ПРОИЗВОДНЫЕ КАТЕГОРИИ ТРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ ФАНО

АЛЕКСАНДР КУЗНЕЦОВ

В.А.Исковских, в связи с 70-летием

Аннотация. В работе рассматриваются производные категории когерентных пучков на трехмерных многообразиях Фано с числом Пикара 1 и описывается странная связь между производными категориями различных многообразий этого типа. В Приложении обсуждается связь кольца алгебраических циклов на гладком проективном многообразии с группой Гротендика его производной категории.

1. Введение

Гладкое собственное связное алгебраическое многообразие V называется многообразием Фано, если его антиканонический класс $-K_V$ обилен. В размерности 1 единственным многообразием Фано является проективная прямая $\mathbb{P}^1$. В размерности 2 многообразия Фано известны как поверхности дель Пеццо. Существует 10 деформационных классов таких поверхностей — проективная плоскость с не более чем 8 раздутыми точками (в общем положении) и квадрика.

Амбициозный программа классификации трехмерных многообразий Фано была начата Дж.Фано в начале 20-го века и была по большей части завершена В.А.Исковских в 1979 году [Is]. Последний штрих был добавлен Мукаи и Умемурой в 1983 году [MU]. В высших размерностях классификация не завершена.

Между многообразиями Фано существует множество взаимосвязей, помогающих в вопросах классификации. Например, гиперплоское сечение n-мерного многообразия Фано V является многообразием Фано размерности $n-1$, если антиканонический класс V достаточно велик. Это обстоятельство весьма полезно для классификации многообразий Фано с большим антиканоническим классом. С другой стороны, известно множество бирациональных преобразований между разными многообразиями Фано одинаковой размерности, что тоже немаловажно. Например, исходный подход к классификации, предложенный Фано и разработанный Исковских, основан на изучении таких преобразованиях (наиболее важным из которых является двойная проекция из прямой).

Цель настоящей работы — показать существование взаимосвязей между некоторыми многообразиями Фано на уровне производных категорий. Мы рассматриваем с одной стороны трехмерные многообразия Фано индекса 2 и степени d, а с другой стороны, трехмерные многообразия Фано индекса 1 и степени $4d+2$. В их производных категориях когерентных пучков мы находим исключительные пары векторных расслоений и рассматриваем возникающие полуортогональные разложения. Основным наше наблюдение состоит в том, что нетривиальные компоненты этих разложений оказываются эквивалентны.

На самом деле, это огрубленная формулировка. Хорошо известно, что как правило многообразия Фано данного типа параметризуются нетривиальным многообразием модулей, поэтому рассматриваемые нами компоненты их производных категорий вообще говоря тоже варьируются. Поэтому, формулировку следует уточнить, сказав, что в произведении многообразий модулей указанных типов многообразий Фано существует соответствие, точки которого соответствуют парам

Исследование производилось при частичной поддержке грантов РФФИ 05-01-01034, 07-01-00051 и 07-01-92211, гранта INTAS 05-1000008-8118, Фонда содействия отечественной науке, и гранта Пьера Делиня.

трехмерных многообразий Фано с эквивалентными нетривиальными компонентами производных категорий. Изучение структуры этого соответствия представляет собой интересный вопрос. Мы предполагаем, что оно доминантно над обоими многообразиями модулей и приводим некоторые соображения по поводу его устройства.

Проверка описанной выше связи производных категорий довольно сложна (на самом деле, в настоящий момент она проведена лишь для $d = 3, 4, 5$, в то время как случай $d = 1, 2$ все еще под вопросом), но гораздо более сложным вопросом представляется понять *почему* такого рода связь существует. Мы считаем, что любое продвижение в этом направлении будет полезным для понимания структуры многообразий Фано и их классификации в высших размерностях.

2. Классификация трехмерных многообразий Фано

Замечательным современным изложением классификации многообразий Фано является работа [IP]. Напомним вкратце наиболее важные для нас результаты в этом направлении. Мы будем работать над алгебраически замкнутым полем k нулевой характеристики.

Наиболее важным дискретным инвариантом многообразия Фано V является его решетка Пикара $\mathsf{Pic}\, V$, снабженная формой пересечения и выделенным элементом (каноническим классом). В данной работе мы прежде всего интересуемся (наиболее важным) случаем, когда $\mathsf{Pic}\, V = \mathbb{Z}$. В этом случае выделенный элемент описывается положительным числом i_V, таким что

$$K_V = -i_V H,$$

где H — положительная образующая группы $\mathsf{Pic}\, V$, а форма пересечения полностью определяется положительным числом

$$d_V = H^{\dim V}.$$

Эти инварианты известны как индекс и степень многообразия V соответственно.

