Об эквивариантной производной категории расслоений на проективные пространства

А. Елагин

1 Введение

Для производной категории расслоений на проективные пространства Д. О. Орловым была доказана следующая теорема ([1, теорема 2.6]):

Теорема 1.1. *Пусть E — векторное расслоение ранга r на гладкой схеме S, а $X = \mathbb{P}_S(E)$ — его проективизация. Обозначим проекцию $X \to S$ через p. Тогда ограниченная производная категория $\mathcal{D}^b(X) = \mathcal{D}^b(coh(X))$ допускает следующее полуортогональное разложение:*

$$\mathcal{D}^b(X) = \langle p^*\mathcal{D}^b(S), p^*\mathcal{D}^b(S) \otimes \mathcal{O}_{X/S}(1), \ldots, p^*\mathcal{D}^b(S) \otimes \mathcal{O}_{X/S}(r-1)\rangle,$$

где подкатегория $p^*\mathcal{D}^b(S) \otimes \mathcal{O}_{X/S}(k)$ есть образ строго полного функтора

$$p^*(-) \otimes \mathcal{O}_{X/S}(k) \colon \mathcal{D}^b(S) \to \mathcal{D}^b(X).$$

Наша цель — дать эквивариантную версию этой теоремы. А именно, мы предполагаем, что в условиях теоремы 1.1 имеется согласованное действие конечной группы G на X и S. Нас интересует $\mathcal{D}^b(coh^G(X))$ — производная категория G-эквивариантных пучков на X.

Основной пример описанной ситуации — проективизация эквивариантного векторного расслоения E на S. Также мы рассмотрим более широкий класс примеров, связанный со "скрученными эквивариантными расслоениями". Грубо говоря, это такие расслоения E, для которых $g^*E \cong E$ для всех $g \in G$, причём изоморфизмы можно выбрать согласованными с действием группы.

В работе мы будем предполагать, что действие группы G на $X = \mathbb{P}_S(E)$ происходит из скрученного эквивариантного расслоения E на S. В этих условиях мы построим полуортогональное разложение производной категории G-эквивариантных когерентных пучков на X на компоненты — производные категории скрученных пучков на базе S. Конструкция аналогична той, что фигурирует в теореме Орлова, и использует скрученные эквивариантные пучки.

Работа состоит из четырёх параграфов. Во втором параграфе мы выясним, в каких случаях действие группы на проективном расслоении происходит из эквивариантной структуры на векторном расслоении и укажем, какое положение занимает рассматриваемый нами случай "скрученных эквивариантных расслоений". В третьем параграфе будут изложены необходимые сведения о коциклах групп, скрученных пучках на многообразиях и операциях с ними. В четвёртом параграфе находится основной результат работы — теорема 4.3.

Автор благодарит Д. О. Орлова и А. Г. Кузнецова за постоянное внимание к работе и многочисленные полезные обсуждения.

2 Препятствия, связанные с действием группы на проективизации векторного расслоения

Предполагая, как выше, что на S и $X = \mathbb{P}_S(E)$ действует группа G, выясним, какие есть препятствия к тому, чтобы действие на X определялось некоторой эквивариантной структурой на расслоении E. Нам понадобится простое наблюдение. Пусть $f\colon \mathbb{P}_S(E_1) \to \mathbb{P}_S(E_2)$ — изоморфизм между проективизациями двух векторных расслоений на S, постоянный на базе. Тогда f происходит из некоторого изоморфизма расслоений $f'\colon E_1 \otimes \mathcal{L} \to E_2$, где $\mathcal{L}$ — однозначно определённое линейное расслоение, и морфизм f' определён однозначно с точностью до умножения на не обращающуюся в ноль функцию на S (это следует из [2, упр. II.7.9]).

Итак, действие G на $\mathbb{P}_S(E)$ определяет изоморфизмы $\mathbb{P}_S(E) \to g^*\mathbb{P}_S(E) = \mathbb{P}_S(g^*E)$ для каждого $g \in G$. Они происходят из изоморфизмов $\mathcal{L}(g) \otimes E \to g^*E$ векторных расслоений, где $\mathcal{L}(g)$ — соответствующие линейные расслоения. Фиксируем для каждого $g \in G$ такой изоморфизм

$$\theta_g\colon \mathcal{L}(g) \otimes E \to g^*E. \tag{1}$$

Для каждой пары $g, h \in G$ получим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
h^*\mathcal{L}(g) \otimes \mathcal{L}(h) \otimes E \arrow[r, "1\otimes\theta_h"] \arrow[d, "\alpha'_{g,h}"'] & h^*\mathcal{L}(g) \otimes h^*E \arrow[r, "h^*\theta_g"] & h^*g^*E \arrow[d, equal] \\
\mathcal{L}(gh) \otimes E \arrow[rr, "\theta_{gh}"] & & (gh)^*E,
\end{tikzcd}$$

