ЭКСТЕМАЛЬНЫЕ МЕТРИКИ НА ТРИФОЛДАХ ДЕЛЬ ПЕЦЦО

Иван Чельцов и Константин Шрамов

Аннотация. В работе доказано существование метрики Кэлера-Эйнштейна на неособом сечении грассманиана $\mathrm{Gr}(2,5)\subset\mathbb{P}^9$ линейным подпространством коразмерности 3, и на гиперповерхности Ферма степени 6 в $\mathbb{P}(1,1,1,2,3)$. В работе также показано, что глобальный лог-канонический порог многообразия Мукая-Умемуры равен 1/2.

1. Введение

Пусть X — алгебраическое многообразие[1], которое имеет чем лог-канонические особенности (см. [24]), и пусть D — эффективный $\mathbb{Q}$-Картье $\mathbb{Q}$-дивизор на X. Число

$$\mathrm{lct}\big(X,D\big)=\sup\Big\{\lambda\in\mathbb{Q}\ \Big|\ \text{лог-пара }\big(X,\lambda D\big)\text{ лог-канонична}\Big\}\in\mathbb{Q}\cup\big\{+\infty\big\}$$

называется лог-каноническим порогом дивизора D (см. [10]).

Пусть X — многообразие Фано (см. [23]) с лог-терминальными особенностями.

Определение 1.1. Глобальный лог-канонический порог многообразия X есть число

$$\mathrm{lct}\big(X\big)=\inf\Big\{\mathrm{lct}\big(X,D\big)\ \Big|\ D\text{ — эффективный }\mathbb{Q}\text{-дивизор на }X\text{, такой что }D\sim_{\mathbb{Q}}-K_X\Big\}.$$

Группа $\mathrm{Pic}(X)$ свободна от кручения, так как X рационально связно (см. [33]). Имеем

$$\mathrm{lct}\big(X\big)=\sup\left\{\lambda\in\mathbb{Q}\ \left|\ \begin{array}{l}\text{лог-пара }\Big(X,\lambda D\Big)\text{ имеет лог-канонические особенности}\\ \text{для каждого эффективного }\mathbb{Q}\text{-дивизора }D\equiv -K_X\end{array}\right.\right\}.$$

Пример 1.2. Пусть X — неособая гиперповерхность в $\mathbb{P}^n$ степени $m\leqslant n\geqslant 2$. Тогда

$$\mathrm{lct}\big(X\big)=\frac{1}{n+1-m}$$

при $m<n$ (см. [5]). Имеем $\mathrm{lct}(\mathbb{P}^n)=1/(n+1)$. Пусть $n=m$. Тогда

$$1\geqslant\mathrm{lct}\big(X\big)\geqslant\frac{n-1}{n}$$

согласно работе [5]. В работах [4] и [15] показано, что если X общая, то

$$\mathrm{lct}\big(X\big)\geqslant\begin{cases}1,\ \text{если } n\geqslant 6,\\ 22/25,\ \text{если } n=5,\\ 16/21,\ \text{если } n=4,\\ 3/4,\ \text{если } n=3,\end{cases}$$

но выполнено равенство $\mathrm{lct}(X)=1-1/n$ если X содержит конус размерности $n-2$.

[1] Все многообразия считаются проективными, нормальными и определенными над полем $\mathbb{C}$.

Пример 1.3. Пусть X — рациональное однородное пространство, такое что

$$\mathrm{Pic}\big(X\big) = \mathbb{Z}\big[D\big],$$

где D — обильный дивизор. Тогда $\mathrm{lct}(X) = 1/r$ (см. [21]), где $-K_X \sim rD$ и $r \in \mathbb{N}$.

Пример 1.4. Пусть X — неособая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1^{n+1}, d)$ степени $2d \geqslant 4$. Тогда

$$\mathrm{lct}\big(X\big) = \frac{1}{n+1-d}$$

при $d < n$ (см. [7, предложение 20]). Пусть $d = n$. В работе [15] показано, что

$$1 \geqslant \mathrm{lct}\big(X\big) \geqslant \frac{2n-1}{2n},$$

но $\mathrm{lct}(X) = 1$ если X общая и $n \geqslant 3$ (см. [4]). Пусть $n = 3$. Тогда

$$\mathrm{lct}\big(X\big) \in \left\{\frac{5}{6}, \frac{43}{50}, \frac{13}{15}, \frac{33}{38}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \frac{9}{10}, \frac{11}{12}, \frac{13}{14}, \frac{15}{16}, \frac{17}{18}, \frac{19}{20}, \frac{21}{22}, \frac{29}{30}, 1\right\}$$

согласно работам [4] и [15]. Все эти значения числа $\mathrm{lct}(X)$ реализуются.

Пример 1.5. В работе [9] показано, что выполнено равенство

$$\mathrm{lct}\Big(\mathbb{P}\big(a_0, a_1, \ldots, a_n\big)\Big) = \frac{a_0}{\sum_{i=0}^{n} a_i}$$

если $\mathbb{P}(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ хорошо сформировано (см. [22]) и $a_0 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n$.

Пример 1.6. Пусть X — квазигладкая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, a_1, \ldots, a_4)$ степени $\sum_{i=1}^{4} a_i$, имеющая терминальные особенности, где $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant a_4$. Тогда

$$-K_X \sim \mathcal{O}_{\mathbb{P}(1,\,a_1,\ldots\,a_4)}(1)\Big|_X,$$

а для (a_1, a_2, a_3, a_4) имеется 95 возможностей (см. [22]). Выполнены невенства

$$1 \geqslant \mathrm{lct}\big(X\big) \geqslant \begin{cases} 16/21, \text{ если } a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1, \\ 7/9, \text{ если } (a_1, a_2, a_3, a_4) = (1, 1, 1, 2), \\ 4/5, \text{ если } (a_1, a_2, a_3, a_4) = (1, 1, 2, 2), \\ 6/7, \text{ если } (a_1, a_2, a_3, a_4) = (1, 1, 2, 3), \\ 1 \text{ во всех оставшихся случаях,} \end{cases}$$

если X общая (см. [12], [15], [8]). Лог-канонический порог гиперповерхности

$$w^2 = t^3 + z^9 + y^{18} + x^{18} \subset \mathbb{P}\big(1, 1, 2, 6, 9\big) \cong \mathrm{Proj}\Big(\mathbb{C}\big[x, y, z, t, w\big]\Big)$$

равен $17/18$ (см. [12]), где $\mathrm{wt}(x) = \mathrm{wt}(y) = 1$, $\mathrm{wt}(z) = 2$, $\mathrm{wt}(t) = 6$, $\mathrm{wt}(w) = 9$.

Пример 1.7. Пусть X — неособая поверхность дель Пеццо. Из [13] следует, что

$$\mathrm{lct}\big(X\big)=\begin{cases}1, \text{ если } K_X^2=1 \text{ и } |-K_X| \text{ не содержит каспидальную кривую,}\\ 5/6, \text{ если } K_X^2=1 \text{ и } |-K_X| \text{ содержит каспидальную кривую,}\\ 5/6, \text{ если } K_X^2=2 \text{ и } |-K_X| \text{ не содержит таснодальную кривую,}\\ 3/4, \text{ если } K_X^2=2 \text{ и } |-K_X| \text{ содержит таснодальную кривую,}\\ 3/4, \text{ если } X \text{ является кубикой в } \mathbb{P}^3, \text{ не содержащей точек Эккарда,}\\ 2/3, \text{ если } X \text{ является кубикой в } \mathbb{P}^3 \text{ с точкой Эккарда, либо } K_X^2=4,\\ 1/2, \text{ если } X\cong\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1 \text{ или } K_X^2\in\{5,6\},\\ 1/3 \text{ в оставшихся случаях.}\end{cases}$$

Пусть $G\subset\mathrm{Aut}(X)$ — произвольная компактная подгруппа.

Определение 1.8. Глобальным G-инвариантным лог-каноническим порогом многообразия Фано X будем называть вещественное число $\mathrm{lct}(X,G)$, равное супремуму

$$\sup\left\{\lambda\in\mathbb{Q}\ \middle|\ \begin{array}{l}\text{лог-пара } \Big(X,\dfrac{\varepsilon}{n}\mathcal{D}\Big) \text{ лог-канонична для каждой } G\text{-инвариантной}\\ \text{линейной подсистемы } \mathcal{D}\subset\Big|-nK_X\Big| \text{ и каждого числа } n\in\mathbb{Z}_{>0}\end{array}\right\}.$$

Если многообразие X неособо, то выполнено равенство

$$\mathrm{lct}\big(X,G\big)=\alpha_G\big(X\big)$$

согласно [9, приложение A], где $\alpha_G(X)$ — инвариант, введенный в [31]. Отметим, что

$$\mathrm{lct}\big(X,G\big)=\sup\left\{\lambda\in\mathbb{Q}\ \middle|\ \begin{array}{l}\text{лог-пара } (X,\lambda D) \text{ лог-канонична для каждого}\\ \text{эффективного } G\text{-инвариантного } \mathbb{Q}\text{-дивизора } D\sim_{\mathbb{Q}}-K_X\end{array}\right\}.$$

в случае, когда $|G|<+\infty$. Очевидно, что $0\leqslant\mathrm{lct}(X)\leqslant\mathrm{lct}(X,G)\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$.

