(-\frac{X^T \Sigma^{-1} X}{2\hbar}\right) dX. \quad (2.22)$$

Замечание 2.1. Во многих случаях запись (2.3) для ряда U является слишком общей. Например, для матричных интегралов, обсуждаемых в настоящей работе и во многих других случаях, нет необходимости рассматривать нагруженные графы. Тогда достаточно просто положить

$$a_{g,N} = 0 \quad \text{при} \quad g > 0. \quad (2.23)$$

В этом случае $U = \frac{U_0}{\hbar}$ и $U_1 = U_2 = \dots = 0$, так что удобно сократить обозначения и писать a_N вместо $a_{0,N}$.

Если к тому же U_0 является однородным многочленом степени $d \geq 3$, то

$$a_N = 0 \quad \text{при} \quad |N| \neq d, \quad (2.24)$$

так что в сумме (2.7) достаточно рассматривать суммы только по d -валентным графам. Для матричных интегралов, которые обсуждаются в этой работе, $d = 3$.

3. Матричные интегралы.

Применим теперь вышеописанный подход к матричному интегралу, рассматривавшемуся в [4]. В этом случае X является эрмитовой матрицей размером $n \times n$; обозначим

$$X = Z + \sqrt{-1} V, \quad (3.1)$$

где Z симметрическая матрица, а V — кососимметрическая. Таким образом, X зависит от

$$r = n^2 \quad (3.2)$$

действительных параметров; в [4] гауссова мера на \mathbb{R}^r задается как

$$d\mu_\Lambda(X) = c_\Lambda \exp\left(-\operatorname{tr} \frac{X\Lambda X}{2}\right) dX, \quad (3.3)$$

а матричный интеграл имеет вид

$$\log \int \exp\left(\frac{\sqrt{-1}}{6} \operatorname{tr} X^3\right) d\mu_\Lambda(X). \quad (3.4)$$

Однородной заменой

$$X \rightarrow \hbar^{-1/3} X, \quad \Lambda \rightarrow \hbar^{-1/3} \Lambda \quad (3.5)$$

интеграл приводится к виду (2.21)

$$\log \int \exp\left(\frac{\sqrt{-1}}{6\hbar} \operatorname{tr} X^3\right) d\tilde{\mu}_\Lambda(X), \quad (3.6)$$

где

$$d\tilde{\mu}_\Lambda(X) = \tilde{c}_\Lambda \exp\left(-\operatorname{tr} \frac{X\Lambda X}{2\hbar}\right) dX \quad (3.7)$$

Это в точности интеграл (2.21) для случая $r = n^2$ и

$$U(X) = \frac{U_0(X)}{\hbar} = \frac{\sqrt{-1}}{6\hbar} \operatorname{tr} X^3. \quad (3.8)$$

Отметим, что наш случай в точности соответствует замечанию 2.1: $a_{g,N}$ отличны от нуля только при $g = 0$ и $|N| = 3$.

Теперь выпишем для нашего случая явные выражения кубического многочлена U и корреляционной матрицы Σ .

Для этого зафиксируем следующие обозначения для координат в \mathbb{R}^r . Имеется $\frac{n(n+1)}{2}$ координат z_{ij} (где $i \leq j$), соответствующих элементам симметрической матрицы Z из (3.1), обозначим их через $x_{\underline{ij}}$. Остальные $\frac{n(n-1)}{2}$ координат v_{ij} (где $i < j$) соответствуют внедиагональным элементам кососимметрической матрицы V из (3.1), обозначим их через $x_{\overline{ij}}$. Нам будет удобно считать символы \underline{ij} и \overline{ij} симметричными: $\underline{ij} = \underline{ji}$ и $\overline{ij} = \overline{ji}$, но при этом $x_{\underline{ij}}$ (или $x_{\overline{ij}}$) всегда будет обозначать соответствующий элемент матрицы Z (соответственно V) расположенный выше главной диагонали. Введем обозначения для подмножеств множества индексов Ω :

$$\begin{aligned}\Omega_0 &= \{\underline{ii}, \quad 1 \leq i \leq n\} \\ \Omega_+ &= \{\underline{ij}, \quad 1 \leq i < j \leq n\} \\ \Omega_- &= \{\overline{ij}, \quad 1 \leq i < j \leq n\},\end{aligned}\tag{3.9}$$

так что

$$\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_+ \cup \Omega_-.\tag{3.10}$$

Теперь нетрудно выписать $n^2 \times n^2$ матрицу Σ для случая диагональной матрицы

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.\tag{3.11}$$

Предложение 3.1. Для диагональной матрицы Λ (3.11) Σ является диагональной матрицей с элементами

$$\sigma_{\underline{ii} \ \underline{ii}} = \frac{1}{\lambda_i}; \quad \sigma_{\underline{ij} \ \underline{ij}} = \frac{1}{\lambda_i + \lambda_j}; \quad \sigma_{\overline{ij} \ \overline{ij}} = \frac{1}{\lambda_i + \lambda_j}\tag{3.12}$$

Нетрудно также выписать явный вид функции $U_0(X) = \frac{\sqrt{-1}}{6} \operatorname{tr} X^3$.

Предложение 3.2.

$$U_0(X) = \sqrt{-1} \left(\sum_{1 \leq i \leq j \leq k \leq n} \frac{1}{\{ijk\}!} x_{\underline{ij}} x_{\underline{jk}} x_{\underline{ik}} + \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \sum_{k \neq i, k \neq j} \pm \frac{1}{\{ij\}!} x_{\underline{ij}} x_{\overline{jk}} x_{\overline{ik}} \right),\tag{3.13}$$

причем во второй сумме стоит знак минус, если k заключено между i и j , и плюс в остальных случаях.

Следствие 3.1. 1) $a_{g,N} = 0$, если $g \neq 0$ или $|N| \neq 3$,
2) При $g = 0$ и $|N| = 3$ все ненулевые значения коэффициентов $a_{g,N}$ задаются следующим образом:

$$a_{0,N} = \begin{cases} \sqrt{-1} & \text{for } N = \{\underline{ij} \ \underline{jk} \ \underline{ik}\} & \forall i, j, k \\ \pm\sqrt{-1} & \text{for } N = \{\underline{ij} \ \overline{jk} \ \overline{ik}\} & \forall i, j, k; i \neq k, j \neq k \end{cases} \quad (3.14)$$

причем во второй строчке стоит знак минус, если k заключено между i и j , и плюс в остальных случаях.

Далее мы воспользуемся сокращением обозначений, предложенным в 2.1: будем писать $a_{\{\alpha\beta\gamma\}}$ вместо $a_{0,\{\alpha\beta\gamma\}}$ ($\alpha, \beta, \gamma \in \Omega$).