где $\alpha'_{g,h}$ — некоторый изоморфизм. Заметим, что проективизация $\alpha'_{g,h}$ является тождественным автоморфизмом $\mathbb{P}_S(E)$. Следовательно, морфизм $\alpha'_{g,h}$ имеет вид $\alpha_{g,h} \otimes 1$, где $\alpha_{g,h}$ — изоморфизм между $h^*\mathcal{L}(g) \otimes \mathcal{L}(h)$ и $\mathcal{L}(gh)$. Очевидно, изоморфизмы $\alpha_{g,h}$ подчинены условию коцикла: диаграмма

$$\begin{tikzcd}
k^*h^*\mathcal{L}(g) \otimes k^*\mathcal{L}(h) \otimes \mathcal{L}(k) \arrow[r, "1\otimes\alpha_{h,k}"] \arrow[d, "k^*\alpha_{g,h}\otimes 1"'] & k^*h^*\mathcal{L}(g) \otimes \mathcal{L}(hk) \arrow[d, "\alpha_{g,hk}"] \\
k^*\mathcal{L}(gh) \otimes \mathcal{L}(k) \arrow[r, "\alpha_{gh,k}\otimes 1"'] & \mathcal{L}(ghk)
\end{tikzcd} \tag{2}$$

коммутативна для каждой тройки $g, h, k \in G$.

Мы видим, что расслоения $\mathcal{L}(gh)$ и $h^*\mathcal{L}(g) \otimes \mathcal{L}(h)$ изоморфны, значит отображение $\beta_E\colon G \to \operatorname{Pic}(S)$; $g \mapsto \mathcal{L}(g)$ задаёт 1-коцикл G с коэффициентами в правом G-модуле $\operatorname{Pic}(S)$. Этот коцикл β_E однозначно определяется расслоением E и действием группы G на $X = \mathbb{P}_S(E)$, расслоение E определяется по X однозначно с точностью до подкрутки на линейные расслоения. Замена E на $E' = \mathcal{L} \otimes E$ изменяет коцикл на кограницу $\delta\mathcal{L}$:

$$g^*E' \cong g^*\mathcal{L} \otimes g^*E \cong g^*\mathcal{L} \otimes \beta_E(g) \otimes E \cong g^*\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^{-1} \otimes \beta_E(g) \otimes E',$$

то есть $\beta_{E'}(g) = g^*\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^{-1} \otimes \beta_E(g)$. Мы видим, что класс когомологий $[\beta] = [\beta_E] \in H^1(G, \operatorname{Pic} S)$ корректно определён действием G на X.

Теперь предположим, что класс $[\beta]$ тривиален. Это значит, что для некоторого выбора расслоения E в формуле (1) можно взять $\mathcal{L}(g) = \mathcal{O}_S$ для всех g. В таком случае мы говорим, что действие G на X *происходит из скрученного эквивариантного векторного расслоения.* При этом все расслоения в диаграмме (2) тривиальны, а изоморфизмы $\alpha_{g,h}$ между ними суть умножения на не обращающиеся в ноль функции $\alpha(g,h) \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S^*)$. Условие (2) при этом принимает вид

$$\alpha(gh,k) \cdot k^*\alpha(g,h) = \alpha(g,hk) \cdot \alpha(h,k).$$

То есть, α является 2-коциклом группы G с коэффициентами в правом G-модуле $\Gamma(S, \mathcal{O}_S^*)$. Этот коцикл зависит от выбора изоморфизмов $\theta_g \colon E \to g^*E$. Замена θ_g на $\theta'_g = \theta_g \cdot \gamma(g)$ меняет $\alpha(g,h)$ на

$$\alpha'(g,h) = \alpha(g,h) \cdot h^*\gamma(g) \cdot \gamma(h) \cdot \gamma(gh)^{-1},$$

так что коцикл $\alpha' = \alpha{\cdot}\delta\gamma$ остаётся когомологичен α и класс когомологий $[\alpha] \in H^2(G, \Gamma(S, \mathcal{O}_S^*))$ корректно определён. Этот класс является препятствием к тому, чтобы действие группы на X определялось некоторой структурой эквивариантного расслоения на E.