Пример 1.9. Простая группа $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{F}_7)$ является группой автоморфизмов квартики

$$x^3y+y^3z+z^3x=0\subset\mathbb{P}^2\cong\mathrm{Proj}\Big(\mathbb{C}[x,y,z]\Big),$$

что дает вложение $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{F}_7)\subset\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^2)$. Тогда $\mathrm{lct}(\mathbb{P}^2,\mathrm{PGL}(2,\mathbb{F}_7))=4/3$ (см. [29], [13]).

Пример 1.10. Пусть X — кубическая поверхность в $\mathbb{P}^3$, которая задана уравнением

$$x^3+y^3+z^3+t^3=0\subset\mathbb{P}^3\cong\mathrm{Proj}\Big(\mathbb{C}\big[x,y,z,t\big]\Big),$$

и пусть $G=\mathrm{Aut}(X)\cong\mathbb{Z}_3^3\rtimes\mathrm{S}_4$. Тогда $\mathrm{lct}(X,G)=4$ (см. [13]).

В работах [31], [28], [17] доказан следующий результат (см. [9, приложение A]).

Теорема 1.11. *Предположим, что X имеет фактор-особенности. Если*

$$\mathrm{lct}\big(X,G\big)>\frac{\dim\big(X\big)}{\dim\big(X\big)+1},$$

то многообразие X допускает орбифолдную метрику Кэлера–Эйнштейна.

Теорема 1.11 имеет многочисленные применения (см. примеры 1.2, 1.6, 1.10).

Пример 1.12. Пусть X — одно из следующих неособых многообразий Фано:

- гиперповерхность Ферма в $\mathbb{P}^n$ степени $n/2 \leqslant d \leqslant n$ (ср. пример 1.10);
- гладкое полное пересечение двух квадрик в $\mathbb{P}^5$, которое задано уравнениями
$$\sum_{i=0}^{5} x_i^2 = \sum_{i=0}^{5} \zeta^i x_i^2 = 0 \subseteq \mathbb{P}^5 \cong \mathrm{Proj}\Big(\mathbb{C}\big[x_0, \ldots, x_5\big]\Big),$$
где ζ — примитивный корень из единицы шестой степени;
- гиперповерхность в $\mathbb{P}(1^{n+1}, q)$ степени pq, которая задана уравнением
$$w^p = \sum_{i=0}^{5} x_i^{pq} \subseteq \mathbb{P}\big(1^{n+1}, q\big) \cong \mathrm{Proj}\Big(\mathbb{C}\big[x_0, \ldots, x_n, w\big]\Big),$$
таким что $pq - q \leqslant n$, где $\mathrm{wt}(x_0) = \ldots = \mathrm{wt}(x_n) = 1$, $\mathrm{wt}(w) = q \in \mathbb{N}$ и $p \in \mathbb{N}$;

и пусть $G = \mathrm{Aut}(X)$. Тогда G конечна, и $\mathrm{lct}(X, G) \geqslant 1$ (см. [31], [28]).

Числа $\mathrm{lct}(X)$ и $\mathrm{lct}(X, G)$ также играют важную роль в бирациональной геометрии.

Определение 1.13. Многообразие X бирационально сверхжестко если

- выполнено равенство $\mathrm{rk}\,\mathrm{Pic}(X) = 1$,
- многообразие X имеет $\mathbb{Q}$-факториальные и терминальные особенности,
- не существует доминантного рационального отображения $\rho\colon X \dashrightarrow Y$ с рационально связными слоями, такого что $0 \neq \dim(Y) < \dim(X)$,
- не существует бирационального отображения $\rho\colon X \dashrightarrow Y$, такого что Y имеет терминальные $\mathbb{Q}$-факториальные особенности и $\mathrm{rk}\,\mathrm{Pic}(Y) = 1$,
- группы $\mathrm{Bir}(X)$ и $\mathrm{Aut}(X)$ совпадают.

Бирационально сверхжесткие многообразия Фано нерациональны (см. [6]).

Пример 1.14. Следующие неособые многообразия Фано бирационально сверхжестки:

- общая гиперповерхность в $\mathbb{P}^n$ степени $n \geqslant 4$ (см. [30]);
- общая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1^{n+1}, n)$ степени $2n \geqslant 6$ (см. [4]).

Следующий результат доказан в работе [4].

Теорема 1.15. *Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_r$ — произвольные бирационально сверхжесткие многообразия Фано, такие что $\mathrm{lct}(X_1) \geqslant 1, \mathrm{lct}(X_2) \geqslant 1, \ldots, \mathrm{lct}(X_r) \geqslant 1$. Тогда*

- *многообразие $X_1 \times \ldots \times X_r$ нерационально и*
$$\mathrm{Bir}\Big(X_1 \times \ldots \times X_r\Big) = \mathrm{Aut}\Big(X_1 \times \ldots \times X_r\Big),$$
- *для каждого рационального доминантного отображения $\rho\colon X_1 \times \ldots \times X_r \dashrightarrow Y$, чей общий слой рационально связен, существует коммутативная диаграмма*
$$\begin{tikzcd} X_1 \times \ldots \times X_r \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, dashed, "\rho"] & \\ X_{i_1} \times \ldots \times X_{i_k} \arrow[r, dashed, "\xi"'] & Y \end{tikzcd}$$
для некоторого подмножества $\{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, \ldots, r\}$, где ξ — бирациональное отображение, а отображение π — естественная проекция.

Теорема 1.15 может быть применена к гиперповерхностям из примеров 1.2 и 1.14.

Определение 1.16. Многообразие X G-бирационально сверхжестко если

- G-инвариантная подгруппа группы $\mathrm{Cl}(X)$ изоморфна группе $\mathbb{Z}$,
- многообразие X имеет терминальные особенности,
- не существует такого доминантного G-эквивариантного рационального отображения $\rho\colon X \dashrightarrow Y$ с рационально связными слоями, что $0 \neq \dim(Y) < \dim(X)$,
- не существует такого небирегулярного G-эквивариантного бирационального отображения $\rho\colon X \dashrightarrow Y$, что многообразие Y имеет терминальные особенности, а G-инвариантная подгруппа группы $\mathrm{Cl}(Y)$ изоморфна группе $\mathbb{Z}$.

Из доказательства теоремы 1.15 вытекает следующий результат (см. [13]).

Теорема 1.17. *Пусть X_i — многообразие Фано, и пусть $G_i \subset \mathrm{Aut}(X_i)$ — конечная подгруппа, такая что многообразие Фано X_i является G_i-бирационально сверхжестким, и выполнено неравенство $\mathrm{lct}(X_i, G_i) \geqslant 1$ при $i = 1, \ldots, r$. Тогда*

- *многообразие $X_1 \times \ldots \times X_r$ не является $G_1 \times \ldots \times G_r$-рациональным;*
- *каждый $G_1 \times \ldots \times G_r$-эквивариантный бирациональный автоморфизм многообразия $X_1 \times \ldots \times X_r$ является бирегулярным;*
- *для каждого $G_1 \times \ldots \times G_r$-эквивариантного рационального доминантного отображения $\rho\colon X_1 \times \ldots \times X_r \dashrightarrow Y$, чей общий слой является рационально связным многообразием, существует коммутативная диаграмма*

$$\begin{tikzcd} X_1 \times \ldots \times X_r \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, dashed, "\rho"] & \\ X_{i_1} \times \ldots \times X_{i_k} \arrow[r, dashed, "\xi"'] & Y \end{tikzcd}$$

для некоторого подмножества $\{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, \ldots, r\}$, где ξ является бирациональным отображением, а π является естественной проекцией.

Многообразия, удовлетворяющие условиям теоремы 1.17, существуют.

Пример 1.18. Простая группа $\mathfrak{A}_6$ является группой автоморфизмов кривой

$$10x^3y^3 + 9zx^5 + 9zy^5 + 27z^6 = 45x^2y^2z^2 + 135xyz^4 \subset \mathbb{P}^2 \cong \mathrm{Proj}\Big(\mathbb{C}\big[x, y, z\big]\Big),$$

что индуцирует вложение $\mathfrak{A}_6 \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^2)$. Поверхность $\mathbb{P}^2$ является $\mathfrak{A}_6$-бирационально сверхжесткой, и $\mathrm{lct}(\mathbb{P}^2, \mathfrak{A}_6) = 2$ (см. [13]). По теореме 1.17, существует индуцированное вложение $\mathfrak{A}_6 \times \mathfrak{A}_6 \cong \Omega \subset \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^4)$, такое что Ω не сопряжена подгруппам в $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^4)$.