Диагональность матрицы Σ означает, что в этом случае оба конца любого ребра окрашены в один и тот же цвет, поэтому мы имеем раскраску ребер тем же самым множеством цветов Ω :

$$\mu : E(\Gamma) \rightarrow \Omega. \quad (3.15)$$

Согласно следствию 3.1 такая раскраска должна удовлетворять следующему условию: любые три сходящиеся в одной вершине ребра должны быть окрашены либо цветами

$$\underline{ij}, \underline{jk} \text{ и } \underline{ik} \text{ для некоторых } i, j, k, \quad (3.16)$$

либо цветами

$$\underline{ij}, \overline{jk} \text{ и } \overline{ik} \text{ для некоторых } i, j, k, i \neq k \neq j. \quad (3.17)$$

Мы будем также использовать *сокращенные раскраски*

$$\varkappa : E(\Gamma) \rightarrow \Omega_0 \cup \Omega_+ \quad (3.18)$$

которые также должны удовлетворять условию (3.16).

Любой раскраске μ (3.15) можно сопоставить сокращенную раскраску \varkappa_μ определенную следующим образом:

$$\varkappa_\mu(e) = \begin{cases} \mu(e) & \text{если } \mu(e) \in \Omega_0 \cup \Omega_+; \\ \underline{ij} & \text{если } \mu(e) = \overline{ij} \in \Omega_-. \end{cases} \quad (3.19)$$

Отметим, что согласно (3.12) $\sigma_{\mu(e)} = \sigma_{\varkappa_\mu(e)}$.

Сокращенная раскраска \varkappa определяет подграф $\Delta(\varkappa) \subset \Gamma$, $V(\Delta(\varkappa)) = V(\Gamma)$ состоящий из всех ребер, окрашенных Ω_+ (т.е. $E(\Delta(\varkappa)) = \varkappa^{-1}(\Omega_+)$) и имеющих то же самое множество вершин $E(\Gamma)$, что и граф Γ . Конечно, $\Delta(\varkappa)$ не обязательно связан; согласно (3.22) Δ может иметь трехвалентные, двухвалентные и нуль-валентные вершины.

По раскраске μ определим также подграф $\eta(\mu) \subset \Delta(\varkappa_\mu)$ как минимальный подграф, содержащий все ребра из $\mu^{-1}(\Omega_-)$. Согласно (3.22) все вершины $\eta(\mu)$ двухвалентны, поэтому $\eta(\mu)$ представляет собой конечное несвязное объединение простых циклов, т.е. элемент $H_1(\Delta(\varkappa_\mu), \mathbb{Z}_2)$. Очевидно, сокращенная раскраска \varkappa_μ и цикл $\eta(\mu)$ определяют μ однозначно.

Предложение 3.3. *Отображение $\mu \mapsto (\varkappa_\mu, \eta(\mu))$ является естественным взаимно-однозначным соответствием между множеством раскрасок μ (3.15), удовлетворяющих условиям (3.16) и (3.17) и множеством пар (\varkappa, η) , где \varkappa является сокращенной раскраской (3.18), удовлетворяющей (3.16), а η является произвольным циклом в $H_1(\Delta, \mathbb{Z}_2)$.*

Раскраску, соответствующую сокращенной раскраске \varkappa и циклу $\eta \in H_1(\Delta(\varkappa), \mathbb{Z}_2)$, мы будем обозначать $\mu(\varkappa, \eta)$.

Теперь асимптотическое разложение (3.6) можно переписать так:

$$\begin{aligned}
& \log \int \exp \left(\frac{\sqrt{-1}}{6\hbar} \operatorname{tr} X^3 \right) d\tilde{\mu}_\Lambda(X) \sim \\
& \sim \sum_{\substack{\text{Все трехвалентные} \\ \text{графы } \Gamma}} \sum_{\substack{\text{Все раскраски} \\ \mu \text{ ребер } E(\Gamma)}} \frac{\hbar^{g(\Gamma)-1}}{|\operatorname{Aut}(\Gamma, \mu)|} \prod_{e \in E(\Gamma)} \sigma_{\mu(e)} \prod_{v \in V(\Gamma)} a_{\nu(v)} = \\
& = \sum_{\substack{\text{Все трех-} \\ \text{валентные} \\ \text{графы } \Gamma}} \sum_{\substack{\text{Все} \\ \text{сокращенные} \\ \text{раскраски } \varkappa \\ \text{ребер } E(\Gamma)}} \prod_{e \in E(\Gamma)} \sigma_{\varkappa(e)} \sum_{\substack{\text{Все такие} \\ \text{раскраски } \mu \\ \text{ребер } E(\Gamma), \\ \text{что } \varkappa_\mu = \varkappa}} \frac{\hbar^{g(\Gamma)-1}}{|\operatorname{Aut}(\Gamma, \mu)|} \prod_{v \in V(\Gamma)} a_{\nu(v)}
\end{aligned} \tag{3.20}$$

В дальнейшем нам будет удобнее пользоваться подправленными зна-

чениями

$$\bar{a}_N = \frac{a_N}{\sqrt{-1}}, \quad (3.21)$$

так что в соответствии со следствием 3.1

$$\bar{a}_N = \begin{cases} 1 & \text{при } N = \{\underline{ij} \ \underline{jk} \ \underline{ik}\} & \forall i, j, k \\ \pm 1 & \text{при } N = \{\underline{ij} \ \overline{jk} \ \overline{ik}\} & \forall i, j, k; i \neq k, j \neq k \end{cases} \quad (3.22)$$

где во второй строчке стоит знак минус, если k заключено между i и j , и плюс в остальных случаях. Поскольку трехвалентный граф рода g имеет $2g - 2$ вершины, разложение можно переписать используя значения \bar{a}_N , следующим образом:

$$\begin{aligned} & \log \int \exp \left(\frac{\sqrt{-1}}{6\hbar} \operatorname{tr} X^3 \right) d\tilde{\mu}_\Lambda(X) \sim \\ & \sim \sum_{\substack{\text{Все трех-} \\ \text{валентные} \\ \text{графы } \Gamma}} (-\hbar)^{g(\Gamma)-1} \sum_{\substack{\text{Все} \\ \text{сокращенные} \\ \text{раскраски } \varkappa \\ \text{ребер } E(\Gamma)}} \prod_{e \in E(\Gamma)} \sigma_{\varkappa(e)} \sum_{\substack{\text{Все такие} \\ \text{раскраски } \mu \\ \text{ребер } E(\Gamma), \\ \text{что } \varkappa_\mu = \varkappa}} \frac{1}{|\operatorname{Aut}(\Gamma, \mu)|} \prod_{v \in V(\Gamma)} \bar{a}_{\nu(v)} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Отметим, что все значения $\bar{a}_{\nu(v)}$ равны ± 1 и в соответствии с (3.22) отрицательные сомножители могут давать только вершины $\eta(\mu)$:

$$\prod_{v \in V(\Gamma)} \bar{a}_{\nu(v)} = \prod_{\substack{\text{вершины} \\ \text{цикла } \eta(\mu)}} \bar{a}_{\nu(v)}. \quad (3.24)$$