Наиболее общим результатом об индексе является следующая

Теорема 2.1 ([Fu]). *Если V — многообразие Фано индекса i_V, то $i_V \le \dim V + 1$. Более того,*

- *если $i_V = \dim V + 1$, то $V = \mathbb{P}^n$;*
- *если $i_V = \dim V$, то $V = Q^n \subset \mathbb{P}^{n+1}$.*

В частности, для трифолдов (то есть трехмерных многообразий) Фано, получаем

Следствие 2.2. *Если V — трифолд Фано, то $i_V \le 4$. Более того*

- *если $i_V = 4$, то $V = \mathbb{P}^3$;*
- *если $i_V = 3$, то $V = Q^3 \subset \mathbb{P}^4$.*

Трифолды Фано индекса 2 известны как трифолды дель Пеццо (они так называются потому, что их гиперплоские сечения являются поверхностями дель Пеццо).

Теорема 2.3. *Пусть V — трифолд Фано с $\mathsf{Pic}\, V = \mathbb{Z}$ индекса $i_V = 2$ и степени d_V. Тогда*

$$1 \le d_V \le 5$$

и для каждого $1 \le d \le 5$ существует единственный деформационный класс трифолдов Фано Y_d с $\mathsf{Pic}\, Y_d = \mathbb{Z}$ индекса 2 и степени d. Они имеют следующее явное описание:

- *$Y_5 = \mathsf{Gr}(2, 5) \cap \mathbb{P}^6 \subset \mathbb{P}^9$ — линейное сечение коразмерности 3 в грассманиане $\mathsf{Gr}(2, 5)$ относительно плюккерова вложения;*
- *$Y_4 = Q \cap Q' \subset \mathbb{P}^5$ — пересечегие двух 4-мерных квадрик;*
- *$Y_3 \subset \mathbb{P}^4$ — кубическая гиперповерхность;*
- *$Y_2 \to \mathbb{P}^3$ — двулистное накрытие разветвленное в квартике;*

- Y_1 — *гиперповерхность степени* 6 *во взвешенном проективном пространстве* $\mathbb{P}(3,2,1,1,1)$.

Пусть теперь V — трифолд Фано индекса 1. Его общее антиканоническое сечение $S \subset V$ — К3-поверхность, обладающая поляризацией $H_S = H_{|S}$. Следовательно

$$d_V = H^3 = H_S^2 = 2g_V - 2$$

для некоторого целого числа $g_V \geq 2$, известного как sf род V.

Теорема 2.4. *Пусть V — трифолд Фано с $\mathsf{Pic}\, V = \mathbb{Z}$ индекса $i_V = 1$ и рода g_V. Тогда*

$$2 \leq g_V \leq 12, \qquad g_V \neq 11$$

и для каждого из таких g существует единственный деформационный класс трифолдов Фано X_{2g-2} с $\mathsf{Pic}\, X_{2g-2} = \mathbb{Z}$ индекса 1 и рода g. Они имеют следующее явное описание:

- $X_{22} \subset \mathbb{P}^{13}$ — *схема нулей глобального сечения векторного расслоения* $\Lambda^2\mathcal{U}^* \oplus \Lambda^2\mathcal{U}^* \oplus \Lambda^2\mathcal{U}^*$ *на грассманиане* $\mathsf{Gr}(3,7)$, *где* $\mathcal{U}$ — *тавтологическое подрасслоение ранга* 3*;*
- $X_{18} = \mathsf{G}_2\mathsf{Gr}(2,7) \cap \mathbb{P}^{11} \subset \mathbb{P}^{13}$, *где* $\mathsf{G}_2\mathsf{Gr}(2,7)$ — *минимальное компактное однородное пространство простой алгебраической группы типа* G_2, *которое реализуется как схема нулей глобального сечения векторного расслоения* $\mathcal{U}^{\perp}(1)$ *на грассманиане* $\mathsf{Gr}(2,7)$*;*
- $X_{16} = \mathbb{P}^{10} \cap \mathsf{SGr}(3,6) \subset \mathbb{P}^{13}$ — *линейное сечение коразмерности* 3 *симплектического лагранжева грассманиана* $\mathsf{SGr}(3,6)$ *относительно плюккерова вложения;*
- $X_{14} = \mathbb{P}^9 \cap \mathsf{Gr}(2,6) \subset \mathbb{P}^{14}$ — *линейное сечение коразмерности* 5 *грассманиан* $\mathsf{Gr}(2,6)$ *относительно плюккерова вложения;*
- $X_{12} = \mathbb{P}^8 \cap \mathsf{OGr}_+(5,10) \subset \mathbb{P}^{15}$ — *линейное сечение коразмерности* 7 *связной компоненты ортогонального лагранжева грассманиана* $\mathsf{OGr}_+(5,10)$ *относительно полуспинорного вложения;*
- $X_{10} = \mathbb{P}^7 \cap Q \cap \mathsf{Gr}(2,5) \subset \mathbb{P}^9$ — *квадратичное сечение линейного сечения коразмерности* 2 *грассманиана* $\mathsf{Gr}(2,5)$ *относительно плюккерова вложения; либо* $X_{10} \to Y_5$ — *двулистное накрытие разветвленное в квадрике;*
- $X_8 = Q \cap Q' \cap Q'' \subset \mathbb{P}^6$ — *пересечение трех* 5*-мерных квадрик;*
- $X_6 = Q \cap F_3 \subset \mathbb{P}^5$ — *пересечение квадрики и кубики;*
- $X_4 \subset \mathbb{P}^4$ — *кваритика; либо* $X_4 \to Q$ — *двулистное накрытие квадрики* $Q \subset \mathbb{P}^4$, *разветвленное в пересечении* Q *с квартикой;*
- $X_2 \to \mathbb{P}^3$ — *двулистное накрытие разветвленное в секстике.*

Нам также понадобится следующий результат, принадлежащий Ш. Мукаи.

Теорема 2.5 ([M]). *Предположим, что род g трифолда Фано X_{2g-2} представляется в виде произведения $g = r \cdot s$ двух целых чисел. Тогда на X_{2g-2} существует единственное стабильное векторное расслоение $\mathcal{E}_r$ ранга r с $c_1(\mathcal{E}_r) = -H$ и $c_2(\mathcal{E}_r) = \frac{1}{2}H^2 + (r-s)L$, где L — класс прямой на X_{2g-2}. Более того, расслоение $\mathcal{E}_r$ исключительно и $H^\bullet(X, \mathcal{E}_r) = 0$.*

Определение исключительного расслоения будет дано ниже (см. определение 3.2).

Замечание 2.6. Применяя теорему Мукаи к трифолду Фано X_{2g-2} с $g \geq 6$, мы получим фекторное расслоение, являющееся ограничением тавтологического расслоения с соответствующего грассманиана.

3. Связь производных категорий

Для алгебраического многообразия V через $\mathcal{D}^b(V)$ мы обозначаем ограниченную производную категорию когерентных пучков на V. Напомним, что категория $\mathcal{D}^b(V)$ триангулирована. Мы всегда будем предполагать, что V гладко и проективно.

Определение 3.1 ([BK, BO1]). Полуортогональное разложение триангулированной категории $\mathcal{T}$ — это последовательность полных триангулированных подкатегорий $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$ в $\mathcal{T}$, такая что $\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathcal{C}_i, \mathcal{C}_j) = 0$ при всех $i > j$, и для всякого объекта $T \in \mathcal{T}$ существует цепочка морфизмов $0 = T_n \to T_{n-1} \to \dots \to T_1 \to T_0 = T$, такая что конус морфизма $T_k \to T_{k-1}$ содержится в $\mathcal{C}_k$ для каждого $k = 1, 2, \dots, n$.

Мы будем обозначать через $\mathcal{T} = \langle \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_n \rangle$ полуортогональное разложение триангулированной категории $\mathcal{T}$ с компонентами $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_n$.

Определение 3.2 ([B]). Объект $F \in \mathcal{T}$ называется исключительным, если $\mathsf{Hom}(F, F) = \mathsf{k}$ и для всех $p \neq 0$ $\mathsf{Ext}^p(F, F) = 0$. Набор исключительных объектов $(F_1, \dots, F_m)$ назывется исключительным набором, если $\mathsf{Ext}^p(F_l, F_k) = 0$ при всех $l > k$ и всех $p \in \mathbb{Z}$.