Теперь мы рассмотрим *почти бирационально сверхжесткие* многообразия Фано.

Определение 1.19. Многообразие X бирационально жестко если

- выполнено равенство $\mathrm{rk}\,\mathrm{Pic}(X) = 1$,
- многообразие X имеет $\mathbb{Q}$-факториальные и терминальные особенности,
- не существует рационального отображения $\rho\colon X \dashrightarrow Y$ с рационально связными слоями, такого что $0 \neq \dim(Y) < \dim(X)$,
- не существует бирационального отображения $\rho\colon X \dashrightarrow Y$, такого что Y имеет терминальные и $\mathbb{Q}$-факториальные особенности, $\mathrm{rk}\,\mathrm{Pic}(Y) = 1$, но $Y \not\cong X$.

Бирационально жесткие многообразие Фано нерациональны (см. [6]).

Определение 1.20. Пусть X бирационально жестко. Подмножество $\Gamma \subset \mathrm{Bir}(X)$ откручивает все максимальные особенности, если для каждой линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии X, не имеющей неподвижных компонент, существует $\xi \in \Gamma$, такое что особенности лог-пары $(X, \lambda\xi(\mathcal{M}))$ канонические, где $\lambda \in \mathbb{Q}$, такое что $K_X + \lambda\,\xi(\mathcal{M}) \equiv 0$.

Из бирациональной жесткости X и существования подмножества $\Gamma \subset \mathrm{Bir}(X)$, которое откручивает все максимальные особенности, следует, что $\mathrm{Bir}(X) = \langle \Gamma, \mathrm{Aut}(X)\rangle$.

Определение 1.21. Многообразие X называется универсально бирационально жестким, если для любого многообразия U многообразие $X \otimes \mathrm{Spec}(\mathbb{C}(U))$ бирационально жестко над полем рациональных функций $\mathbb{C}(U)$ многообразия U.

Отметим, что определение 1.19 очевидным образом обобщается на многообразия Фано, определенные над произвольным совершенным полем.

Определение 1.22. Предположим, что X универсально бирационально жестко. Подмножество $\Gamma \subset \mathrm{Bir}(X)$ универсально откручивает все максимальные особенности, если для любого многообразия U подмножество Γ откручивает все максимальные особенности на многообразии $X \otimes \mathrm{Spec}(\mathbb{C}(U))$.

Легко видеть, что любое подмножество в $\mathrm{Aut}(X)$ универсально откручивает все максимальные особенности, если многообразие X является бирационально сверхжестким.

Замечание 1.23. Предположим, что многообрфзие Фано X является бирационально жестким. Рассмотрим произвольное подмножество $\Gamma \subseteq \mathrm{Bir}(X)$, и предположим, дополнительно, что $\dim(X) \neq 1$. Из [25] следует, что следующие условия эквивалентны:

- подмножество Γ универсально откручивает все максимальные особенности;
- подмножество Γ откручивает все максимальные особенности, а $\mathrm{Bir}(X)$ счетна.

Пример 1.24. В обозначениях и предположениях примера 1.6, предположим, что гиперповерхность X общая. Тогда выполнены следующие утверждения:

- гиперповерхность X является универсально бирационально жесткой (см. [16]);
- существуют инволюции $\tau_1, \ldots, \tau_k \in \mathrm{Bir}(X)$, такие что последовательность групп
$$1 \longrightarrow \big\langle \tau_1, \ldots, \tau_k \big\rangle \longrightarrow \mathrm{Bir}\big(X\big) \longrightarrow \mathrm{Aut}\big(X\big) \longrightarrow 1$$
точна (см. [16], [14]), где $k \leqslant 5$, а $\langle \tau_1, \ldots, \tau_k\rangle$ — подгруппа, порожденная $\tau_1, \ldots, \tau_k$;
- $\langle \tau_1, \ldots, \tau_k\rangle$ универсально откручивает все макисмальные особенности (см. [16]).

В работе [12] доказано следующее обобщение теоремы 1.15.

Теорема 1.25. *Пусть $X_1, \ldots, X_r$ — универсально бирационально жесткие многообразия Фано, такие что* $\mathrm{lct}(X_1) \geqslant 1, \mathrm{lct}(X_2) \geqslant 1, \ldots, \mathrm{lct}(X_r) \geqslant 1$. *Рассмотрим проекцию*
$$\pi_i \colon X_1 \times \cdots \times X_r \longrightarrow X_1 \times \ldots \times X_{i-1} \times \widehat{X_i} \times X_{i+1} \times \ldots \times X_r,$$
и обозначим символом $\mathcal{X}_i$ общий слой проекции π_i в схемном смысле. Тогда

- *многообразие $X_1 \times \ldots \times X_r$ нерационально и*
$$\mathrm{Bir}\Big(X_1 \times \ldots \times X_r\Big) = \Big\langle \mathrm{Bir}\big(\mathcal{X}_1\big), \ldots, \mathrm{Bir}\big(\mathcal{X}_r\big), \mathrm{Aut}\Big(X_1 \times \ldots \times X_r\Big)\Big\rangle,$$

- *для любого рационального доминантного отображения* $\rho\colon X_1 \times \ldots \times X_r \dashrightarrow Y$, *такого что общий слой отображения* ρ *рационально связен, существует подмножество* $\{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, \ldots, r\}$ *и коммутативная диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
X_1 \times \ldots \times X_r \arrow[r, dashed, "\sigma"] \arrow[d, "\pi"'] & X_1 \times \ldots \times X_r \arrow[dr, dashed, "\rho"] & \\
X_{i_1} \times \ldots \times X_{i_k} \arrow[rr, dashed, "\xi"'] & & Y
\end{tikzcd}$$

где π *— естественная проекция, а* ξ *и* σ *— бирациональные отображения.*

Следствие 1.26. *Предположим, что существует подгруппа* $\Gamma_i \subseteq \mathrm{Bir}(X_i)$*, универсально откручивающая все максимальные особенности, и* $\mathrm{lct}(X_i) \geqslant 1$ *для* $i = 1, \ldots, r$*. Тогда*

$$\mathrm{Bir}\Big(X_1 \times \ldots \times X_r\Big) = \Big\langle \prod_{i=1}^{r} \Gamma_i,\ \mathrm{Aut}\Big(X_1 \times \ldots \times X_r\Big)\Big\rangle.$$

В частности, мы получаем следующий пример с помощью примеров 1.6 и 1.24.

Пример 1.27. Пусть X — достаточно общая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1,1,4,5,10)$ степени 20. Тогда существует точная последовательность групп

$$1 \longrightarrow \prod_{i=1}^{m} \Big(\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2\Big) \longrightarrow \mathrm{Bir}\Big(\underbrace{X \times \ldots \times X}_{m\ \text{сомножителей}}\Big) \longrightarrow \mathfrak{S}_m \longrightarrow 1,$$

где $\mathfrak{S}_m$ — группа перестановок, а $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ — бесконечная группа диэдра.

Пусть V — неособое трёхмерное многообразие Фано (см. [23]), такое что $-K_V \sim 2H$, где H — обильный дивизор Картье на V, который не делится в группе $\mathrm{Pic}(V)$.

Замечание 1.28. Многообразие V принято называть неособым трифолдом дель Пеццо, поскольку общий элемент в $|H|$ является неособой поверхностью дель Пеццо.

Известно, что V является одним из следующих многообразий:

- трифолд V_1, то есть гиперповерхность в $\mathbb{P}(1,1,1,2,3)$ степени 6;
- трифолд V_2, то есть гиперповерхность в $\mathbb{P}(1,1,1,1,2)$ степени 4;
- трифолд V_3, то есть кубическая гиперповерхность в $\mathbb{P}^3$;
- трифолд V_4, то есть полное пересечение двух квадрик в $\mathbb{P}^5$;
- трифолд V_5, то есть сечение грассманиана $\mathrm{Gr}(2,5) \subset \mathbb{P}^9$ линейным подпространством коразмерности 3 (откуда следует, что все такие трифолды изоморфны);
- трифолд W, то есть дивизор на $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ бистепени $(1,1)$;
- трифолд V_7, или раздутие $\mathbb{P}^3$ в точке;
- прямое произведение $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$;

а в работе [9] было показано, что выполнено равенство

$$\mathrm{lct}\big(V\big) = \begin{cases} 1/4, & \text{если } V \text{ является раздутием } \mathbb{P}^3 \text{ в точке,} \\ 1/2, & \text{в оставшихся случаях.} \end{cases}$$

Замечание 1.29. Про метрики Кэлера-Эйнштейна на V известно следующее:

- на V_7 не существует метрики Кэлера–Эйнштейна (см. [32]);

- на V_4 существует метрика Кэлера–Эйнштейна (см. [11], ср. пример 1.12);
- на трифолдах W и $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ существуют метрики Кэлера–Эйнштейна, так как их группы автоморфизмов действуют транзитивно (см. теорему 1.11);
- существуют примеры трифолдов $V_2 \subset \mathbb{P}(1,1,1,1,2)$ и $V_3 \subset \mathbb{P}^4$ с большими группами симметрий (см. пример 1.12), обладающих метриками Кэлера–Эйнштейна.
- вопрос существования метрик Кэлера-Эйнштейна на трифолдах V_1 и V_5 в литературе пока не рассматривался (ср. замечание перед [11, Theorem 3.2]).