Поскольку любой цикл $\eta \in H_1(\Delta(\varkappa), \mathbb{Z}_2)$ можно представить как объединение непересекающихся простых циклов,

$$\prod_{v \in V(\Gamma)} \bar{a}_{\nu(v)} = \prod_{\substack{\text{простые циклы} \\ c \subset \eta(\mu)}} \prod_{\substack{\text{вершины} \\ \text{цикла } c}} \bar{a}_{\nu(v)}. \quad (3.25)$$

Мы покажем, что для простого цикла c знак произведения

$$\prod_{\substack{\text{вершины} \\ \text{цикла } c}} \bar{a}_{\nu(v)} \quad (3.26)$$

выражается в топологических терминах, возникающих из рассмотрения вложения графа Γ в компактную поверхность S . По определению (см. [5]) это означает, что имеется клеточное разбиение поверхности S и изоморфизм графа (рассматриваемого как одномерный клеточный комплекс) с одномерным остовом этого клеточного разбиения. Обозначим через $F(S)$ множество двумерных клеток этого разбиения, элементы $F(S)$ мы будем называть *гранями*.

Рассмотрим какую-нибудь раскраску множества граней

$$\varphi : F(S) \rightarrow \{1, \dots, n\}. \quad (3.27)$$

Очевидно, раскраска граней φ определяет сокращенную раскраску $\varkappa(\varphi)$ множества ребер графа Γ (с множеством цветов $\Omega_0 \cup \Omega_+$), удовлетворяющую (3.16): для ребра e инцидентного граням i и j мы полагаем

$$\varkappa(\varphi)(e) = \underline{ij}. \quad (3.28)$$

В следующем разделе мы покажем, что любая сокращенная раскраска ребер \varkappa порождается каким-нибудь вложением, но в общем случае такое вложение не единственно.

Предложение 3.4. 1) Любая сокращенная раскраска $\varkappa : E(\Gamma) \rightarrow \Omega_0 \cup \Omega_+$, удовлетворяющая (3.16), порождается некоторым вложением графа Γ в некоторую поверхность S и раскраской множества ее граней φ (3.27).

2) Вложение и раскраска φ (3.27) определяются по \varkappa однозначно тогда и только тогда, когда $\Gamma = \Delta(\varkappa)$.

Рассмотрим некоторую раскраску μ ребер графа Γ , удовлетворяющую (3.16) и (3.17), и какое-нибудь вложение графа Γ в компактную поверхность S , порождающую раскраску \varkappa_μ . Рассмотрим простой цикл $c \in H_1(\Delta(\varkappa_\mu), \mathbb{Z}_2)$. Тогда окрестность цикла c в S гомеоморфна либо цилиндру (ориентируемый случай), либо ленте Мебиуса (неориентируемый случай). В следующем разделе мы покажем, что это определяет знак произведения (3.26) и тем самым не зависит от выбора вложения.

Предложение 3.5. Для простого цикла $c \subset \eta$

$$\prod_{\substack{\text{вершины} \\ \text{цикла } c}} \bar{a}_{\nu(v)} = \begin{cases} 1 & \text{если окрестность цикла } c \text{ ориентируема;} \\ -1 & \text{если окрестность цикла } c \text{ неориентируема.} \end{cases} \quad (3.29)$$

Следствие 3.2. Зафиксируем сокращенную раскраску ребер \varkappa . Для каждого цикла $\eta \in H_1(\Delta(\varkappa), \mathbb{Z}_2)$ рассмотрим раскраску ребер $\mu(\varkappa, \eta)$, определенную в предложении 3.3 и рассмотрим соответствующие значения \bar{a}_N . Тогда отображение

$$\varepsilon : H_1(\Delta(\varkappa), \mathbb{Z}_2) \rightarrow \{\pm 1\}, \quad (3.30)$$

определенное формулой

$$\varepsilon(\eta) = \prod_{\substack{\text{вершины} \\ \text{цикла } \eta}} \bar{a}_{\nu(v)}, \quad (3.31)$$

является гомоморфизмом.

Будем называть сокращенную раскраску ребер \varkappa *ориентируемой*, если окрестности всех циклов $c \in H_1(\Delta(\varkappa), \mathbb{Z}_2)$ ориентируемы; в противном случае сокращенная раскраска называется *неориентируемой*. Тем самым раскраска ориентируема тогда и только тогда, когда гомоморфизм (3.30) тривиален. (Простой пример неориентируемой раскраски приведен на рисунке 1.)

Зафиксируем теперь сокращенную раскраску \varkappa и рассмотрим действие $\text{Aut}(\Gamma, \varkappa)$ на $H_1(\Delta(\varkappa), \mathbb{Z}_2)$. Орбиты этого действия находятся во взаимно-однозначном соответствии с такими раскрасками μ , что $\varkappa_\mu = \varkappa$. Знак $\varepsilon(c)$ постоянен на орбитах действия, поэтому

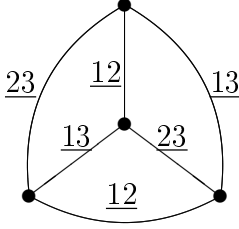


Таблица 1. Неориентируемая раскраска, соответствующая вложению графа в вещественную проективную плоскость. Границы трех двумерных клеток являются тремя 4-циклами графа; эти три двумерные клетки раскрашены цветами 1, 2 и 3.