Предложение 3.3 ([BO1]). *Всякий исключительный набор $F_1, \dots, F_m$ in $\mathcal{D}^b(V)$ дает полуортогональное разложение*

$$\mathcal{D}^b(V) = \langle \mathcal{C}, F_1, \dots, F_m \rangle$$

где $\mathcal{C} = \langle F_1, \dots, F_m \rangle^\perp = \{F \in \mathcal{D}^b(V) \mid \mathsf{Ext}^\bullet(F_k, F) = 0$ при всех $1 \le k \le m\}$, а все остальные компоненты — подкатегории в $\mathcal{D}^b(V)$ порожденные объектами F_k (каждая из них эквивалентна $\mathcal{D}^b(\mathsf{k})$ — производной категории k-векторных пространств).

Пусть V — многообразие Фано индекса $i = i_V$. Следующий результат хорошо известен.

Лемма 3.4. *Пусть V — многообразие Фано индекса $i = i_V$. Тогда набор линейных расслоений $\mathcal{O}_V, \mathcal{O}_V(H), \dots, \mathcal{O}_V((i-1)H)$ в $\mathcal{D}^b(V)$ является исключительным.*

Доказательство: Заметим, что $H^p(V, \mathcal{O}_V(-kH)) = 0$ при $1 \le k \le i-1$ и всех p по теореме Кодаиры о занулении, поэтому $\mathsf{Ext}^\bullet(\mathcal{O}_V(lH), \mathcal{O}_V(kH)) = 0$ при $0 \le k < l \le i-1$. Аналогично, $H^p(V, \mathcal{O}_V) = 0$ при всех $p > 0$ по теореме Кодаиры о занулении, а $H^0(V, \mathcal{O}_V) = \mathsf{k}$ так как V связно. Поэтому всякое линейное расслоение на V исключительно. □

Следствие 3.5. *Для всякого многообразия Фано V существует следующее полуортогональное разложение*

$$\mathcal{D}^b(V) = \langle \mathcal{B}_V, \mathcal{O}_V, \mathcal{O}_V(H), \dots, \mathcal{O}_V((i-1)H) \rangle,$$

где $i = i_V$ — индекс V, а $\mathcal{B}_V = \{F \in \mathcal{D}^b(V) \mid H^\bullet(V, F(-kH)) = 0$ при всех $0 \le k \le i-1\}$.

В частности, для трифолдов Фано Y_d индекса 2 мы получаем полуортогональное разложение

$$\mathcal{D}^b(Y_d) = \langle \mathcal{B}_{Y_d}, \mathcal{O}_V, \mathcal{O}_V(H) \rangle.$$

Для трифолдов Фано X_{2g-2} индекса 1 и четного рода $g = 2t$ рассмотрим векторное расслоение $\mathcal{E}_2$ ранга 2 построенное в теореме 2.5. Пользуясь результатами этой теоремы, получаем

Лемма 3.6. *Пусть $X = X_{2g-2}$ — трифолд Фано индекса 1 и четного рода $g = 2t$. Пусть $\mathcal{E} = \mathcal{E}_2$ — векторное расслоение ранга 2 на X, построенное в теореме 2.5. Тогда $(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X)$ — исключительная пара на X и существует полуортогональное разложение*

$$\mathcal{D}^b(X_{2g-2}) = \langle \mathcal{A}_{X_{2g-2}}, \mathcal{E}, \mathcal{O}_{X_{2g-2}} \rangle,$$

где $\mathcal{A}_{X_{2g-2}} = \{F \in \mathcal{D}^b(X_{2g-2}) \mid H^\bullet(X_{2g-2}, F) = \mathsf{Ext}^\bullet(\mathcal{E}, F) = 0\}$.

Теперь мы готовы сформулировать основную гипотезу.

Гипотеза 3.7. *Обозначим через $\mathcal{MF}^i_d$ многообразие модулей трифолдов Фано индекса i и степени d. Тогда существует соответствие $Z_d \subset \mathcal{MF}^2_d \times \mathcal{MF}^1_{4d+2}$, доминантное над каждым из сомножителей, причем тако, что для всякой точки $(Y_d, X_{4d+2}) \in Z_d$ существует эквивалентность категорий*

$$\mathcal{A}_{X_{4d+2}} \cong \mathcal{B}_{Y_d}.$$

Основным результатом, подтверждающим гипотезу является

Теорема 3.8. *Гипотеза* 3.7 *верна при* $d = 3, 4, 5$.