Основная цель настоящей работы — доказать следующие два утверждения.

Теорема 1.30. *Пусть G — максимальная компактная подгруппа в* $\mathrm{Aut}(V_5)$. *Тогда*

$$\mathrm{lct}\big(V_5,\ G\big) = 5/6.$$

Теорема 1.31. *Пусть V_1 — гиперповерхность в* $\mathbb{P}(1,1,1,2,3)$*, заданная уравнением*

$$w^2 = t^3 + x^6 + y^6 + z^6 \subset \mathbb{P}\big(1,1,1,2,3\big) \cong \mathrm{Proj}\Big(\mathbb{C}\big[x,y,z,t,w\big]\Big),$$

где $\mathrm{wt}(x) = \mathrm{wt}(y) = \mathrm{wt}(z) = 1$, $\mathrm{wt}(t) = 2$ *и* $\mathrm{wt}(w) = 3$. *Тогда* $\mathrm{lct}(V, \mathrm{Aut}(V_1)) \geqslant 1$.

Отметим, что из теоремы 1.11 следует существование метрики Кэлера-Эйнштейна на трифолде V_5 и на гиперповерхности Ферма в $\mathbb{P}(1,1,1,2,3)$ степени 6.

Замечание 1.32. Пусть V_1 — некоторая неособая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1,1,1,2,3)$ степени 6. Предположим, что $\mathrm{lct}(V_1, G) \geqslant 1$, где G — подгруппа в $\mathrm{Aut}(V_1)$. Тогда

- в линейной системе $|H|$ нет G-инвариантных поверхностей,
- в $|H|$ нет G-инвариантных пучков (ср. доказательство [29, Theorem 1.2]),
- многообразие V_1 является G-бирационально сверхжестким (см. [1], [2]).

Структура работы такова:

- в главе 2 приводятся вспомогательные утверждения;
- в главе 3 доказывается теорема 1.31;
- в главе 4 доказывается теорема 1.30;
- в главе 5 изучается многообразие Мукая–Умемуры.

Мы выражаем благодарность А. Кузнецову за полезные обсуждения.

2. Предварительные сведения

Пусть X — многообразие, имеющее лог-терминальные особенности. Рассмотрим дивизор $B_X = \sum_{i=1}^{r} a_i B_i$, где B_i — неприводимый дивизор Вейля на X, а a_i — неотрицательное рациональное число. Пусть B_X — дивизор $\mathbb{Q}$-Картье, и $B_i \neq B_j$ при $i \neq j$.

Рассмотрим бирациональный морфизм $\pi\colon \bar{X} \to X$, такой что $\bar{X}$ неособо. Положим

$$B_{\bar{X}} = \sum_{i=1}^{r} a_i \bar{B}_i,$$

гда $\bar{B}_i$ — собственный прообраз B_i на многообразии $\bar{X}$. Тогда

$$K_V + B_{\bar{X}} \equiv \pi^*\Big(K_X + B_X\Big) + \sum_{i=1}^{n} c_i E_i,$$

где $c_i \in \mathbb{Q}$, а E_i — исключительный дивизор морфизма π. Предположим, что дивизор

$$\left(\bigcup_{i=1}^{r} \bar{B}_i\right) \bigcup \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)$$

является дивизором с простыми нормальными пересечениями. Положим

$$B^{\bar{X}} = B_{\bar{X}} - \sum_{i=1}^{n} c_i E_i.$$

Определение 2.1. Лог-пара (X, B_X) имеет лог-канонические особенности (соответственно, лог-терминальные особенности), если

- выполнено неравенство $a_i \leqslant 1$ (соответственно, $a_i < 1$),
- выполнено неравенство $c_j \geqslant -1$ (соответственно, $c_j > -1$),

для всех $i = 1, \ldots, r$ и $j = 1, \ldots, n$.

Известно, что определение 2.1 не зависит от выбора морфизма $\pi\colon \bar{X} \to X$. Положим

$$\mathrm{LCS}\Big(X,\ B_X\Big) = \left(\bigcup_{a_i \geqslant 1} B_i\right) \bigcup \left(\bigcup_{c_i \leqslant -1} \pi\big(E_i\big)\right) \subsetneq X,$$

и назовем $\mathrm{LCS}(X,\ B_X)$ множеством лог-канонических особенностей лог-пары (X, B_X).

Определение 2.2. Собственное неприводимое подмногообразие $Y \subsetneq X$ называется центром лог-канонических особенностей лог-пары (X, B_X), если

- либо выполнено неравенство $a_i \geqslant 1$ и $Y = B_i$,
- либо выполнено неравенство $c_i \leqslant -1$ и $Y = \pi(E_i)$,

для некоторого выбора морфизма $\pi\colon \bar{X} \to X$.

Обозначим символом $\mathbb{LCS}(X, B_X)$ множество, состоящее из всех центров лог-канонических особенностей лог-пары (X, B_X). Тогда

$$Y \in \mathbb{LCS}\Big(X, B_X\Big) \Longrightarrow Y \subseteq \mathrm{LCS}\Big(X, B_X\Big),$$

и $\mathbb{LCS}(X, B_X) = \varnothing \iff \mathrm{LCS}(X, B_X) = \varnothing \iff$ лог-пара (X, B_X) лог-терминальна.

Замечание 2.3. Аналогичные конструкции и обозначения можно использовать для пар вида $(X, \lambda\mathcal{D})$, где $\mathcal{D}$ — линейная система, и λ — неотрицательное рациональное число.

На множестве $\mathrm{LCS}(X, B_X)$ можно ввести структуру схемы (см. [28], [10]). Положим

$$\mathcal{I}\Big(X, B_X\Big) = \pi_*\Big(\sum_{i=1}^{n} \lceil c_i \rceil E_i - \sum_{i=1}^{r} \lfloor a_i \rfloor \bar{B}_i\Big),$$

и пусть $\mathcal{L}(X, B_X)$ — подсхема, ассоциированная с пучком идеалов $\mathcal{I}(X, B_X)$.

Определение 2.4. Для данной лог-пары (X, B_X) будем говорить, что

- $\mathcal{L}(X, B_X)$ — подсхема лог-канонических особенностей лог-пары (X, B_X),
- пучок идеалов $\mathcal{I}(X, B_X)$ — пучок множительных идеалов лог-пары (X, B_X).

Из конструкции подсхемы $\mathcal{L}(X, B_X)$ немедленно следует, что

$$\mathrm{Supp}\Big(\mathcal{L}\big(X, B_X\big)\Big) = \mathrm{LCS}\Big(X, B_X\Big) \subset X.$$

Следующий результат называется теоремой Шокурова об обращении в нуль (см. [10]) или теоремой Наделя об обращении в нуль (см. [26, Theorem 9.4.8]).

Теорема 2.5. *Пусть H — численно эффективный и объемный $\mathbb{Q}$-дивизор на многообразии X, такой что $K_X + B_X + H \equiv D$, где $D \in \mathrm{Pic}(X)$. Тогда для всех $i \geqslant 1$*

$$H^i\Big(X,\ \mathcal{I}\big(X, B_X\big) \otimes D\Big) = 0.$$

Следующий результат принято называть теоремой о связности Шокурова.

Теорема 2.6. *Предположим, что дивизор $-(K_X + B_X)$ численно эффективен и объемен, тогда множество лог-канонических особенностей $\mathrm{LCS}(X, B_X)$ связно.*

Доказательство. Из теоремы 2.5 следует, что последовательность

$$\mathbb{C} = H^0\Big(\mathcal{O}_X\Big) \longrightarrow H^0\Big(\mathcal{O}_{\mathcal{L}(X, B_X)}\Big) \longrightarrow H^1\Big(\mathcal{I}\big(X, B_X\big)\Big) = 0$$

точна, если дивизор $-(K_X + B_X)$ численно эффективен и объемен, откуда следует, что

$$\mathrm{LCS}\Big(X,\ B_X\Big) = \mathrm{Supp}\Big(\mathcal{L}\big(X,\ B_X\big)\Big)$$

связно в случае, когда дивизор $-(K_X + B_X)$ численно эффективен и объемен. $\square$

Утверждение теоремы 2.6 можно обобщить следующим образом (см. [10, лемма 5.7]).