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{|\text{Aut}(\Gamma, \varkappa)|} \sum_{c \in H_1(\Delta, \mathbb{Z}_2)} \varepsilon(c) = \sum_{\substack{\text{Орбиты} \\ \text{Aut}(\Gamma, \varkappa) \cdot c \\ \text{действия} \\ \text{Aut}(\Gamma, \varkappa) \text{ на} \\ H_1(\Delta(\varkappa), \mathbb{Z}_2)}} \varepsilon(c) \frac{|\text{Aut}(\Gamma, \varkappa) \cdot c|}{|\text{Aut}(\Gamma, \varkappa)|} = \\
 & = \sum_{\substack{\text{Орбиты} \\ \text{Aut}(\Gamma, \varkappa) \cdot c \\ \text{действия} \\ \text{Aut}(\Gamma, \varkappa) \text{ на} \\ H_1(\Delta(\varkappa), \mathbb{Z}_2)}} \varepsilon(c) \frac{1}{|\text{Aut}(\Gamma, \varkappa, c)|} = \sum_{\substack{\text{Все такие} \\ \text{раскраски } \mu \\ \text{ребер графа } \Gamma, \\ \text{такие что} \\ \varkappa_\mu = \varkappa}} \frac{1}{|\text{Aut}(\Gamma, \mu)|} \prod_{\text{Вершины} \\ \text{цикла } \eta(\mu)} \bar{a}_{\nu(v)}
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

Следствие 3.3.

$$\sum_{\substack{\text{Все такие} \\ \text{раскраски } \mu \\ \text{ребер графа } \Gamma, \\ \text{такие что} \\ \mathcal{K}_\mu = \mathcal{K}}} \frac{1}{|\text{Aut}(\Gamma, \mu)|} \prod_{\substack{\text{Вершины} \\ \text{цикла } \eta(\mu)}} \bar{a}_{\nu(v)} = \begin{cases} \frac{2^{b_1(\Delta(\mathcal{K}))}}{|\text{Aut}(\Gamma, \mathcal{K})|} & \text{для} \\ & \text{ориентируемых} \\ & \text{раскрасок } \mathcal{K} \\ 0 & \text{для} \\ & \text{неориентируемых} \\ & \text{раскрасок } \mathcal{K} \end{cases} \quad (3.33)$$

Здесь $b_1(\Delta(\mathcal{K}))$ означает первое число Бетти графа $\Delta(\mathcal{K})$.

Отсюда получается следующее асимптотическое разложение матричного интеграла.

Теорема 3.1.

$$\log \int \exp \left(\frac{\sqrt{-1}}{6\hbar} \text{tr} X^3 \right) d\tilde{\mu}_\Lambda(X) \sim \sum_{\substack{\text{Все трех-} \\ \text{валентные} \\ \text{графы } \Gamma}} \sum_{\substack{\text{Все} \\ \text{ориентируемые} \\ \text{раскраски } \mu \\ \text{ребер } E(\Gamma)}} \frac{(-\hbar)^{g(\Gamma)-1}}{|\text{Aut}(\Gamma, \mu)|} \prod_{e \in E(\Gamma)} \sigma_{\mu(e)} = \quad (3.34)$$

$$= \sum_{\substack{\text{Все трех-} \\ \text{валентные} \\ \text{графы } \Gamma}} \sum_{\substack{\text{Все} \\ \text{сокращенные} \\ \text{раскраски } \mathcal{K} \\ \text{ребер } E(\Gamma)}} \frac{(-\hbar)^{g(\Gamma)-1} 2^{b_1(\Delta(\mathcal{K}))}}{|\text{Aut}(\Gamma, \mathcal{K})|} \prod_{e \in E(\Gamma)} \sigma_{\mathcal{K}(e)}. \quad (3.35)$$

Здесь $b_1(\Delta(\mathcal{K}))$ означает первое число Бетти графа $\Delta(\mathcal{K})$.

Конечно, слагаемые в (3.34) и (3.35) однородны по Λ и \hbar : слагаемые, соответствующие графам рода g имеют степень $-3g + 3$ по Λ .

Для удобства мы приводим эти же разложения еще раз после подстановки, обратной к (3.5)):

$$\begin{aligned} & \log \int \exp \left(\frac{\sqrt{-1}}{6} \operatorname{tr} X^3 \right) d\mu_\Lambda(X) \sim \\ & \sim \sum_{\substack{\text{Все трех-} \\ \text{валентные} \\ \text{графы } \Gamma}} (-1)^{g(\Gamma)-1} \sum_{\substack{\text{Все} \\ \text{ориентируемые} \\ \text{раскраски } \mu \\ \text{ребер } E(\Gamma)}} \frac{1}{|\operatorname{Aut}(\Gamma, \mu)|} \prod_{e \in E(\Gamma)} \sigma_{\mu(e)} = \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} & = \sum_{\substack{\text{Все трех-} \\ \text{валентные} \\ \text{графы } \Gamma}} (-1)^{g(\Gamma)-1} \sum_{\substack{\text{Все} \\ \text{ориентируемые} \\ \text{сокращенные} \\ \text{раскраски } \varkappa \\ \text{ребер } E(\Gamma)}} \frac{2^{b_1(\Delta(\varkappa))}}{|\operatorname{Aut}(\Gamma, \varkappa)|} \prod_{e \in E(\Gamma)} \sigma_{\varkappa(e)}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

В работе [4] это же асимптотическое разложение описано в терминах ленточных графов. По определению ленточным графом называется граф с зафиксированным циклическим упорядочением полуребер в каждой вершине; этот дополнительный набор данных мы будем обозначать \mathcal{D} . Пара (Γ, \mathcal{D}) однозначно определяет вложение графа в ориентируемую поверхность вместе с выбором стороны этой поверхности (т.е. ориентации). Раскраска граней φ (3.27) определяет раскраску $\varkappa(\varphi)$ (3.28) ребер $E(\Gamma)$ и тем самым множители $\sigma_{\varkappa(\varphi)}(e)$ оказываются определены для всех ребер Γ . В этих терминах описание [4] выглядит следующим образом.

Теорема 3.2. ([4])

$$\begin{aligned}
& \log \int \exp \left(\frac{\sqrt{-1}}{6} \operatorname{tr} X^3 \right) d\mu_\Lambda(X) \sim \\
& \sim \sum_{\substack{\text{Все трех-} \\ \text{валентные} \\ \text{ленточные} \\ \text{графы } (\Gamma, \mathcal{D})}} (\sqrt{-1})^{|V(\Gamma)|} \sum_{\substack{\text{Все} \\ \text{раскраски} \\ \text{граней } \varphi}} \frac{2^{|E(\Delta(\varkappa(\varphi)))| - |V(\Gamma)|}}{|\operatorname{Aut}(\Gamma, \mathcal{D}, f)|} \prod_{e \in E(\Gamma)} \sigma_{\varkappa(\varphi)}(e).
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Теперь нетрудно узнать в (3.37) измельчение (3.38). Соответствие задается следующей формулой классов, связывающей автоморфизмы раскрашенных ленточных графов и обычных раскрашенных графов.