Отметим, что класс $[\beta]$ заведомо тривиален во многих случаях. Например, это так, если действие группы G на $\mathrm{Pic}(S)$ тривиально и группа $\mathrm{Pic}(S)$ не имеет кручения.

Следующий пример показывает, что условия "$g^*E \cong E$ при всех $g \in G$" недостаточно для того, чтобы класс $[\beta]$ был тривиален и X являлось проективизацией скрученного эквивариантного векторного расслоения.

Пример. Пусть S — любое проективное многообразие с нетривиальным линейным расслоением $\mathcal{L}$ второго порядка в группе Пикара (т.е. такое, что $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L} \cong \mathcal{O}$). Например, в качестве S можно взять эллиптическую кривую. Пусть G — группа из двух элементов, действующая на S тривиально. Рассмотрим векторное расслоение $E = \mathcal{O} \oplus \mathcal{L}$. Имеется очевидный изоморфизм $E \otimes \mathcal{L} \to E$, его проективизация σ даёт инволюцию $X = \mathbb{P}_S(E)$. Тем самым определено действие G на X.

Нетрудно видеть, что σ не происходит из автоморфизмов расслоения E. Действительно, автоморфизмы E диагональны, они сохраняют два выделенных сечения морфизма $X{\to}S$, в то время как σ переставляет эти сечения. С другой стороны, элемент σ действует на базе S тривиально и тем самым оставляет расслоение E инвариантным. Вычислим явно коцикл β в этом случае: $\beta(e) = \mathcal{O}, \beta(\sigma) = \mathcal{L}$. Класс когомологий $[\beta]$ нетривиален, так как структура G-модуля на $\mathrm{Pic}(S)$ тривиальна.

3 Коциклы и скрученные пучки

В этом разделе мы определим коциклы и скрученные эквивариантные пучки и изложим их свойства, необходимые для дальнейшей работы.

Пусть S — схема (не обязательно проективная), на которой действует конечная группа G. Фиксируем 2-коцикл $\alpha(g,h)$ группы G с коэффициентами в правом G-модуле $\Gamma(S, \mathcal{O}_S^*)$ (для краткости мы будем писать ниже $\mathcal{O}_S^*$ вместо $\Gamma(S, \mathcal{O}_S^*)$ там, где это не приведёт к путанице). Нам будет удобно использовать условие коцикла, записанное в следующей форме:

$$\alpha(gh,f) \cdot f^*\alpha(g,h) = \alpha(g,hf) \cdot \alpha(h,f). \tag{3}$$

Мы будем для краткости называть α *коциклом.*

Определение 3.1. *Пусть $p\colon X \to S$ — схема над S, на которой действует группа G, причём действие согласовано с действием на S. Пусть α — коцикл группы G. Мы будем называть* α-G-эквивариантным пучком *на X (или α-эквивариантным пучком, или просто α-пучком) когерентный пучок F на X вместе с набором изоморфизмов $\theta_g\colon F \to g^*F, g \in G$, удовлетворяющим следующим соотношениям:*

$$\theta_{gh} \cdot p^*\alpha(g,h) = h^*\theta_g \circ \theta_h$$

для каждой пары $g,h \in G$. Определим морфизм *между двумя α-пучками (F_1, θ_g^1) и (F_2, θ_g^2) на X как морфизм $f\colon F_1 \to F_2$ пучков, такой что $g^*f \circ \theta_g^1 = \theta_g^2 \circ f$ для всех $g \in G$.*

Эквивариантные пучки мы будем обозначать рукописными буквами, а соответствующие им пучки без эквивариантной структуры — печатными. Операция забывания эквивариантной структуры будет обозначаться верхней чертой. Так, для эквивариантного пучка $\mathcal{F} = (F, \theta_g)$ мы будем писать $F = \bar{\mathcal{F}}$.

Легко проверить, что α-эквивариантные пучки на X образуют абелеву категорию, которую мы будем обозначать $coh^{G,\alpha}(X)$. С точностью до эквивалентности эта категория зависит только от класса когомологий $[\alpha] \in H^2(G, \mathcal{O}_S^*)$ коцикла α.