Теорема 2.7. *Пусть $\psi\colon X \to Z$ — морфизм. Тогда множество*

$$\mathrm{LCS}\Big(\bar{X},\ B^{\bar{X}}\Big)$$

связно в окрестности каждого слоя морфизма $\psi \circ \pi$, если выполнены следующие условия

- *морфизм ψ сюръективен и имеет связные слои,*
- *дивизор $-(K_X + B_X)$ является ψ-численно эффективным и ψ-объемным.*

Следующий результат также является следствием теоремы 2.5 (см. [28, Theorem 4.1]).

Лемма 2.8. *Предположим, что дивизор $-(K_X + B_X)$ численно эффективен и объемен, и выполнено равенство $\dim(\mathrm{LCS}(X, B_X)) = 1$. Тогда*

- *$\mathrm{LCS}(X, B_X)$ является объединением гладких рациональных кривых,*
- *$\mathrm{LCS}(X, B_X)$ не содержит циклов состоящих из кривых,*
- *пересекающиеся компоненты $\mathrm{LCS}(X, B_X)$ пересекаются трансверсально.*

Пусть P — точка многообразия X. Рассмотрим некоторый эффективный дивизор

$$\Delta = \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i B_i \sim_{\mathbb{Q}} B_X,$$

где ε_i — неотрицательное рациональное число. Предположим, что

- дивизор Δ является $\mathbb{Q}$-Картье дивизором,
- выполнена эквивалентность $\Delta \sim_{\mathbb{Q}} B_X$,
- особенности лог-пары (X, Δ) являются лог-каноническими в точке $P \in X$.

Замечание 2.9. Пусть лог-пара (X, B_X) не лог-канонична в точке $P \in X$. Положим

$$\alpha = \min\left\{\frac{a_i}{\varepsilon_i} \;\Big|\; \varepsilon_i \neq 0\right\},$$

где число α корректно определено. Тогда $\alpha < 1$, а особенности лог-пары

$$\left(X,\ \sum_{i=1}^{r} \frac{a_i - \alpha\varepsilon_i}{1-\alpha} B_i\right)$$

не является лог-каноническими в точке $P \in X$. При этом

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{a_i - \alpha\varepsilon_i}{1-\alpha} B_i \sim_{\mathbb{Q}} B_X \sim_{\mathbb{Q}} \Delta,$$

но по крайней мере одна неприводимая компонента дивизора $\mathrm{Supp}(\Delta)$ не содержится в

$$\mathrm{Supp}\left(\sum_{i=1}^{r} \frac{a_i - \alpha\varepsilon_i}{1-\alpha} B_i\right).$$

Следующий результат — простое следствие замечания 2.9.

Лемма 2.10. *Пусть X — неособое многообразие Фано, такое что* $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}[H]$ *для некоторого дивизора $H \in \mathrm{Pic}(X)$, пусть $G \subset \mathrm{Aut}(X)$ — компактная подгруппа. Тогда*

$$\mathrm{lct}\Big(X,\ G\Big) \geqslant \lambda,$$

где λ — рациональное число, такое что выполнены следующие условия:

- *выполнено* $\mathrm{lct}(X, D) \geqslant \lambda/n$ *для каждого G-инвариантного дивизора $D \in |nH|$;*
- *выполнено* $\mathrm{lct}(X, \mathcal{D}) \geqslant \lambda/n$ *для каждой G-инвариантной подсистема $\mathcal{D} \subset |nH|$, которая не имеет неподвижных компонент.*

Доказательство. Предположим, что $\mathrm{lct}(X, G) < \lambda$, но выполнены следующие условия:

- выполнено $\mathrm{lct}(X, D) \geqslant \lambda/n$ для каждого G-инвариантного дивизора $D \in |nH|$;
- выполнено $\mathrm{lct}(X, \mathcal{D}) \geqslant \lambda/n$ для каждой G-инвариантной подсистема $\mathcal{D} \subset |nH|$, которая не имеет неподвижных компонент.

Из неравенства $\mathrm{lct}(X, G) < \lambda$ следует, что при некотором n найдётся G-инвариантная линейная подсистема система $\mathcal{D} \subset |nH|$, такая что лог-пара

$$\left(X, \frac{\lambda}{n}\mathcal{D}\right)$$

не является лог-каноничной. Положим $D = F + \mathcal{M}$, где F — фиксированная часть линейной системы $\mathcal{D}$, а $\mathcal{M}$ — подвижная G-инвариантная линейная система.

Пусть $M_1, \ldots, M_r$ — общие дивизоры в $\mathcal{M}$ и $r \gg 0$. Тогда лог-пара

$$\left(X,\ \frac{\lambda}{n}\left(F + \frac{\sum_{i=1}^{r} M_i}{r}\right)\right)$$

не лог-канонична по [24, Theorem 4.8].

Так как $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}[H]$, то то $F \sim n_1 H$ и $\mathcal{M} \sim n_2 H$ при некоторых чисел $n_1 \in \mathbb{N} \ni n_2$, таких что $n_1 + n_2 = n$. Из замечания 2.9 следует, что лог-пара

$$\left(X,\ \frac{\lambda}{n_2 r}\sum_{i=1}^{r} M_i\right)$$

не является лог-каноничной, так как F является G-инвариантным. Тогда лог-пара

$$\left(X,\ \frac{\lambda}{n_2}\mathcal{M}\right)$$

не лог-канонична по [24, Theorem 4.8], что является противоречием. □

Следующее простое вычисление окажется полезным в главе 4.

Лемма 2.11. *Предположим, что* $\dim(X) = 3$. *Пусть* $C \subset X$ *— неприводимая и приведенная кривая, пусть* $P \in C$ *— некоторая точка, такая что*

$$\mathrm{Sing}\big(C\big) \not\ni P \notin \mathrm{Sing}\big(X\big),$$

пусть $L \subset X$ *— кривая, такая что* $P \notin \mathrm{Sing}(L)$, *пусть* D *— такой* $\mathbb{Q}$*-дивизор на трифолде* X, *что* $C \subset \mathrm{Supp}(D) \not\subset L$. *Предположим, что* L *и* C *касаются в* P. *Тогда*

$$\mathrm{mult}_P\Big(D \cdot L\Big) \geqslant 2\mathrm{mult}_C\big(D\big).$$

Доказательство. Пусть $\pi\colon \tilde{X} \to X$ — раздутие точки P, пусть E — исключительный дивизор раздутия π, пусть $\tilde{L}$, $\tilde{C}$ и $\tilde{D}$ — собственные прообразы на многообразии $\tilde{X}$ кривых L и C и дивизора D, соответственно. Тогда пересечение

$$\tilde{L} \cap \mathrm{Supp}\big(\tilde{D}\big)$$

содержит некоторую точку $\tilde{P} \in E$, так как L и C касаются в P. Тогда

$$\mathrm{mult}_P\Big(D\cdot L\Big) = \mathrm{mult}_P(D) + \mathrm{mult}_{\tilde{P}}\Big(\tilde{D}\cdot\tilde{L}\Big) \geqslant \mathrm{mult}_C(D) + \mathrm{mult}_{\tilde{P}}(\tilde{D}) \geqslant \mathrm{mult}_C(D) + \mathrm{mult}_{\tilde{C}}(D),$$

но $\mathrm{mult}_C(D) + \mathrm{mult}_{\tilde{C}}(D) = 2\mathrm{mult}_C(D)$. □

Мы будем использовать следующие обозначения: если $\mathcal{D}$ — линейная система на многообразии X, то $\varphi_{\mathcal{D}}$ обозначает рациональное отображение, заданное системой $\mathcal{D}$.

3. Двойной конус над поверхностью Веронезе

Пусть V — неособое трехмерное многообразие Фано, такое что $(-K_V)^3 = 8$ и

$$\mathrm{Pic}\big(V\big) = \mathbb{Z}\big[H\big],$$

где $H \in \mathrm{Pic}(V)$. Тогда V — гиперповерхность в $\mathbb{P}(1,1,1,2,3)$ степени 6.

Линейная система $|H|$ обладает базисной точкой $O \in V$ и задает отображение

$$\varphi_{|H|}\colon V \dashrightarrow \mathbb{P}^2,$$

чьи слои неприводима, а общий слой является эллиптической кривой.

Замечание 3.1. Мы будем называть подмногообразия V, заметаемые слоями рационального отображения $\varphi_{|H|}$, *вертикальными* подмногообразиями. Допуская некоторую вольность речи, мы будем применять этот эпитет также и к эффективным $\mathbb{Q}$-дивизорам.

Пусть $G \subset \mathrm{Aut}(V)$ — подгруппа. Отметим, что группа G конечна, ее действие продолжается на $\mathbb{P}(1,1,1,2,3)$, а замечание 2.9 влечет следующий результат.

