Нормализация пуассоновой алгебры пуассонова

Д. Каледин

Василию Алексеевичу Исковских, в день 70-летия

Введение

Хорошо известно, что функции на гладком симплектическом многообразии M снабжены канонической косолинейной операцией — скобкой Пуассона. Скобка некоторым образом согласована с умножением; аксиоматизируя ситуацию, получаем понятия пуассоной алгебры (см. определение 1.1).

Определение пуассоновой алгберы очень общее – в частности, не требуется никаких предположений о гладкости. В последнее время возник интерес к изучению достточно общих пуассоновых алгебр. Они, в частности, оказались весьма полезны в изучении так называемых симплектических особенностей, введенных А. Бовилем [B].

Однако, в то время как нетривиальные пуассоновы структуры на гладких многообразиях подробно изучаются уже более пятидесяти лет, общая теория развита гораздо хуже. По-видимому, даже самые простые факт или неизвестны, или затеряны в литературе.

Цель настоящей заметки – доказать один такой простой факт; а именно, мы доказываем, что, при некоторых естественных предположениях, целое замыкание пуассоновой алгебры вновь пуассоново (теорема 1.5). Изложение в значительной степени замкнуто в себе. Мы используем две предварительные леммы, которые, хотя определенно не являются новыми результатами, все же не вполне стандартны; для удобства читателя мы позволили себе их передоказать.

1 Формулировки и определения.

Зафиксируем раз и навсегда основное поле k характеристики $\operatorname{\mathsf{char}} k = 0$.

Определение 1.1. *Пуассонова алгебра* над полем k — это коммутативная алгебра A над k, снабженная дополнительной косолинейной операцией $\{-,-\} : A \otimes A \to A$, причем

$$(1.1)\quad \{a,bc\} = \{a,b\}c + \{a,c\}b \quad , \quad 0 = \{a,\{b,c\}\} + \{b,\{c,a\}\} + \{c,\{a,b\}\},$$

для любых $a, b, c \in A$. Идеал $I \subset A$ называется *пуассоновым* если $\{i, a\} \in I$ для любых $i \in I$, $a \in A$.

Кроме того, мы всегда будем предполагать, что пуассонова алгебра A имеет единичный элемент $1 \in A$, причем $\{1, a\} = 0$ для любого $a \in A$.

Определение 1.2. *Пуассонова схема* над k — это схема X над k, снабженная косолинейной скобкой в структурном пучке $\mathcal{O}_X$, удовлетворяющей (1.1).

Лемма 1.3. *Пусть A — пуассонова алгебра.*

(i) *Для любой мультипликативной системы $S \subset A$, локализация $A[S^{-1}]$ имеет каноническую структуру пуассоновой алгебры.*

(ii) *Любой ассоциированный простой идеал $\mathfrak{p} \subset A$ пуассонов.*

(iii) *Радикал $J \subset A$ алгебры A — пуассонов идеал.*

Proof. В (i), положим

$$\begin{aligned}\{a_1 s_1^{-1}, a_2 s_2^{-1}\} = \{a_1, a_2\}(s_1 s_2)^{-1} - \{a_1, s_2\} a_2 \left(s_1 s_2^2\right)^{-1} \\ - \{s_1, a_2\} a_1 \left(s_1^2 s_2\right)^{-1} + a_1 a_2 \{s_1, s_2\} \left(s_1^2 s_2^2\right)^{-1}.\end{aligned}$$

В (ii), заметим, что $\mathfrak{p} \subset A$ есть ядро канонического пуассоновоого отображение из пуассоновой алгебры A в поле частных $A_{\mathfrak{p}}$. В (iii), заметим, что J есть пересечение всех ассоциированных простых идеалов. □

В частности, лемма 1.3 (i) означает, что спектр пуассоновой алгебры — пуассонова схема. Отметим также следующее геометрическое следствие.

Следствие 1.4. *Пусть X — пуассонова схема над k. Тогда и соответствующая приведенная схема X_{red}, и каждая из ее неприводимых компонент являются пуассоновыми схемами.* □

Сформулируем наш главный результат.