Предложение 3.6. Пусть Γ — трехвалентный граф,

$$\varkappa : E(\Gamma) \rightarrow \Omega_0 \cup \Omega_+ \tag{3.39}$$

— ориентируемая сокращенная раскраска, удовлетворяющая (3.16). Тогда

$$\frac{2^{b_0(\Delta(\varkappa))}}{|\operatorname{Aut}(\Gamma, \varkappa)|} = \sum_{\substack{\text{Все структуры} \\ \text{ленточного} \\ \text{графа } \mathcal{D} \\ \text{на графе } \Gamma}} \sum_{\substack{\text{Все такие} \\ \text{раскраски} \\ \text{граней } \varphi, \\ \text{что } \varkappa(\varphi) = \varkappa}} \frac{1}{|\operatorname{Aut}(\Gamma, \mathcal{D}, \varphi)|}, \tag{3.40}$$

где $b_0(\Delta(\varkappa))$ — нулевое число Бетти (число связных компонент) графа $\Delta(\varkappa)$.

Мы докажем это предложение в следующем разделе; поскольку

$$|E(\Delta(\varkappa))| - |V(\Gamma)| = b_1(\Delta(\varkappa)) - b_0(\Delta(\varkappa)) \tag{3.41}$$

формула (3.40) доставляет доказательство теоремы 3.2, независимое от [4].

Замечание. Отметим два предельных частных случая формулы (3.40).

В случае *правильной* раскраски \varkappa все ребра окрашены разными цветами; это означает, что $\Delta(\varkappa) = \Gamma$ и тем самым $b_0(\Delta(\varkappa)) = 1$. Согласно предложению 3.4 вложение и раскраска граней в этом случае определены однозначно, так что в правой части (3.40) стоит самое большое два слагаемых, соответствующих двум способам выбора ориентации на поверхности S . Если два получающиеся при этом ленточные графа не изоморфны, то они оба имеют ту же группу автоморфизмов, что и (Γ, \varkappa) . Если же они изоморфны, то правая часть (3.40) состоит из единственного слагаемого.

Противоположный случай $n = 1$ означает, что на самом деле никакой раскраски нет. Поэтому в правой части стоит просто сумма по всем структурам ленточного графа \mathcal{D} на графе Γ . В этом случае (3.40) дает:

$$\frac{2^{|V(\Gamma)|}}{\text{Aut}(\Gamma)} = \sum_{\substack{\text{Все структуры} \\ \text{ленточного графа } \mathcal{D} \\ \text{на графе } \Gamma}} \frac{1}{\text{Aut}(\Gamma, \mathcal{D})}. \quad (3.42)$$

4. Ленточные графы и раскрашенные графы.

Здесь мы докажем все топологические утверждения о ленточных графах и раскрашенных графах, сформулированные в предыдущем разделе. Для этого напомним понятие (дискретной) *связности* на графе, введенное А.Н.Тюриным в [6]. Мы будем использовать следующие обозначения. Ориентированное ребро графа мы будем обозначать \vec{e} ; то же самое ребро с противоположной ориентацией будет обозначаться \overleftarrow{e} . Две вершины, инцидентные ребру \vec{e} обозначаются $s(\vec{e})$ и $t(\vec{e})$, так что \vec{e} направлено от $s(\vec{e})$ к $t(\vec{e})$. Путем \vec{l} называется такая последовательность ориентированных ребер $\vec{l} = [\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m]$, что $t(\vec{e}_i) = s(\vec{e}_{i+1})$ и $\vec{e}_i \neq \overleftarrow{e}_{i+1}$; для замкнутого пути еще необходимо потребовать $\vec{e}_1 \neq \overleftarrow{e}_m$ и $t(\vec{e}_m) = s(\vec{e}_1)$. Для пути \vec{l} определим $s(\vec{l}) = s(\vec{e}_1)$ и $t(\vec{l}) = t(\vec{e}_m)$. Путь называется *простым*, если все ребра e_1, \dots, e_m различны; простой путь в трехвалентном графе очевидно представляет собой простой ориентированный цикл.

Для графа без хвостов естественно отождествить множество полуребер, инцидентных вершине v , с множеством ориентированных ребер, исходящих из этой вершины. Мы будем обозначать это множество $\text{St}(v)$. Для трехвалентного графа все множества $\text{St}(v)$ состоят из трех элементов.

По определению *связностью* ∇ на графе Γ называется набор отождествлений

$$\nabla_{\vec{e}} : \text{St}(s(\vec{e})) \rightarrow \text{St}(t(\vec{e})), \quad (4.1)$$

такой что

$$\nabla_{\vec{e}}(\vec{e}) = \overleftarrow{e} \quad (4.2)$$

и

$$\nabla_{\overleftarrow{e}}^{-1} = \nabla_{\vec{e}}. \quad (4.3)$$

Тогда для любого пути $\vec{l} = [\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m]$ можно определить

$$\nabla_{\vec{l}} = \nabla_{\vec{e}_m} \circ \dots \circ \nabla_{\vec{e}_1} : \text{St}(s(\vec{l})) \rightarrow \text{St}(t(\vec{l})); \quad (4.4)$$

для замкнутого пути \vec{l} с $s(\vec{l}) = t(\vec{l}) = v$ имеется отображение монодромии

$$\nabla_{\vec{l}} : \text{St}(v) \rightarrow \text{St}(v). \quad (4.5)$$

Путь $\vec{l} = [\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m]$ называется *геодезическим*, если

$$\nabla_{\vec{e}_{i+1}}(\overleftarrow{e}_i) = \vec{e}_{i+2}, \quad (4.6)$$

очевидно, обратный путь $\overleftarrow{l} = [\overleftarrow{e}_m, \dots, \overleftarrow{e}_1]$ тогда тоже является геодезическим.

Нетрудно проверить (см. [6]), что все максимальные геодезические замкнуты; любые два инцидентные одной вершине полуребра определяют геодезическую однозначно с точностью до ориентации; любое ребро входит ровно в две различные геодезические или дважды в одну и ту же геодезическую. Следовательно, приклеивая к каждой замкнутой геодезической границу двумерной клетки, мы получим компактную поверхность S_∇ вместе с вложением графа Γ в нее. Очевидно, набор замкнутых геодезических определяет связность однозначно, поэтому вложение графа в поверхность всегда однозначно определяет связность.