Лемма 3.2. *Пусть D — произвольный эффективный и G-инвариантный $\mathbb{Q}$-дивизор на трифолде V, и $Z \subset \mathrm{LCS}(V, D)$. Тогда существует $\mathbb{Q}$-дивизор D на V, такой что*

- *дивизор D' эффективен и G-инвариантен и $D' \sim_{\mathbb{Q}} D$,*
- *подмногообразие Z содержится в подмножестве $\mathrm{LCS}(V, D')$,*
- *дивизор D' либо вертикален, либо не содержит вертикальных компонент.*

Предположим, что гиперповерхность V задана уравнением

$$w^2 = t^3 + P_6\big(x, y, z\big) \subset \mathbb{P}\big(1,1,1,2,3\big) \cong \mathrm{Proj}\Big(\mathbb{C}\big[x, y, z, t, w\big]\Big),$$

где $\mathrm{wt}(x) = \mathrm{wt}(y) = \mathrm{wt}(z) = 1$, $\mathrm{wt}(t) = 2$, $\mathrm{wt}(w) = 3$, и P_6 — однородный многочлен степени 6. Пусть $\tau \in \mathrm{Aut}(V)$, который действует как

$$\tau\colon \big(x, y, z, t, w\big) \mapsto \big(x, y, z, t, -w\big),$$

и пусть $\sigma \in \mathrm{Aut}(V)$, который действует как

$$\sigma\colon \big(x, y, z, t, w\big) \mapsto \big(x, y, z, \zeta t, w\big),$$

где ζ — нетривиальный кубический корень из 1. Отметим, что группа G естественным образом действует на $\mathbb{P}(|H|) \cong \mathbb{P}^2$. Более того, следующие условия эквивалентны:

- группа G действует на $\mathbb{P}(|H|) \cong \mathbb{P}^2$ без неподвижных точек;
- группа G действует на $\mathbb{P}(|H|) \cong \mathbb{P}^2$ без инвариантных прямых;
- в линейной системе $|H|$ нет G-инвариантных поверхностей;
- в $|H|$ нет G-инвариантных пучков (ср. доказательство [29, Theorem 1.2]);
- многообразие V является G-бирационально сверхжестким (см. [1], [2]).

Пусть $\mathcal{B}$ — линейная подсистема в $|-K_X|$, порожденная дивизорами

$$\lambda_0 x^2 + \lambda_1 y^2 + \lambda_2 z^2 + \lambda_3 xy + \lambda_4 xz + \lambda_5 yz = 0,$$

где $(\lambda_0, \ldots, \lambda_5) \in \mathbb{P}^5$. Утверждение теоремы 1.31 следует из следующего результата.

Теорема 3.3. *Выполнено неравенство $\mathrm{lct}(V, G) \geqslant 1$ если выполнено следующее:*

- *в линейной системе $\mathcal{B}$ нет G-инвариантных поверхностей;*
- *группа G содержит автоформизмы τ и σ.*

Докажем теорему 3.3. Предположим, что в $\mathcal{B}$ нет G-инвариантных поверхностей, группа G содержит автоформизмы τ и σ, но $\mathrm{lct}(V, G) < 1$. Тогда в $|H|$ нет G-инвариантных поверхностей, но существует G-инвариантный $\mathbb{Q}$-дивизор $D \sim_{\mathbb{Q}} -K_V$, такой что

$$\mathbb{LCS}\Big(V,\ \lambda D\Big) \neq \varnothing$$

для некоторого $1 > \lambda \in \mathbb{Q}$. Множество $\mathrm{LCS}(V, \lambda D)$ является G-инвариантным.

Лемма 3.4. *Множество $\mathbb{LCS}(V, \lambda D)$ не содержит дивизоров.*

Доказательство. Следствие равенства $\mathrm{Pic}(V) = \mathbb{Z}[H]$, неравенства $\lambda < 1$ и предположения о том, что в линейной системе $|H|$ нет G-инвариантных поверхностей. □

Лемма 3.5. *Множество $\mathbb{LCS}(V, \lambda D)$ не содержит кривых.*

Доказательство. Пусть $C \subset \mathrm{LCS}(V, \lambda D)$ явяелется G-инвариантной кривой. Тогда для любой точки $P \in C$ выполнено нераветнство $\mathrm{mult}_P D > 1/\lambda$. По лемме 3.2 можно предполагать, что $\mathrm{Supp}(D)$ либо вертикален, либо не содержит вертикальных компонент.

Из леммы 2.8 следует, что кривая C содержит невертикальную компоненту. Тогда

$$\deg\Big(\phi_{|H|}(C)\Big) \geqslant 3,$$

поксольку в линейной системе $\mathcal{B}$ нет G-инвариантных поверхностей.

Пусть S — общая поверхность в линейной системе $|H|$. Положим

$$S \cap C = \Big\{P_1, \ldots, P_s\Big\},$$

где $P_1, \ldots, P_s$ — различные точки. Тогда $s \geqslant 3$. Более того, выполнено строгое неравенство $s > 3$ в случае когда $O \in C$. Рассуждая аналогично, мы видим, что мы можем считать, что точки P_1, P_2, P_3 — различные точки, такие что

- $O \notin \{P_1, P_2, P_3\}$,
- $\phi_{|H|}(P_1), \phi_{|H|}(P_2), \phi_{|H|}(P_3)$ — различные точки.

Поверхность S является поверхностью дель Пеццо, выполнена эквивалентность

$$D\Big|_S \sim_{\mathbb{Q}} -2K_S,$$

и выполнено равенство $-K_S^2 = 1$. По построению, лог-пара $(S, \lambda D|_S)$ не лог-терминальна в точках P_1, P_2, P_3. Из теоремы 2.5 следует, что последовательность

$$\mathbb{C}^2 = H^0\Big(\mathcal{O}_S\big(-K_S\big)\Big) \longrightarrow H^0\Big(\mathcal{O}_{\mathcal{L}(S, \lambda D|_S)}\Big) \longrightarrow H^1\Big(\mathcal{I}\big(S,\ \lambda D\big|_S\big) \otimes \mathcal{O}_S\big(-K_S\big)\Big) = 0$$

точна, поскольку схема $\mathcal{L}(S, \lambda D|_S)$ нульмерна по лемме 3.4. В частности, носитель подсхемы $\mathcal{L}(S, \lambda D|_S)$ состоит не более чем из двух точек. Противоречие. ☐

Из теоремы 2.6 следует, что $\mathbb{LCS}(V, \lambda D)$ состоит из одной точки $P \in V$.

Лемма 3.6. *Выполнено равенство* $P = O$.

Доказательство. Предположим, что $P \neq O$. Тогда G-орбита точки P нетривиальна, так как по предположению нетривиальна G-орбита точки $\varphi_{|H|}(P)$. Противоречие. ☐

Пусть $\pi \colon \bar{V} \to V$ — раздутие точки O, пусть E — исключительный дивизор отображения π, пусть $\bar{D}$ — собственный прообраз дивизора D на $\bar{V}$. Тогда лог-пара

$$\Big(\bar{V},\ \lambda\bar{D} + \big(\lambda\mathrm{mult}_O(D) - 2\big)E\Big).$$

не лог-канонична в окрестности дивизора E. С другой стороны, легко видеть, что выполнено неравенство $\mathrm{mult}_O(D) \leqslant 2$, поскольку в противном случае $\mathrm{Supp}(\bar{D})$ содержал бы все слои эллиптического расслоения $\varphi_{|\pi^*(H)-E|}$. Значит, множество

$$\mathrm{LCS}\Big(\bar{V},\ \lambda\bar{D} + \big(\lambda\mathrm{mult}_O(D) - 2\big)E\Big)$$

содержит некоторое собственное G-инвариантное подмногообразие $Z \subsetneq E$ и не содежит подмногообразий, не содержащихся в поверхности $E \cong \mathbb{P}^2$. Тогда

$$Z \subset \mathrm{LCS}\Big(\bar{V}, \lambda\bar{D}\Big) \subsetneq E.$$

Лемма 3.7. *Выполнено равенство* $\dim(Z) = 0$.

Доказательство. Пусть $\dim(Z) \neq 0$. Пусть F — общая прямая в $E \cong \mathbb{P}^2$. Тогда

$$2 \geqslant \mathrm{mult}_O\big(D\big) = L \cdot \bar{D} \geqslant \deg(Z)\mathrm{mult}_Z\big(\bar{D}\big) > \frac{\deg(Z)}{\lambda},$$

откуда сразу следует, что G–инвариантная компонента подмногообразия Z является прямой. Но в $|H|$ нет G-инвариантных поверхностей. Противоречие. □

Итак, мы видим, что G-инвариантное множество $\mathrm{LCS}(\bar{V}, \lambda\bar{D})$ состоит из конечного числа точек. По теореме 2.7 множество $\mathrm{LCS}(Y, \lambda\bar{D})$ состоит из единственной точки, поскольку дивизор $-(K_Y + \lambda\bar{D})$ является π-обильным. Но группа G действует на поверхности E без неподвижных точек, поскольку в линейной систему $|H|$ нет G-инвариантных пучков. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 3.3.