Доказательство теоремы 3.8 приводится в следующем разделе. Оно состоит в разборе каждого из случаев, см. следствия 4.3, 4.6 и 4.9. Пока же убедимся, что численные группы Гротендика категорий $\mathcal{A}_{X_{4d+2}}$ и $\mathcal{B}_{Y_d}$ изоморфны.

Для триангулированной категории $\mathcal{T}$ обозначим через $K_0(\mathcal{T})$ ее группу Гротендика. На ней определена билинейная форма Эйлера

$$\chi([F],[G]) = \sum_p (-1)^p \dim \mathsf{Ext}^p(F,G).$$

Численная группа Гротендика $K_0(\mathcal{T})_{num}$ определяется как фактор $K_0(\mathcal{T})_{num} := K_0(\mathcal{T})/\operatorname{\mathsf{Ker}}\chi$. Если $\mathcal{T} = \mathcal{D}^b(V)$ мы для краткости пишем $K_0(V)$ и $K_0(V)_{num}$ вместо $K_0(\mathcal{D}^b(V))$ и $K_0(\mathcal{D}^b(V))_{num}$.

Предложение 3.9. *For all* $1 \le d \le 5$ *there is an isomorphism of numerical Grothendieck groups*

$$K_0(\mathcal{A}_{X_{4d+2}})_{num} \cong K_0(\mathcal{B}_{Y_d})_{num}$$

compatible with the Euler bilinear forms.

Доказательство: Вычисление, основанное на теореме Римана–Роха.

Заметим, что в силу 5.8 характер Чженя $\mathsf{ch} : K_0(X_{2g-2})_{num} \to \oplus_{p=0}^3 H^{2p}(X_{2g-2}, \mathbb{Q})$ отождествляет численную группу Гротендика $K_0(X_{2g-2})_{num}$ с решеткой, порожденной элементами

$$\mathsf{ch}(\mathcal{O}_{X_{2g-2}}) = 1, \quad \mathsf{ch}(\mathcal{O}_H) = H - (g-1)L + \frac{g-1}{3}P, \quad \mathsf{ch}(\mathcal{O}_L) = L + \frac{1}{2}P, \quad \mathsf{ch}(\mathcal{O}_P) = P,$$

где P — класс точки. Далее, по теореме Римана–Роха форму Эйлера можно записать в виде

$$\chi(u,v) = \chi_0(u^* \cap v),$$

где $u \mapsto u^*$ — инволюция $\oplus_{p=0}^3 H^{2p}(X_{2g-2}, \mathbb{Q})$, действующая на $H^{2p}(X_{2g-2}, \mathbb{Q})$ умножением на $(-1)^p$, а χ_0 задается формулой

$$\chi_0(x + yH + zL + wP) = x + \frac{g+11}{6}y + \frac{1}{2}z + w.$$

Кроме того, $\mathsf{ch}(\mathcal{O}_{X_{2g-2}}) = 1$, и пользуясь теоремой 2.5 легко вычислить

$$\mathsf{ch}(\mathcal{E}) = 2 - H + \frac{g-4}{2}L - \frac{g-10}{12}P.$$

Отсюда следует, что

$$K_0(\mathcal{A}_{X_{2g-2}})_{num} = \left\langle 1, 2 - H + \frac{g-4}{2}L - \frac{g-10}{12}P \right\rangle^{\perp} = \left\langle 1 - \frac{g}{2}L + \frac{g-4}{4}P, H - \frac{3g-6}{2}L + \frac{7g-40}{12}P \right\rangle.$$

Вычисляя форму χ в этом базисе, заключаем, что

$$K_0(\mathcal{A}_{X_{2g-2}})_{num} \cong \mathbb{Z}^2, \qquad \chi_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1-g/2 & -g/2 \\ 3-g & 1-g \end{pmatrix}.$$

как решетка с билинейной формой.