Коциклы G с коэффициентами в $\mathcal{O}_S^*$ образуют группу $Z^2(G, \mathcal{O}_S^*)$ по умножению, и мы будем использовать обозначения для коциклов α^{-1}, $\alpha\beta$ в естественном смысле.

В следующих предложениях мы формулируем простейшие свойства скрученных эквивариантных пучков.

Предложение 3.2. *Пусть α и β — коциклы группы G, $\mathcal{F}$ — α-G-эквивариантный пучок, а $\mathcal{G}$ — β-G-эквивариантный пучок на X. Тогда*

- *$\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ является $\alpha \otimes \beta$-пучком на X,*
- *$\mathcal{F}^*$ является α^{-1}-пучком,*
- *$\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ является $\alpha^{-1} \otimes \beta$-пучком,*

Доказательство. Очевидно. □

Предложение 3.3. *Пусть $f\colon X \to Y$ — эквивариантный проективный морфизм целых нётеровых схем над S с действием группы G. Тогда между категориями $coh^{G,\alpha}(X)$ и $coh^{G,\alpha}(Y)$ корректно определены функторы прямого и обратного образов f_* и f^*, коммутирующие с функторами забывания эквивариантной структуры. Эти функторы сопряжены, f^* точен справа, f_* точен слева. Пусть схема Y регулярна, тогда производные функторы Lf^* и Rf_* между категориями $\mathcal{D}^b(coh^{G,\alpha}(X))$ и $\mathcal{D}^b(coh^{G,\alpha}(Y))$ корректно определены, сопряжены друг другу и также коммутируют с забыванием эквивариантной структуры. Справедлива формула проекции: для $\mathcal{F} \in \mathcal{D}^b(coh^{G,\alpha}(Y))$ и $\mathcal{G} \in \mathcal{D}^b(coh^{G,\beta}(X))$ выполнено*

$$Rf_*(Lf^*\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}) \cong \mathcal{F} \otimes Rf_*\mathcal{G}.$$

Доказательство. Пусть $\bar{f}^*$ обозначает обратный образ на категории пучков, $\mathcal{F}$ — α-пучок на Y, $\bar{\mathcal{F}} = (F, \theta_g)$. Тогда на пучке $\bar{f}^*F$ естественным образом возникает эквивариантная структура: морфизмы $\theta'_g\colon \bar{f}^*F \to g^*\bar{f}^*F = \bar{f}^*g^*F$ определены как $\bar{f}^*\theta_g$. Определим $f^*\mathcal{F}$ как α-G-пучок $(\bar{f}^*F, \theta'_g)$. Из определения видно, что обратный образ коммутирует с забыванием G-структуры. Аналогично определяется прямой образ.

Для проверки сопряжённости f^* и f_* на эквивариантных категориях заметим, что для $\mathcal{F} \in coh^{G,\alpha}(X), \mathcal{G} \in coh^{G,\alpha}(Y)$ на пространствах $\mathrm{Hom}_{coh(X)}(\bar{f}^*\bar{\mathcal{G}}, \bar{\mathcal{F}})$ и $\mathrm{Hom}_{coh(Y)}(\bar{\mathcal{G}}, \bar{f}_*\bar{\mathcal{F}})$ действует группа G, причём канонический изоморфизм между этими пространствами уважает действие группы. Переходя к инвариантам, получаем изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{coh^{G,\alpha}(X)}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F}) \cong \mathrm{Hom}_{coh^{G,\alpha}(Y)}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}).$$

Чтобы определить функтор Lf^*, проверим, что в категории $coh^{G,\alpha}(Y)$ достаточно много локально свободных эквивариантных пучков. Такие пучки образуют класс объектов, приспособленный к функтору f^* в смысле [3, глава 3, параграф 6]. Действительно, пусть $\mathcal{F}$ — когерентный α-пучок. Накроем $\bar{\mathcal{F}}$ локально свободным пучком E в категории когерентных пучков. Сюръекции $E \to \bar{\mathcal{F}}$ в силу сопряжённости соответствует сюръекция $\mathrm{Ind}\, E \to \mathcal{F}$ в категории скрученных эквивариантных пучков, где Ind обозначает функтор $coh(Y) \to coh^{G,\alpha}(Y)$, сопряжённый слева к функтору забывания. Как пучок, $\mathrm{Ind}\, E$ изоморфен $\oplus_{g\in G} g^*E$, как следствие, он локально свободен. Для проверки того, что Lf^* коммутирует с (точным) функтором забывания эквивариантной структуры, достаточно показать, что функтор забывания $coh^{G,\alpha}(Y) \to coh(Y)$ переводит некоторый класс объектов в $coh^{G,\alpha}(Y)$, приспособленный к функтору f^*, в класс объектов в $coh(Y)$, приспособленный к функтору $\bar{f}^*$. Как мы видели выше, для этого можно взять класс скрученных эквивариантных пучков, индуцированных из локально свободных.