Теорема 1.5. *Пусть A_0 — превосходная нетерова область целостности над k, и пусть A — ее целое замыкание в своем поле частных.*

(i) *Любое дифференцирование ξ алгебры A_0 продолжается до дифференцирования всей алгебры A.*

(ii) *Любая скобка Пуассона $\{-, -\}$ на алгебре A_0 проложается до скоби Пуассона на алгебре A.*

Заметим, что и дифференцирования, и пуассоновы скобки естественным и единственным образом продолжаются на поле частных $\mathsf{Frac}\, A_0 = \mathsf{Frac}\, A$. Смысл результата — в том, что они сохраняют целое замыкание $A \subset \mathsf{Frac}\, A$. Первое утверждение хорошо известно; тем не менее, мы передоказываем его, т.к. оно нужно для докзательства (ii).

Геометрическим следствием (а на самом деле, эквивалентной геометрической переформулировкой) теоремы 1.5 является следующее.

Следствие 1.6. *Пусть X_0 — превосходная нетерова целая схема над k, и пусть X — ее нормализация. Тогда любое векторное поле ξ и любая пуассонова структура на X_0 продолжаются на X.*

2 Кольца дискретного нормирования.

Чтобы доказать теорему 1.5, мы изучаем сперва ситуацию в коразмерности 1. В этом разделе предполагаем, что дана превосходная локальная нетерова алгебра A_0 над k крулльевской размерности 1. Пусть K_0 – ее поле вычетов, а A – целое замыкание A_0 в своем поле частных. Поскольку A_0 превосходна, A конечна над ней, и следовательно, представляет собой полулокальное кольцо с конечным числом l максимальных идеалов $\mathfrak{m}_i \subset A$, $1 \leq i \leq l$. Для любого $\mathfrak{m}_i$, локализация $A_{\mathfrak{m}_i}$ – нормальное локальное кольцо размерности 1, а стало быть, кольцо дискретного нормирования; его поле вычетов $K_i = A/\mathfrak{m}_i$ – конечное расширение поля вычетов K_0. Обозначим нормирование на $A_{\mathfrak{m}_i}$ через v_i, и зафиксируем униформизующие $\pi_i \in A_{\mathfrak{m}_i}$, $v_i(\pi_i) = 1$. Кольцо A регулярно и совпадает с пересечением

$$A = \bigcap_{1 \leq i \leq l} A_{\mathfrak{m}_i} \subset \mathsf{Frac}(A) \tag{2.1}$$

в поле частных $\mathsf{Frac}(A) = \mathsf{Frac}(A_0)$.

Лемма 2.1. *В этих предположения, алгебра $A_{\mathfrak{m}_i}$ для любого i, $1 \leq i \leq l$ порождена над A_0 одним элементом $x \in A_{\mathfrak{m}_i}$.*

Proof. По теореме о примитивном образующем, поле K_i порождено над K_0 одним элементом, например $\overline{x}$. Пусть $P(x)$ – минимальный полином $\overline{x}$ над K_0. Поднимем $\overline{x}$ до элемента $x \in A_{\mathfrak{m}_i}$, и рассмотрим

$$y = P(x) \in A.$$

По определению $y = 0 \mod \pi_i$, так что $v_i(y) > 0$. Если $v_i(y) = 1$, все доказано: x и y порождают A над A_0, причем $y = P(x)$. В противном случае заменяем y на

$$y' = P(x + \pi_i).$$

По формуле бинома, имеем

$$y' = P'(\overline{x})\pi \mod \pi^2.$$

Поскольку полином P минимальный, его производная P' удовлетворяет $P'(\overline{x}) \neq 0$. Поэтому $v_i(y') = 1$, и доказательство завершено: $A_{\mathfrak{m}_i}$ порождено над A_0 элементом $x + \pi_i$. $\square$

Лемма 2.2. *Любое дифференцирование $\xi_0 : A_0 \to A_0$ алгебры A_0 продолжается до дифференцирования алгебры A.*

Proof. Рассмотрим алгебры формальных степенных рядов $B = A[[t]]$ от одной переменной t. Поскольку A конечна над A_0, ее поле частных

$$\mathsf{Frac}(B) \subset \mathsf{Frac}(A)((t)) = \mathsf{Frac}(A_0)((t))$$

совпадает с $\mathsf{Frac}(A_0[[t]])$. Кроме того, B — регулярная локальная алгебра, и в частности, она целозамкнута (см. например [AC, Prop. 14]). Поэтому она совпадает с целым замыканием алгебры степенных рядов $B_0 = A_0[[t]]$. В силу функториальности целого замыкания, любой автоморфизм алгебры B_0 продолжается до автоморфизма B. Рассмотрим автоморфизм $\sigma_0 : B_0 \to B_0$, заданный равенством

$$\sigma_0(t) = t \qquad \sigma_0(a) = \exp(t\xi)(a) \text{ for } a \in A_0 \subset B_0.$$