Теперь начнем с графа Γ с сокращенной раскраской ребер

$$\varkappa : E(\Gamma) \rightarrow \Omega_0 \cup \Omega_+. \quad (4.7)$$

Мы хотим построить связность ∇ на Γ , удовлетворяющую следующему условию:

Для любой замкнутой геодезической существует такое i , что все ребра этой геодезической раскрашены цветами \underline{ij} с каким-нибудь j . (При этом j может быть разным для разных ребер этой геодезической.) (4.8)

Если ребро $e \in E$ окрашено цветом $\underline{ij} \in \Omega_+$ (т.е. $i \neq j$), то условие (4.8) определяет $\nabla_{\vec{e}}$ однозначно: остальные два инцидентные вершине $s(\vec{e})$ ребра окрашены цветами \underline{ik} и \underline{jk} при некотором k , а ребра, инцидентные вершине $t(\vec{e})$, окрашены цветами \underline{il} и \underline{jl} при некотором l . Поэтому $\nabla_{\vec{e}}$ должно отображать \underline{ik} -ребро в \underline{il} -ребро и \underline{jk} -ребро в \underline{jl} -ребро. Наоборот, при $i = j$ оба способа определить $\nabla_{\vec{e}}$ удовлетворяют (4.8). Таким образом, получается следующее утверждение.

Предложение 4.1. Пусть Γ — трехвалентный граф с сокращенной раскраской ребер \varkappa (4.7), удовлетворяющей условию (3.16).

1) Существует взаимно-однозначное соответствие между вложениями графа Γ в компактную поверхность S вместе с раскрасками граней

$$\varphi : F(S) \rightarrow \{1, \dots, n\}, \quad (4.9)$$

порождающими \varkappa , и связностями на Γ , удовлетворяющими (4.8).

2) Связность ∇ на Γ , удовлетворяющая (4.8), определена однозначно на подграфе $\Delta(\varkappa)$ и может быть определена произвольно на ребрах, окрашенных Ω_0 . Такая связность единственна тогда и только тогда, когда $\Gamma = \Delta(\varkappa)$.

Как следствие мы получаем предложение 3.4.

Теперь докажем предложение 3.5. Рассмотрим раскраску

$$\mu : E(\Gamma) \rightarrow \Omega, \quad (4.10)$$

определенную раскраской \varkappa (4.7) и циклом $\eta \in H_1(\Delta(\varkappa), \mathbb{Z}_2)$. Напомним (см предложение 3.3), что μ получается из \varkappa перекраской ребер цикла η из \underline{ij} в \overline{ij} . Раскраска μ в свою очередь определяет значения $a_{\nu(v)}$ для вершин графа согласно формуле (3.22). Рассмотрим вложение графа Γ в компактную поверхность S и раскраску граней φ (4.9), удовлетворяющую (3.28). Цикл η является суммой простых циклов; выберем один

из этих простых циклов c и зафиксируем на нем какую-нибудь ориентацию. Рассмотрим небольшую окрестность S_c цикла c на поверхности S ; обозначим пересечение грани $f \in F(S)$ с S_c через $\bar{f} = f \cap S_c$. Для каждого ребра \vec{e} цикла \vec{c} рассмотрим две грани $f', f'' \in F(S)$, инцидентные ребру e ; обозначим $W_e = \bar{f}' \cup \bar{f}''$. Поскольку $e \in \eta$, $\mu(e) \in \Omega_-$, так что $\varphi(f') \neq \varphi(f'')$, пусть, скажем, $\varphi(f') > \varphi(f'')$. Тогда выберем ориентацию на W_e таким образом, чтобы ориентация \vec{e} индуцировалась бы ориентацией f' .

Возьмем произвольную вершину v цикла c и рассмотрим три инцидентные v полуребра e_1, e_2 и e_3 и три сходящиеся в v грани f_1, f_2 и f_3 , так что e_m не инцидентна \bar{f}_m при $m = 1, 2, 3$. Пусть $e_1, e_2 \in c$ и $e_3 \notin c$, тогда $W_{e_1} \cap W_{e_2} = \bar{f}_3$. Очевидно, что определенные нами ориентации на W_{e_1} и W_{e_2} совпадают на \bar{f}_3 тогда и только тогда, когда $\bar{a}_{\{\mu(e_1)\mu(e_2)\mu(e_3)\}} = 1$, и эти ориентации противоположны при $\bar{a}_{\{\mu(e_1)\mu(e_2)\mu(e_3)\}} = -1$. Следовательно, окрестность S_c ориентируема тогда и только тогда, когда c содержит четное количество отрицательных вершин, что и доказывает предложение 3.5.

Тем самым мы доказали, что если хотя бы для одного цикла $c \in H_1(\Delta(\varkappa), \mathbb{Z}_2)$ произведение (3.26) отрицательно, то поверхность S неориентируема. В предыдущем разделе мы назвали такую раскраску неориентируемой. К сожалению, ориентируемая раскраска также может иногда порождаться и вложением графа в неориентируемую поверхность. Однако вложения в ориентируемые поверхности нетрудно перечислить.

Предложение 4.2. Пусть Γ — трехвалентный граф с сокращенной ориентируемой раскраской ребер \varkappa (3.18). Тогда имеется ровно

$$2^{b_0(\Delta(\varkappa))-1} \quad (4.11)$$

различных связностей ∇ на графе Γ , удовлетворяющих (4.8) и таких, что поверхность S_∇ ориентируема.

Следствие 4.1. Имеется ровно

$$2^{b_0(\Delta)} \quad (4.12)$$

различных структур ленточного графа (вместе с раскраской граней) на Γ , порождающих раскраску ребер \varkappa .

Напомним, что структура ленточного графа \mathcal{D} на графе Γ представляет собой набор циклических перестановок δ_v полуребер из $\text{St}(v)$ для всех вершин графа:

$$\mathcal{D} = \{\delta_v : \text{St}(v) \rightarrow \text{St}(v) , \delta_v \text{ циклическая перестановка} , v \in V(\Gamma)\} \quad (4.13)$$

Структура ленточного графа \mathcal{D} определяет вложение графа в ориентируемую поверхность S вместе с выбором стороны этой поверхности (т.е. ориентации) и однозначно определяется этими данными. Поэтому \mathcal{D} определяет связность $\nabla_{\mathcal{D}}$ on Γ ; противоположная структура ленточного графа $\mathcal{D}^{-1} = \{\delta_v^{-1} , v \in V(\Gamma)\}$, соответствующая выбору другой стороны той же поверхности (т.е. смены ориентации) определяет то же самое вложение и, следовательно, ту же самую связность $\nabla_{\mathcal{D}} = \nabla_{\mathcal{D}^{-1}}$. Циклы δ_v для смежных вершин антисопряжены связностью: для ориентированного ребра \vec{e}

$$\delta_{t(\vec{e})} = \nabla_{\vec{e}} \delta_{s(\vec{e})}^{-1} \nabla_{\vec{e}}^{-1}. \quad (4.14)$$

Обратное, очевидно, также верно: любая структура ленточного графа \mathcal{D} , для всех ребер удовлетворяющая (4.14), определяет в точности вложение S_{∇} .