Рассуждения для функтора f_* проводятся аналогично с заменой локально свободных пучков на инъективные в категории $\mathcal{O}_X-\mathrm{Mod}$.

Наконец, проверим формулу проекции. Морфизм $\mathcal{F} \otimes Rf_*\mathcal{G} \to Rf_*(Lf^*\mathcal{F} \otimes \mathcal{G})$ определён в силу свойств сопряжённости Lf^* и Rf_*. Для проверки того, что это изоморфизм, достаточно применить обычную (неэквивариантную) формулу проекции (например, [4, предложение 5.6]), так как функторы Lf^*, Rf_* и тензорное умножение коммутируют с забыванием эквивариантной структуры. $\square$

4 Теорема о полуортогональном разложении

Пусть $X = \mathbb{P}_S(E)$ — проективизация векторного расслоения E ранга r на неособом многообразии S, а $p\colon X \to S$ — естественная проекция. Предположим, что конечная группа G согласованно действует на X и S. Мы рассматриваем случай, когда действие определяется структурой скрученного эквивариантного расслоения на E. Это значит, что существуют изоморфизмы $\theta_g\colon E \to g^*E$ для $g \in G$, проективизация которых даёт действие G на X. Как было показано в параграфе 2, эти изоморфизмы оказываются связаны соотношениями

$$h^*\theta_g \circ \theta_h = \theta_{gh} \cdot \alpha(g,h),$$

где $\alpha(g,h)$ — некоторые не обращающиеся в ноль функции на S, удовлетворяющие условию коцикла (3). Тем самым, E становится α-эквивариантным расслоением $\mathcal{E}$ на S в смысле определения 3.1. Относительный скручивающий пучок $\mathcal{O}(1) = \mathcal{O}_{X/S}(1)$ на X эквивариантно накрывается расслоением $p^*\mathcal{E}^*$ и поэтому является α^{-1}-эквивариантным пучком. Согласно предложению 3.2, расслоения $\mathcal{O}(k)$ являются α^{-k}-эквивариантными расслоениями.

Мы построим вложение F_k категории $\mathcal{D}^b(coh^{G,\alpha^k}(S))$ в интересующую нас категорию $\mathcal{D}^b(coh(X))$. Для упрощения обозначений мы будем писать $\mathcal{D}^{G,\alpha^k}(S)$, $\mathcal{D}(X)$ и т. д. вместо

$\mathcal{D}^b(coh^{G,\alpha^k}(S))$, $\mathcal{D}^b(coh(X))$, и т. д. Определим функтор F_k равенством

$$F_k(-) = p^*(-) \otimes \mathcal{O}(k).$$

Здесь p^* обозначает производный функтор $\mathcal{D}^{G,\alpha^k}(S) \to \mathcal{D}^{G,\alpha^k}(X)$, а подкрутка на $\mathcal{O}(k)$ даёт (нескрученный) эквивариантный объект согласно предложению 3.2. Отметим, что функтор F_k имеет правый сопряжённый функтор $Rp_*(- \otimes \mathcal{O}(-k))$.

Лемма 4.1. *Функтор F_k строго полный.*

Доказательство. Для $A, B \in \mathcal{D}^{G,\alpha^k}(S)$ имеем

$$\mathrm{Hom}(F_k(A), F_k(B)) = \mathrm{Hom}(A, Rp_*p^*B) = \mathrm{Hom}(A, B \otimes Rp_*\mathcal{O}) = \mathrm{Hom}(A, B).$$

Здесь мы использовали сопряжённость p^* и Rp_* и формулу проекции из предложения 3.3, а также то, что $Rp_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_S$. □

Обозначим образ функтора F_k через $p^*\mathcal{D}^{G,\alpha^k}(S) \otimes \mathcal{O}(k)$. Это триангулированная подкатегория в $\mathcal{D}(X)$, эквивалентная $\mathcal{D}^{G,\alpha^k}(S)$.