4. Трифолд дель Пеццо степени 5

Пусть V_5 — неособое трехмерное многообразие Фано, такое что

$$\mathrm{Pic}\big(V_5\big) = \mathbb{Z}\big[H\big],$$

и $H^3 = 5$, где $H \in \mathrm{Pic}(V_5)$. Пусть $\mathcal{W} \cong \mathbb{C}^3$ — векторное пространство, снабжённое невырожденной квадратичной формой q. Тогда многообразие V_5 изоморфно пространству троек попарно ортогональных относительно формы q прямых (см. [23]).

Следствие 4.1. *На V_5 естественно действует группа $\mathrm{SO}_3(\mathbb{C})$, или $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.*

Замечание 4.2. Можно показать, что $\mathrm{Aut}(V_5) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$.

На V_5 имеется естественная $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$-эквивариантная стратификация. Имеем

$$V_5 = U \cup \Delta \cup C,$$

где U — открытая орбита, состоящая из троек попарно различных прямых, Δ — двумерная орбита, состоящая из троек прямых вида (l_1, l_1, l_2), где $q(l_1, l_1) = 0$ и $q(l_1, l_2) = 0$, а C — одномерная орбита, состоящая из троек прямых вида (l, l, l), где $q(l, l) = 0$.

Замечание 4.3. Выполнена эквивалентность $-K_{V_5} \sim 2H$.

Линейная система $|H|$ задает вложение $V_5 \subset \mathbb{P}^6$. При этом вложении, кривая C является рациональной кривой степени 6, а Δ заметается касательными к кривой C.

Лемма 4.4. *Выполнено равенство* $\mathrm{lct}(V_5, \Delta) = 5/6$.

Доказательство. Поверхность Δ неособа в точках $\Delta \setminus C$ и имеет особенность, локально изоморфную $T \times \mathbb{A}^1$, где T — росток каспидальной кривой, вдоль C. □

В частности, мы видим, что $\mathrm{lct}(V_5, \mathrm{SO}_3(\mathbb{C})) \leqslant 5/6$

Лемма 4.5. *Пусть $\mathcal{D} \subset |nH|$ является $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$-инвариантной линейной системой на многообразии V_5, такой что $\Delta \not\subset \mathrm{Bs}(\mathcal{D})$. Тогда выполнено неравенство* $\mathrm{lct}(X, \mathcal{D}) \geqslant 1/n$.

Доказательство. Пусть $\mathrm{lct}(X, \mathcal{D}) < 1/n$. Тогда существует $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$-инвариантное подмногообразие $Z \subsetneq X$, такое что

$$\mathrm{mult}_Z\big(D\big) > n,$$

где D — общий дивизор в линейной системе $\mathcal{D}$. Так как $\Delta \not\subset \mathrm{Bs}(\mathcal{D})$, то Z может быть только кривой C. Пусть P — достаточно общая точка кривой C, а L — касательная к кривой C в точке P. Тогда $L \not\subset \mathrm{Supp}(D)$. Имеем

$$2n = D \cdot L \geqslant \mathrm{mult}_P\Big(D \cdot L\Big) > 2n,$$

по лемме 2.11. Противоречие. □

Из лемм 2.10, 4.4 и 4.5 следует, что $\mathrm{lct}(V_5, \mathrm{SO}_3(\mathbb{C})) \geqslant 5/6$, откуда $\mathrm{lct}(V_5, \mathrm{SO}_3(\mathbb{C})) = 5/6$.

5. Многообразие Мукая–Умемуры

Пусть X — гладкое трехмерное многообразие Фано, такое что

$$\mathrm{Pic}\big(X\big) = \mathbb{Z}\big[-K_X\big],$$

выполнено равенство $-K_X^3 = 22$ и $\mathrm{Aut}(X) \cong \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$. Хорошо известно, что многообразие с данными свойствами единственно (см. [27] и [3]).

Лемма 5.1. *Выполнено равенство* $\mathrm{lct}(X) = 1/2$.

Доказательство. Пусть $U \subset \mathbb{C}[x, y]$ — подпространство однородных форм, имеющих степени 12. Отождествим $U \cong \mathbb{C}^{13}$ с естественным открытым аффинным подмножеством в $\mathbb{P}(U \oplus \mathbb{C}) \cong \mathbb{P}^{13}$, и отождествим $\mathbb{P}(U)$ с гиперплоскостью на бесконечности.

Естественное действие $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ на $\mathbb{C}[x, y]$ индуцирует действие на $\mathbb{P}(U \oplus \mathbb{C})$. Положим

$$\varphi = xy\Big(x^{10} - 11x^5y^5 - y^{10}\Big) \in U$$

и рассмотрим замыкание $\overline{\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \cdot [\varphi + 1]} \subset \mathbb{P}(U \oplus \mathbb{C})$. В работе [27] показано, что

$$X \cong \overline{\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \cdot [\varphi + 1]},$$

а естественное вложение $X \subset \mathbb{P}(U \oplus \mathbb{C}) \cong \mathbb{P}^{13}$ задаётся линейной системой $|-K_X|$.

Хорошо известно (см. [23, Theorem 5.2.13]), что действие группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ на многообразии X имеет следующие орбиты:

- трехмерная орбита $\Sigma_3 = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \cdot [\varphi + 1]$;
- двумерная орбита $\Sigma_2 = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \cdot [xy^{11}]$;
- одномерная орбита $\Sigma_1 = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \cdot [y^{12}]$.

Орбита Σ_3 открыта, орбита $\Sigma_1 \cong \mathbb{P}^1$ замкнута; при этом $\overline{\Sigma}_2 = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, и орбита Σ_2 не является ни открытой, но замкнутой. При этом $X \cap \mathbb{P}(U) = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, и $X = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$.

Положим $R = X \cap \mathbb{P}(U)$. Из работы [27] следует, что

- поверхность R заметается прямыми на $X \subset \mathbb{P}^{13}$,
- поверхность R содержит все прямые $X \subset \mathbb{P}^{13}$,
- для любых прямых $L_1 \subset R \supset L_2$, таких что $L_1 \neq L_2$, имеем $L_1 \cap L_2 = \varnothing$,
- поверхность R особа вдоль орбиты $\Sigma_1 \cong \mathbb{P}^1$,
- нормализация поверхности R изоморфна прямому произведению $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$,
- для каждой точки $P \in \Sigma_1$, поверхность R локально изоморфна поверхности

$$x^2 = y^3 \subset \mathbb{C}^3 \cong \mathrm{Spec}\Big(\mathbb{C}\big[x, y, z\big]\Big),$$

откуда следует, что $\mathrm{lct}(X, R) = 5/6$.

Структура поверхности R может быть описана явно. Имеем

$$\Sigma_2 = \left\{ \left[\left(ax+by\right)\left(cx+dy\right)^{11} \right] \;\middle|\; ad-bc=1 \right\} \subset \mathbb{P}\big(U\big),$$

откуда следует, что существует бирациональный морфизм $\nu\colon \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to R$, который является нормализацией поверхности R и может быть задан формулой

$$\nu\colon \big[a:b\big] \times \big[c:d\big] \mapsto \left[\left(ax+by\right)\left(cx+dy\right)^{11}\right] \in R.$$

Пусть V_5 — гладкое трехмерное многообразие Фано, такое что

$$-K_{V_5} \sim 2H$$

и $H^3=5$, где $H \in \mathrm{Pic}(V_5)$. Тогда $|H|$ индуцирует вложение $V_5 \subset \mathbb{P}^6$ (см. главу 4).

Пусть $L \cong \mathbb{P}^1$ — любая прямая на многообразии X. Тогда

$$\mathcal{N}_{L/X} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1).$$

Пусть $\alpha_L\colon U_L \to X$ — раздутие прямой L, и пусть E_L — исключительный дивизор раздутия α_L. Из [23, Theorem 4.3.3] следует, что существует коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} U_L \arrow[r, dashed, "\rho_L"] \arrow[d, "\alpha_L"'] & W_L \arrow[d, "\beta_L"] \\ X \arrow[r, dashed, "\psi_L"'] & V_5 \end{tikzcd}$$

где ρ_L — флоп в исключительном сечении поверхности $E \cong \mathbb{F}_3$, морфизм β_L стягивает поверхность $D_L \subset W_L$ на гладкую рациональную кривую степени 5, а ψ_L является двойной проекцией из прямой L.

Пусть $\bar{D}_L \subset X$ — собственный прообраз поверхности D_L. Тогда $\mathrm{mult}_L(\bar{D}_L)=3$, выполнена эквивалентность $\bar{D}_L \sim -K_X$, а из работы [19] следует, что $X \setminus \bar{D}_L \cong \mathbb{C}^3$.