Для каждой вершины $v \in V(\Gamma)$ обозначим через \mathcal{J}_v множество циклических упорядочений $\text{St}(v)$; для трехвалентного графа \mathcal{J}_v состоит в точности из двух элементов. Определим действие ∇_* связности ∇ на \mathcal{J} в соответствии с (4.14):

$$\nabla_{\vec{e}*} : \mathcal{J}_{s(\vec{e})} \rightarrow \mathcal{J}_{t(\vec{e})} \quad (4.15)$$

$$\nabla_{\vec{e}*}(\delta) = \nabla_{\vec{e}} \delta^{-1} \nabla_{\vec{e}}^{-1}. \quad (4.16)$$

Тогда для любого ребра $e \in E(\Gamma)$ композиция $\nabla_{\vec{e}*} \circ \nabla_{\vec{e}}^{-1}$ является тождественным отображением $\mathcal{J}_{s(\vec{e})}$. Теперь для любого пути $\vec{l} = [\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m]$ можно определить

$$\nabla_{\vec{l}*} = \nabla_{\vec{e}_m*} \circ \dots \circ \nabla_{\vec{e}_1*} : \mathcal{J}_{s(\vec{l})} \rightarrow \mathcal{J}_{t(\vec{l})}; \quad (4.17)$$

для замкнутого пути \vec{l} with $s(\vec{l}) = t(\vec{l}) = v$ имеется отображение монодромии

$$\nabla_{\vec{l}*} : \mathcal{J}_v \rightarrow \mathcal{J}_v. \quad (4.18)$$

Связность ∇ называется *плоской*,¹ если для любого замкнутого пути \vec{l} монодромия тривиальна:

$$\nabla_{\vec{l}^*} = \text{Id}_{\mathcal{J}_s(\vec{l})}. \quad (4.19)$$

Очевидно, что связность является плоской, если (4.19) выполняется для любого простого цикла \vec{l} .

Предложение 4.3. 1) Связность ∇ является плоской тогда и только тогда, когда поверхность S_∇ ориентируема.

2) Пусть ∇ — плоская связность на Γ . Две возможные структуры ленточного графа, возникающие из вложения графа Γ в S_∇ , определяются выбором циклического упорядочения $\delta_0 \in \mathcal{J}_{v_0}$ в любой одной фиксированной вершине $v_0 \in V(\Gamma)$; соответствующее циклическое упорядочение в любой другой вершине $v \in V(\Gamma)$ определяется как $\nabla_{\vec{l}^*}(\delta_0)$, где \vec{l} — произвольный путь, соединяющий v_0 и v (т. е. $v_0 = s(\vec{l})$ и $v = t(\vec{l})$).

Это предложение является тривиальным следствием наших определений; следующая лемма описывает продолжение плоской связности с подграфа на больший граф.

Лемма 4.1. 1) Пусть Γ' — связный подграф графа Γ . Рассмотрим ребро $e \in E(\Gamma)$, соединяющее две вершины подграфа Γ' , такое что $e \notin E(\Gamma')$ и e окрашено цветом $\underline{ii} \in \Omega_0$. Пусть ∇ — плоская связность на Γ' , удовлетворяющая (4.8). Тогда ∇ однозначно продолжается до плоской связности на графе $\Gamma' \cup \{e\}$ удовлетворяющей свойству (4.8).

2) Пусть Γ' и Γ'' — два связных подграфа Γ , $\Gamma' \cap \Gamma'' = \emptyset$. Рассмотрим ребро $e \in E(\Gamma)$, соединяющее вершину из Γ' с вершиной из Γ'' (так что $e \notin E(\Gamma')$, $e \notin E(\Gamma'')$), причем e окрашено цветом $\underline{ii} \in \Omega_0$. Пусть ∇ — плоская связность на $\Gamma' \cup \Gamma''$, удовлетворяющая (4.8). Тогда любой из двух возможных способов продолжения связности ∇ на e дает плоскую связность на $\Gamma' \cup \Gamma'' \cup \{e\}$, удовлетворяющей свойству (4.8).

Мы уже видели, что если ребро e окрашено Ω_0 , то любой из двух возможных способов определить ∇_e удовлетворяет (4.8), так что нам нужно только обеспечить плоскость продолжения. В случае, обсуждаемом во второй части леммы, e не входит ни в какой простой цикл графа

¹Отметим, что наше определение плоской связности не совпадает с приведенным в [6].

$\Gamma' \cup \Gamma'' \cup \{e\}$ и поэтому любое из двух возможных продолжений автоматически плоско. В случае первой части имеется две возможности: e может быть или не быть петлей. В случае петли плоскость означает, что $\nabla_{\vec{e}^*}$ тождественно, поэтому $\nabla_{\vec{e}}$ должно быть транспозицией двух полуребер петли. Очевидно, это дает плоскую связность на $\Gamma' \cup \{e\}$. Если же e не петля, то существует простой путь \vec{l} в графе Γ' , соединяющий концы ребра e . Для определенности ориентируем ребро \vec{e} таким образом, чтобы $s(\vec{e}) = s(\vec{l})$ и $t(\vec{e}) = t(\vec{l})$, тогда условие плоскости дает

$$\nabla_{\vec{e}^*} = \nabla_{\vec{l}^*}. \quad (4.20)$$

Поскольку ∇ плоско на Γ' , правая часть равенства не зависит от выбора пути \vec{l} , поэтому (4.20) определяет требуемое продолжение; нетрудно видеть, что $\nabla_{\vec{e}}$ определяется соотношением (4.20) однозначно.

Лемма 4.1 позволяет явно описать все возможные плоские связности на графе Γ , удовлетворяющие (4.8). Напомним, что мы уже получили, что на $\Delta(\varkappa)$ связность определена однозначно. ($\Delta(\varkappa)$ определялся как подграф, имеющий то же самое множество вершин $V(\Gamma)$, но содержащий только ребра, окрашенные Ω_+ .) Рассмотрим связную компоненту Γ' подграфа $\Delta(\varkappa)$; мы видели, что ∇ определена на Γ' однозначно. Возьмем другую связную компоненту Γ'' подграфа $\Delta(\varkappa)$, такую что существует ребро, соединяющее Γ' и Γ'' ; тогда вторая часть леммы 4.1 утверждает, что имеется ровно два продолжения ∇ на $\Gamma' \cup \Gamma'' \cup \{e\}$. Теперь возьмем граф $\Gamma' \cup \Gamma'' \cup \{e\}$ в качестве Γ' и найдем следующую связную компоненту подграфа $\Delta(\varkappa)$, связанную с Γ' ребром и повторим описанную процедуру до тех пор, пока мы не соединим все компоненты $\Delta(\varkappa)$. Ясно, что число возможных плоских связностей при этом будет

$$2^{b_0(\Delta(\varkappa))-1}. \quad (4.21)$$

Остается продолжить ∇ на все оставшиеся ребра, окрашенные Ω_0 ; но согласно первой части леммы 4.1, такое продолжение существует и однозначно. Тем самым мы доказали следующее утверждение.