Лемма 4.2. *Подкатегории $p^*\mathcal{D}^{G,\alpha^k}(S) \otimes \mathcal{O}(k)$ полуортогональны друг другу при $0 \leqslant k \leqslant r-1$.*

Доказательство. Для $A \in \mathcal{D}^{G,\alpha^l}(S), B \in \mathcal{D}^{G,\alpha^k}(S)$ при $0 \leqslant k < l \leqslant r-1$ мы имеем

$$\mathrm{Hom}(F_l(A), F_k(B)) = \mathrm{Hom}(A, Rp_*(p^*B \otimes \mathcal{O}(k-l))) = \mathrm{Hom}(A, B \otimes Rp_*\mathcal{O}(k-l)) = \mathrm{Hom}(A, 0) = 0.$$

Здесь мы снова воспользовались сопряжённостью p^* и Rp_*, формулой проекции из предложения 3.3, и тем, что $Rp_*\mathcal{O}_{X/S}(i) = 0$ при $-r < i < 0$. □

Теперь мы можем сформулировать и доказать аналог теоремы 1.1 для категории эквивариантных пучков.

Теорема 4.3. *В сделанных обозначениях категория $\mathcal{D}^G(X)$ допускает полуортогональное разложение*

$$\mathcal{D}^G(X) = \langle p^*\mathcal{D}^G(S), p^*\mathcal{D}^{G,\alpha}(S) \otimes \mathcal{O}(1), \ldots, p^*\mathcal{D}^{G,\alpha^{r-1}}(S) \otimes \mathcal{O}(r-1)\rangle, \tag{4}$$

в котором компоненты $p^*\mathcal{D}^{G,\alpha^k}(S) \otimes \mathcal{O}(k)$ эквивалентны категориям $\mathcal{D}^{G,\alpha^k}(S)$ скрученных эквивариантных пучков на S.

Доказательство. Нам остаётся проверить, что подкатегории $p^*\mathcal{D}^{G,\alpha^k}(S) \otimes \mathcal{O}(k)$, $0 \leqslant k \leqslant r-1$, порождают всю категорию $\mathcal{D}^G(X)$ как триангулированную категорию. Как было замечено выше, категории в правой части (4) допустимы справа. Согласно результатам А. И. Бондала [5], достаточно проверить обращение в ноль совместного правого ортогонала к указанным категориям. Возьмём ненулевой объект $A \in \mathcal{D}^G(X)$ и покажем, что он не ортогонален справа к одной из категорий в правой части (4). Пусть $\bar{A} \in \mathcal{D}(X)$ — объект, полученный из A забыванием группового действия. Согласно теореме 1.1, категории $p^*\mathcal{D}(S) \otimes \mathcal{O}(k)$, $0 \leqslant k \leqslant r-1$, порождают $\mathcal{D}(X)$, следовательно для некоторых $B' \in \mathcal{D}(S)$ и k, $0 \leqslant k \leqslant r-1$, мы имеем $\mathrm{Hom}(p^*B' \otimes \mathcal{O}(k), \bar{A}) \neq 0$. По сопряжённости, $\mathrm{Hom}(p^*B' \otimes \mathcal{O}(k), \bar{A}) = \mathrm{Hom}(B', Rp_*(\bar{A} \otimes \mathcal{O}(-k)))$, значит объект $Rp_*(A \otimes \mathcal{O}(-k))$ категории $\mathcal{D}^{G,\alpha^k}(S)$ ненулевой. Обозначим его через B. Получаем

$$\mathrm{Hom}(p^*B \otimes \mathcal{O}(k), A) = \mathrm{Hom}(B, Rp_*(A \otimes \mathcal{O}(-k))) \neq 0,$$

то есть A не ортогонален к подкатегории $p^*\mathcal{D}^{G,\alpha^k}(S) \otimes \mathcal{O}(k)$. □

Список литературы

[1] Д. О. Орлов, "Проективные расслоения, моноидальные преобразования и производные категории когерентных пучков", *Изв. РАН, Сер. матем.,* **56**:4 (1992), 852-862.

[2] Р. Хартсхорн, *Алгебраическая геометрия*, Мир, М., 1981.

[3] С. И. Гельфанд, Ю. И. Манин, *Методы гомологической алгебры, т. 1*, Наука, М., 1988.

[4] R. Hartshorne, *Residues and duality*, Springer-Verlag, New York, 1966.

[5] А. И. Бондал, "Представления ассоциативных алгебр и когерентные пучки", *Изв. АН СССР, Сер. матем.,* **53**:1 (1989), 25-44.