Из работы [20] следует, что существует открытое аффинное подмножество $\breve{D}_L \subset \bar{D}_L$, которое может быть задано уравнением

$$\mu_0x^4+\Big(\mu_1yz+\mu_2z^3\Big)x^3+\Big(\mu_3y^3+\mu_4y^2z^2+\mu_5yz^4\Big)x^2+\Big(\mu_6y^4z+\mu_7y^3z^3\Big)x+\mu_8y^6+\mu_9y^5z^2=0$$

в $\mathbb{C}^3 \cong \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x,y,z])$, где точка $L \cap \Sigma_1 \in \breve{D}_L$ задана уравнениями $x=y=z=0$, и

$$\begin{aligned} &\mu_0=-2^85^2,\ \mu_1=2^93^35,\ \mu_2=-2^63^45,\ \mu_3=-2^83^37,\ \mu_4=-2^43^4127,\\ &\mu_5=2^93^5,\ \mu_6=2^23^689,\ \mu_7=-2^83^6,\ \mu_8=-3^65^3,\ \mu_9=2^53^7. \end{aligned}$$

Положим $O_L=\Sigma_1 \cap L$. Тогда $\mathrm{mult}_{O_L}(\bar{D}_L)=4$. Из [24, Proposition 8.14] следует, что

$$\mathrm{LCS}\left(X, \frac{1}{2}\bar{D}_L\right) = O_L$$

и выполнено равенство $\mathrm{lct}(X,\bar{D}_L)=1/2$. Значит, имеем $\mathrm{lct}(X) \leqslant 1/2$.

Предположим, что $\mathrm{lct}(X)<1/2$. Тогда существует эффективный $\mathbb{Q}$-дивизор

$$D \sim_{\mathbb{Q}} -K_X,$$

такой что особенности лог-пары $(X,\lambda D)$ не являются лог-каноническими для некоторого рационального $\lambda<1/2$. Мы можем считать, что $R \not\subset \mathrm{Supp}(D)$ по замечанию 2.9.

Пусть C — прямая на многообразии X, такая что $C \not\subset \mathrm{Supp}(D)$. Тогда

$$1 = D \cdot C \geqslant \mathrm{mult}_{O_C}\big(D\big)\mathrm{mult}_{O_C}\big(C\big) = \mathrm{mult}_{O_C}\big(D\big),$$

откуда следует, что $O_C \notin \mathrm{LCS}(X, \lambda D)$. В частности, мы видим, что $\Sigma_1 \not\subset \mathrm{LCS}(X, \lambda D)$.

Пусть Γ — неприводимая кривая в $\mathrm{Supp}(D)$, такая что $O_C \in \Gamma$. Тогда

$$\mathrm{mult}_{\Gamma}\left(\frac{1}{2}\bar{D}_C + \lambda D\right) = \frac{\mathrm{mult}_{\Gamma}\big(\bar{D}_C\big)}{2} + \lambda \mathrm{mult}_{\Gamma}\big(D\big) \leqslant \frac{\mathrm{mult}_{\Gamma}\big(\bar{D}_C\big)}{2} + \lambda \mathrm{mult}_{O_C}\big(D\big) < 1,$$

потому что $\lambda < 1/2$ и $\mathrm{Sing}(\bar{D}_C) = C$, поскольку $\bar{D}_C \neq R$. Следовательно,

$$\Gamma \not\subseteq \mathrm{LCS}\left(X,\ \frac{1}{2}\bar{D}_C + \lambda D\right) \supseteq \mathrm{LCS}\Big(X, \lambda D\Big) \cup O_C,$$

что противоречит теореме 2.6, потому что $O_C \notin \mathrm{LCS}(X, \lambda D)$ и $\lambda < 1/2$. □

В работе [18] показано, что выполнено равенство

$$\mathrm{lct}\Big(X,\ \mathrm{SO}_3\Big) = \frac{5}{6}$$

откуда следует, что X обладает метрикой Кэлера–Эйнштейна. Это равенство может быть получено рассуждениями, использованными при доказательстве теоремы 1.30.

Список литературы

[1] М. М. Гриненко, *О двойном конусе над поверхностью Веронезе*
Известия РАН, Серия математическая **67** №5 (2003), 5–22

[2] М. М. Гриненко, *Структуры Мори трехмерного многообразия Фано индекса* 2 *и степени* 1
Труды МИРАН им. В. А. Стеклова **246** (2004), 103–128

[3] Ю. Г. Прохоров, *Группы автоморфизмов многообразий Фано*
Успехи Математических Наук **45** № 3 (1990), 195–196

[4] А. В. Пухликов, *Бирациональная геометрия прямых произведений Фано*
Известия РАН, Серия математическая **69** No. 6 (2005), 153-186

[5] И. А. Чельцов, *Лог-канонические пороги на гиперповерхностях*
Математический Сборник **192** No. 8 (2001), 155–172

[6] И. А. Чельцов, *Бирационально жесткие многообразия Фано*
Успехи Математических Наук **60** No. 5 (2005), 71–160

[7] И. А. Чельцов, *Двойные пространства с особенностями*
Математический Сборник **199** No. 2 (2008), 131–148

[8] И. А. Чельцов, *Экстемальные метрики на двух многообразиях Фано*
Математический Сборник, принято в печать

[9] И. Чельцов, К. Шрамов, *Лог-канонические пороги неособых трехмерных многообразий Фано. С приложением Жан-Пьера Демайи*
Успехи Математических Наук, принято в печать

[10] В. В. Шокуров, *Трехмерные лог-перестройки*
Известия АН СССР, Серия математическая **56** No. 1 (1992), 105–203

[11] C. Arezzo, A. Ghigi, G. Pirola, *Symmetries, quotients and Kähler–Einstein metrics*
Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik **591** (2006), 177–200

[12] I. Cheltsov, *Fano varieties with many selfmaps*
Advances in Mathematics **217** (2008), 97–124

[13] I. Cheltsov, *Log canonical thresholds of del Pezzo surfaces*
Geometric and Functional Analysis, принято в печать

[14] I. Cheltsov, J. Park, *Weighted Fano threefold hypersurfaces*
Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik, **600** (2006), 81–116

[15] I. Cheltsov, J. Park, J. Won, *Log canonical thresholds of certain Fano hypersurfaces*
arXiv:math.AG/0706.0751 (2007)

[16] A. Corti, A. Pukhlikov, M. Reid, *Fano* 3*-fold hypersurfaces*
L.M.S. Lecture Note Series **281** (2000), 175–258

[17] J.-P. Demailly, J. Kollár, *Semi-continuity of complex singularity exponents and Kähler–Einstein metrics on Fano orbifolds*
Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure **34** (2001), 525–556

[18] S. Donaldson, *A note on the α-invariant of the Mukai–Umemura* 3*-fold*
arXiv:math.AG/0711.4357 (2007)

[19] M. Furushima, *Complex analytic compactification of* $\mathbb{C}^3$
Compositio Mathematica **76** (1990), 163–196

[20] M. Furushima, *Mukai–Umemura's example of the Fano threefold with genus* 12 *as a compactification of* $\mathbb{C}^3$
Nagoya Mathematical Journal **127** (1992), 145–165

[21] J.-M. Hwang, *Log canonical thresholds of divisors on Fano manifolds of Picard rank* 1
Compositio Mathematica **143** (2007), 89–94

[22] A. R. Iano-Fletcher, *Working with weighted complete intersections*
L.M.S. Lecture Note Series **281** (2000), 101–173

[23] V. Iskovskikh, Yu. Prokhorov, *Fano varieties*
Encyclopaedia of Mathematical Sciences **47** (1999) Springer, Berlin

[24] J. Kollár, *Singularities of pairs*
Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **62** (1997), 221–287

[25] J. Kollár, *Universal untwisting of birational maps*
Труды Математического Института им. В.А. Стеклова, принято в печать

[26] R. Lazarsfeld, *Positivity in algebraic geometry* **II**
Springer-Verlag, Berlin, 2004

[27] S. Mukai, H. Umemura, *Minimal rational threefolds*
Lecture Notes in Mathematics **1016** (1983), 490–518

[28] A. Nadel, *Multiplier ideal sheaves and Kähler–Einstein metrics of positive scalar curvature*
Annals of Mathematics **132** (1990), 549–596

[29] Yu. Prokhorov, D. Markushevich, *Exceptional quotient singularities*
American Journal of Mathematics **121** (1999), 1179–1189

[30] A. Pukhlikov, *Birational automorphisms of Fano hypersurfaces*
Inventiones Mathematicae **134** (1998), 401–426

[31] G. Tian, *On Kähler–Einstein metrics on certain Kähler manifolds with* $c_1(M) > 0$
Inventiones Mathematicae **89** (1987), 225–246

[32] X. Wang, X. Zhu, *Kähler–Ricci solitons on toric manifolds with positive first Chern class*
Advances in Mathematics **188** (2004), 87–103

[33] Q. Zhang, *Rational connectedness of log* $\mathbb{Q}$*-Fano varietiess*
Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik **590** (2006), 131–142