Предложение 4.4. *Трехвалентный граф Γ с сокращенной ориентированной раскраской ребер*

$$\varkappa : E(\Gamma) \rightarrow \Omega_0 \cup \Omega_+, \quad (4.22)$$

удовлетворяющей (3.16), допускает в точности

$$2^{b_0(\Delta(\varkappa)) - 1} \quad (4.23)$$

плоских связностей, удовлетворяющих цветовому условию (4.8). Каждая такая плоская связность определяет вложение графа Γ в компактную ориентируемую поверхность S_∇ и раскраску граней

$$\varphi : F(S_\nabla) \rightarrow \{1, \dots, n\}, \quad (4.24)$$

порождающую раскраску граней \varkappa (т.е. удовлетворяющую (3.28)).

Поскольку каждое вложение соответствует в точности двум структурам ленточного графа, мы получаем следующее следствие.

Следствие 4.2. *Имеется ровно*

$$2^{b_0(\Delta(\varkappa))} \quad (4.25)$$

структур ленточного графа \mathcal{D} на Γ (вместе с раскраской граней φ (4.24)), порождающих сокращенную ориентируемую раскраску ребер \varkappa .

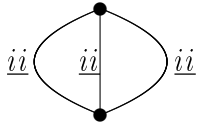
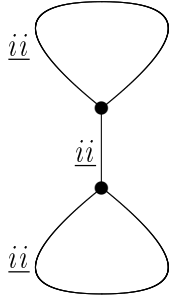
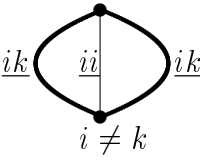
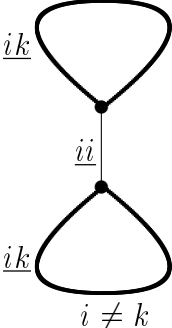
Теперь доказательство предложения 3.6 становится тривиальным. Группа $\text{Aut}(\Gamma, \varkappa)$ действует на множестве всех структур ленточного графа на Γ , а орбиты этого действия соответствуют всем возможным ленточным графам с раскраской граней (4.24), совместимой с раскраской \varkappa .

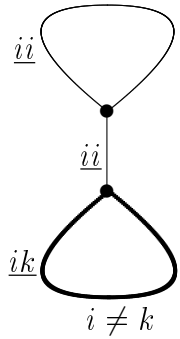
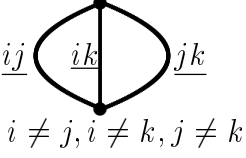
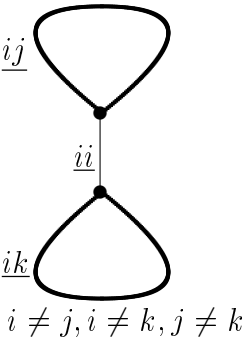
5. Первый член разложения.

Здесь мы приводим список всех раскрашенных графов рода 2, соответствующих первому слагаемому разложения (3.35). Имеются только два стабильных трехвалентных графа рода 2, причем нетрудно убедиться, что любая сокращенная раскраска этих графов ориентируема.

Ребра подграфа $\Delta(\varkappa)$ выделены жирными линиями. Конечно, нетрудно убедиться, что сумма выражений в правом столбце таблицы в соответствии с [4] есть в точности

$$\frac{1}{6} \left(\sum \frac{1}{\lambda_i} \right)^3 + \frac{1}{24} \sum \frac{1}{\lambda_i^3}. \quad (5.1)$$

граф Γ	$ \text{Aut}(\Gamma, \varkappa) $	$b_1(\Delta(\varkappa))$	$\frac{2^{b_1(\Delta(\varkappa))}}{ \text{Aut}(\Gamma, \varkappa) } \prod_{e \in E(\Gamma)} \sigma_{\varkappa}(e)$
	12	0	$\frac{1}{12} \frac{1}{\lambda_i^3}$
	8	0	$\frac{1}{8} \frac{1}{\lambda_i^3}$
	4	1	$\frac{1}{2} \frac{1}{\lambda_i} \frac{1}{(\lambda_i + \lambda_k)^2}$
	8	2	$\frac{1}{2} \frac{1}{\lambda_i} \frac{1}{(\lambda_i + \lambda_k)^2}$

граф Γ	$ \text{Aut}(\Gamma, \varkappa) $	$b_1(\Delta(\varkappa))$	$\frac{2^{b_1(\Delta(\varkappa))}}{ \text{Aut}(\Gamma, \varkappa) } \prod_{e \in E(\Gamma)} \sigma_{\varkappa(e)}$
 <p>$i \neq k$</p>	4	1	$\frac{1}{2} \frac{1}{\lambda_i^2} \frac{1}{\lambda_i + \lambda_k}$
 <p>$i \neq j, i \neq k, j \neq k$</p>	2	2	$\frac{2}{(\lambda_i + \lambda_j)(\lambda_i + \lambda_k)(\lambda_j + \lambda_k)}$
 <p>$i \neq j, i \neq k, j \neq k$</p>	4	2	$\frac{1}{\lambda_i(\lambda_i + \lambda_j)(\lambda_i + \lambda_k)}$

Литература

- [1] Artamkin I.V. Coloured graphs, Burgers equation and Jacobian conjecture, Preprint MPI-06-98 (2006).
- [2] Artamkin I.V. Asymptotic expansion of Gaussian integrals and Burgers equation. To appear, Preprint MPI (2007).
- [3] Bessis D., Itzykson C., Zuber J.-B. Quantum field theory techniques in graphical enumeration. Adv. Appl. Math. 1, 109-157 (1980).

- [4] Kontsevich M. Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function, *Commun. Math. Phys.* 147, 1-23 (1992).
- [5] Lando S., Zvonkine A. *Graphs on Surfaces and Their Applications*, Springer-Verlag, 2004.
- [6] Tyurin A.N. *Quantization, classical and quantum field theories and theta-functions*, CRM Monograph Series, 21. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.