УДК 512.732.6

ОБ ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫХ НАБОРАХ НА ГРАССМАНИАНАХ

В. В. ГОЛЫШЕВ

Аннотация. Мы связываем исключительные наборы на грассманиане $G(k,N)$ и на проективном пространстве $\mathbb{P}^{N-1}$.

Пусть F — m–мерное многообразие Фано индекса d (так что $-K_F = dH$), обладающее полным исключительным набором. Напомним, что объект $E \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}^b(F))$ называется *исключительным*, если для него выполняется

$$\mathrm{Hom}^i(E,E)=0 \quad \text{при} \quad i\neq 0, \quad \mathrm{Hom}^0(E,E)=\mathbb{C},$$

что упорядоченный набор $E_0,\ldots\ldots,E_n$ исключительных объектов называется *исключительным* если для любого i выполняется $\mathrm{Hom}^i(E_j,E_k) = 0$ когда $j > k$, и что исключительный набор *полон* если он порождает категорию $\mathcal{D}^b(F)$. Матрица значений билинейной формы Римана–Роха $\chi([O_1],[O_2]) = \sum(-1)^i \dim \mathrm{Hom}^i(O_1,O_2)$, выраженной в базисе из классов элементов полного исключительного набора $K_0(F)\otimes\mathbb{Q}$ верхнетреугольна.

С другой стороны, рассмотрим матрицу M_{-K_F} квантового умножения на $-K_F$. Ее элементы лежат в $\mathbb{Q}[q_i,q_i^{-1}]$, где q_i соответствуют, как обычно, образующим решетки численных классов кривых на F. Обозначим через h_i антиканоническую степень класса q_i. Можно специализировать матрицу M из $\mathrm{Mat}\,(\mathbb{Q}[t,t^{-1}])$ отобразив q_i в t^{h_i}. В этом нет нужды, когда $H^2(F)=\mathbb{Z}$, как и будет в дальнейшем. Антиканонический квантовый D–модуль на $\mathbf{G_m}$ задается связностью $t\frac{\partial}{\partial t}\eta = \eta M$.

Согласно гипотезе, высказанной Дубровиным на конгрессе 1998 года в Берлине [Dub98], матрица формы χ эйлеровой характеристики на K_0 многообразия Фано F с полным исключительным набором должна совпасть с матрицей Стокса антиканонического квантового D–модуля в бесконечности.

О грассманиане $G(k,N)$ теорема Бертрама–Чиокан-Фонтанине–Кима–Сабба [BCFK05], [KS08] говорит, что его антиканонический D–модуль по существу изоморфен k–ой внешней степени антиканонического D–модуля проективного пространства $\mathbb{P}^{N-1} = G(1,N)$. В этой ситуации гипотеза Дубровина предсказывает, что на грассманиане найдется набор $\mathbf{E} = \langle E_1, E_2, \ldots, E_{C_N^k}\rangle$, чья матрица эйлеровой характеристики X есть *k-ая внешняя степень* от матрицы χ некоторого набора $\mathbf{e} = \langle e_1, e_2, \ldots, e_N\rangle$ на $G(1,N) = \mathbb{P}^{N-1}$. Теорема п. 3 ниже показывает, что элементы наборов Капранова, то есть результаты применения допустимых функторов Шура к универсальным подрасслоениям на грассманиане и на проективном пространстве, [Кап84], связаны именно таким образом.

1. Теорема Капранова. [Кап84, 2.2] Пусть $G(k,N)$ — многообразие Грассмана k–плоскостей в N–мерном пространстве V. Обозначим через U тавтологическое подрасслоение. Назовем диаграмму Юнга $\lambda = \lambda_1, \ldots, \lambda_k$ допустимой, если все $\lambda_i \leq N-k$. Векторные расслоения $\Sigma^\lambda U$ с допустимыми λ образуют исключительный набор $\mathbf{E}$ на $G(k,N)$. Между объектами нет высших Ext'ов. Hom может быть нетривиален только когда $\lambda \geq \mu$, и в этом случае имеется изоморфизм

$$\mathrm{Hom}(\Sigma^\lambda U, \Sigma^\mu U) = \bigoplus_\nu \Sigma^\nu V^*,$$

где ν пробегает все полиномиальные слагаемые в разложении функтора

$$\Sigma^{\lambda_1,\ldots,\lambda_k} \otimes \Sigma^{-\mu_k,\ldots,-\mu_1}$$

на неприводимые.