Продолжим его до автоморфизма $\sigma : B \to B$ алгебры B. Полагая

$$\xi(a) = \frac{\partial}{\partial t}\sigma(a) \mod t,$$

получаем дифференцирование $\xi : A \to A = B/tB$, продолжающее данное дифференцирование ξ_0. $\square$

Замечание 2.3. По-видимому, этот результат впервые доказал А. Зайденберг [S] еще в 1966 году (причем даже и без предположения о превосходности). Однако кажется, что это известно не всем. В частности, и я благодарен М. Лену и Д. ван Стратену за сообщение об этом, результат также появляется как Лемма 2.33 на странице 36 в SGA7.2 (с примерно таким же доказательством, как в настоящей статье).

Лемма 2.4. *Пусть на алгебре A_0 дана скоба Пуассона $\{-,-\}$. Тогда эта скоба единственным образом продолжается на алгебру A.*

Proof. Продолжим скобку на поле частных $\mathsf{Frac}\, A$. Надо доказать, что $\{f, g\} \in A$ для любых $f, g \in A$. В силу (2.1), достаточно доказать это для любой из алгебр $A_{\mathfrak{m}_i}$. Пусть $x \in A_{\mathfrak{m}_i}$ — образующая, построенная в лемме 2.1. Достаточно доказать, что $\{x, x\} \in A_{\mathfrak{m}_i}$ и $\{x, f\} \in A_{\mathfrak{m}_i}$ для любого $f \in A_0$. Но $\{x, x\} = 0$ по определению, а $\{x, f\} \in A_{\mathfrak{m}_i}$ по лемме 2.2 (определяем $\xi_0 : A_0 \to A_0$ как $\xi_0(a) = \{a, f\}$ и замечаем, что любое дифференцирование $\xi : A \to A$ сохраняет все локализации $A_{\mathfrak{m}_i} \subset \mathsf{Frac}(A)$). $\square$

3 Доказательство теоремы.

Докажем теперь теорему 1.5. Удобнее сделать это в геометрической форме следствия 1.6. Итак, пусть X_0 — превосходная нетерова целая схема, и пусть X — ее нормализация. По лемме 2.2 и лемме 2.4, следствие 1.6 выполнено на открытом дополнении $U \subset X$ к подсхеме $Z \subset X$ коразмерности $\operatorname{codim} Z \geq 2$. Поэтому имеем дифференцирование и/или скобку Пуассона на структурном пучке $\mathcal{O}_U$. Индуцируем дифференцирование и/или скобу Пуассона на пучке $j_*\mathcal{O}_U$, где $j : U \hookrightarrow X$ — вложение. Поскольку $\operatorname{codim} Z \geq 2$, а X нормально, имеем $\mathcal{O}_X \cong j_*\mathcal{O}_U$. $\square$

Благодарности. Очень приятно посвятить статью Василию Алексеевичу Исковских; надеюсь, что через десять лет возможность сделать это появится вновь. Хотел бы поблагодарить Е. Америк, Р. Безрукавникова, А. Кузнецова, М. Ровинского и М. Вербицкого за интересные обсуждения. Я особенно признателен М. Лену, который вновь обратил внимание на эту статью спустя некоторое время после ее появления на сети, указал мне на серьезные пробелы в рассуждениях, и помог мне исправить их. Ссылка на статью А. Зайденберга была мне сообщена анонимным рецензентом в "Функциональном анализе и приложениях" (который статью отклонил, поскольку для этого журнала одного нового результата на четыре страницы текста недостаточно).

References

[AC] N. Bourbaki, *Algèbgre Commutative, Ch. 5*, Hermann, Paris, 1964.

[B] A. Beauville, *Symplectic singularities*, Invent. Math. **139** (2000), 541–549.

[S] A. Seidenberg, *Derivations and integral closure*, Pacific J. of Math. **116** (1966), 167–173.

МИАН им. В.Стеклова
Мсоква, СССР
E-mail: kaledin@mccme.ru