■

2. Лемма. Пусть $x = \mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_n)$ – диагональная матрица в GL_n, и пусть E — стандартное n–мерное представление GL_n, так что $\mathrm{char}_E(x) = \sum x_i$. Тогда характер полиномиальной части в разложении

$$\Sigma^{-\mu_k,\ldots,-\mu_1} \otimes \Sigma^{\lambda_1,\ldots,\lambda_k}$$

на неприводимые, вычисленный на x, есть косая функция Шура $s_{\lambda/\mu} = s_{\lambda/\mu}(x_i)$.

Доказательство. Можно доказать этот факт, используя двойственность (см. [Мак85, I, 5.1]). Мы, однако, будем действовать, как в [Мак85, I, 3, прим. 8], чтобы попутно дать общую формулу проектора на полиномиальную часть в кольце характеров и распространить результат на Hom'ы между представлениями, не обязательно являющиеся ковариантными. Рассмотрим кольцо $Q_n = \mathbb{Q}[x_1, x_1^{-1}, \ldots, x_n, x_n^{-1}]$ многочленов от переменных x_i и обратных к ним. Характеры и ко–, и контравариантных представлений лежат в $Q_n^{S_n}$. Для всех $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ одночлен $x_\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ порождает симметрическую функцию

$$m_\alpha = \sum_{w \in S_n} x^{w\alpha}$$

и функции m_α, такие, что $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_n$, образуют базис векторного пространства $Q_n^{S_n}$. Кроме того, антисимметризуя x_α, получаем функцию

$$a_\alpha = \sum_{w \in S_n} (-1)^{\mathrm{sign}(w)} x^{w\alpha}.$$

В частности, обозначим через a_δ результат антисимметризации многочлена $x_1^{n-1} \ldots x_n^0$, а через $a_{-\delta}$ результат антисимметризации многочлена $x_1^{-n+1} \ldots x_n^0$.

Определим линейное отображение φ из $Q_n^{S_n}$ в кольцо полиномиальных симметрических функций от x_i, полагая $\varphi(m_\alpha) = h_\alpha$. Здесь под h мы понимаем полные симметрические функции. Как всегда $h_\alpha = 0$, если какое–нибудь α_i отрицательно. По формуле Якоби–Труди для любого $j \in \mathbb{Z}$ имеем

$$s_\nu \cdot (x_1 \ldots x_n)^{-j} a_\delta = a_{\nu+\delta} \cdot (x_1 \ldots x_n)^{-j} = a_{\nu_1+n-1-j, \nu_2+n-2-j, \ldots, \nu_n-j}.$$

Согласно прим. 8(a) там же, для всех α, $\beta \in \mathbb{Z}^n$

$$\varphi(a_\alpha a_\beta) = \det \left(h_{\alpha_i+\beta_j}\right)_{1 \leq i,j, \leq n}.$$

Отсюда, во–первых, по формуле Джамбелли $\varphi(s_\nu a_\delta a_{-\delta}) = s_\nu$ для любой функции Шура s_ν, а, во–вторых, $\varphi(s_\nu \cdot (x_1 \ldots x_n)^{-j} a_\delta a_{-\delta}) = 0$ при $j > \nu_n$ (сходное рассуждение было предложено А. Меллитом). Таким образом, мы показали, что выражение $\varphi(* \cdot a_\delta a_{-\delta})$ определяет "проектор пространства характеров на полиномиальную часть".

Теперь заметим, что (опять по формуле Якоби–Труди) характер $\mathrm{ch}_{\mu,\lambda}$ представления

$$(\Sigma^{-\mu_k, \ldots, -\mu_1} \otimes \Sigma^{\lambda_1, \ldots, \lambda_k})(E)$$

равен $(a_{-\mu-\delta}/a_{-\delta})(a_{\lambda+\delta}/a_\delta)$. Итак, имеем

$$\varphi(\mathrm{ch}_{\mu,\lambda} a_\delta a_{-\delta}) = \varphi(a_{-\mu-\delta} a_{\lambda+\delta}) = \det(h_{\lambda_i - \mu_j - i + j})_{1 \leq i,j \leq n},$$

а последний детерминант равен $s_{\lambda/\mu}$ по формуле Джамбелли для косых функций Шура [Мак85, I, 5.4].

■

В частном случае проективного пространства ($k = 1$) договоримся обозначать набор Капранова через $\mathbf{e}$:

$$\mathbf{e} = \left\langle \Sigma^{N-1} U_{\mathbb{P}^{N-1}}, \ldots, \Sigma^0 U_{\mathbb{P}^{N-1}} \right\rangle = \langle \mathcal{O}(-N+1), \ldots, \mathcal{O} \rangle \, .$$

Напомним, что через Х (соотв. χ) мы обозначаем матрицу формы Римана–Роха на грассманиане (соотв. на проективном пространстве).

3. Теорема. Взаимнооднозначное соответствие ι между элементами набора $\mathbf{E}$ и подмножествами набора $\mathbf{e}$ мощности k, определямое формулой

$$\iota(\Sigma^\lambda U) = \{\Sigma^{\lambda_1+k-1} U_{\mathbb{P}^{N-1}}, \ldots, \Sigma^{\lambda_k} U_{\mathbb{P}^{N-1}}\},$$

обладает следующим свойством:

$$\mathrm{X}(E_i, E_j) = \det M_{\iota(i),\iota(j)},$$

где определитель в правой части — это минор матрицы χ в базисе $\mathbf{e}$, определяемый k-ми индексов $\iota(E_i)$ и $\iota(E_j)$.

Доказательство. Обозначим через $(1, \ldots, 1)$ набор из N единиц. Из формулы для размерностей Hom'ов следует, что

$$\mathrm{X}(\Sigma^\lambda U, \Sigma^\mu U) = s_{\lambda/\mu}(1, \ldots, 1).$$

Формула Джамбелли для косых функций Шура говорит, что для допустимых λ, μ

$$s_{\lambda/\mu} = \det(h_{\lambda_i - \mu_j - i + j})_{1 \le i,j \le k}.$$

Поскольку

$$h_{p-r}(1, \ldots, 1) = \chi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N-1}}(-p), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N-1}}(-r))$$

для $p \geq r$, и утверждение теоремы выполнено.

■

Я благодарю А. Кузнецова, А. Меллита и А. Окунькова за полезные обсуждения, и С. Галкина за помощь в работе над текстом.

Список литературы

[Кап84] М. М. Капранов, *О производной категории когерентных пучков на многообразиях Грассмана.*, Изв. Акад. наук СССР, сер. мат. **48** (1984), 192–202.

[BCFK05] Aaron Bertram, Ionuţ Ciocan-Fontanine, and Bumsig Kim, *Two proofs of a conjecture of Hori and Vafa.*, Duke Math. J. **126** (2005), no. 1, 101–136 (English).

[Dub98] Boris Dubrovin, *Geometry and analytic theory of Frobenius manifolds.* (English).

[KS08] Bumsig Kim and Claude Sabbah, *Quantum cohomology of the Grassmannian and alternate Thom-Sebastiani.*, Compos. Math. **144** (2008), no. 1, 221–246 (English).

[Мак85] И. Г. Макдональд, *Симметрические функции и многочлены Холла*, 222 с. М. Мир 1985