Аналогично, в силу 5.8 характер Чженя $\mathsf{ch} : K_0(Y_d)_{num} \to \oplus_{p=0}^3 H^{2p}(Y_d, \mathbb{Q})$ отождествляет численную группу Гротендика $K_0(Y_d)_{num}$ с решеткой, порожденной элементами

$$\mathsf{ch}(\mathcal{O}_{Y_d}) = 1, \quad \mathsf{ch}(\mathcal{O}_H) = H - \frac{d}{2}L + \frac{d}{6}P, \quad \mathsf{ch}(\mathcal{O}_L) = L, \quad \mathsf{ch}(\mathcal{O}_P) = P,$$

и легко видеть, что форма χ_0 в этом случае задается формулой

$$\chi_0(x + yH + zL + wP) = x + \frac{d+3}{3}y + z + w.$$

Кроме того, $\mathsf{ch}(\mathcal{O}_{Y_d}) = 1$, $\mathsf{ch}(\mathcal{O}_{Y_d}(H)) = 1 + H + \frac{d}{2}L + \frac{d}{6}P$, поэтому

$$K_0(\mathcal{B}_{Y_d})_{num} = \left\langle 1, 1 + H + \frac{d}{2}L + \frac{d}{6}P \right\rangle^{\perp} = \left\langle 1 - L, H - \frac{d}{2}L + \frac{d-6}{6}P \right\rangle.$$

Вычисляя форму χ в этом базисе, заключаем, что

$$K_0(\mathcal{B}_{Y_d})_{num} \cong \mathbb{Z}^2, \qquad \chi_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1-d & -d \end{pmatrix}.$$

как решетка с билинейной формой.

Непосредственная проверка показывает, что для отображения $\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$, задаваемого матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

выполняется

$$A^T \cdot \chi_{\mathcal{B}} \cdot A = \begin{pmatrix} -d & -1-d \\ 1-2d & -1-2d \end{pmatrix}$$

что при $g = 2d + 2$ совпадает с матрицей $\chi_{\mathcal{A}}$. Значет отображение A дает искомый изоморфизм $K_0(\mathcal{B}_{Y_d})_{num} \cong K_0(\mathcal{A}_{X_{4d+2}})_{num}$ согласованный с билинейными формами. □

4. Случаи $d \geq 3$

В данном разделе мы докажем теорему 3.8, рассмотрев все случаи по отдельности.

4.1. Случай $d = 5$**.** Напомним, что трифолд Y_5 степени 5 является жестким, так что многообразие модулей $\mathcal{MF}_5^2$ состоит из одной точки. Напротив, трифолды X_{22} рода 12 варьируются в 6-мерном многообразии модулей $\mathcal{MF}_{22}^1$. Покажем, что соответствие $Z_5 \subset \mathcal{MF}_5^2 \times \mathcal{MF}_{22}^1$ совпадает со всем произведением. Иными словами, проверим, что для любого многообразия X_{22} и для единственного многообразия Y_5 существует эквивалентность $\mathcal{A}_{X_{22}} \cong \mathcal{B}_{Y_5}$. Для этого мы опишем явным образом обе эти категории.

Для многообразий X_{22} нам понадобится следующий результат. Пусть $\mathcal{E}_2$ и $\mathcal{E}_3$ — векторные расслоения ранга 2 и 3 на $X = X_{22}$, построенные в теореме 2.5 для разложений рода $g_X = 12 = 2{\cdot}6 = 3{\cdot}4$. Пусть $W = H^0(X, \mathcal{E}_3^*)^* \cong \mathsf{k}^7$, так что $X \subset \mathsf{Gr}(3, W)$.

Теорема 4.1 ([K1, K2])**.** *Расслоения $W/\mathcal{E}_3 \otimes \mathcal{O}_X(-1), \mathcal{E}_3^* \otimes \mathcal{O}_X(-1), \mathcal{E}_2, \mathcal{O}_X$ образуют полный исключительный набор, так что*

$$\mathcal{D}^b(X_{22}) = \langle W/\mathcal{E}_3 \otimes \mathcal{O}_X(-1), \mathcal{E}_3^* \otimes \mathcal{O}_X(-1), \mathcal{E}_2, \mathcal{O}_X \rangle.$$

Более того, $\mathsf{Hom}(W/\mathcal{E}_3 \otimes \mathcal{O}_X(-1), \mathcal{E}_3^* \otimes \mathcal{O}_X(-1)) = \mathsf{k}^3$, $\mathsf{Ext}^{\neq 0}(W/\mathcal{E}_3 \otimes \mathcal{O}_X(-1), \mathcal{E}_3^* \otimes \mathcal{O}_X(-1)) = 0$, *так что*

$$\mathcal{A}_{X_{22}} \cong \mathcal{D}^b(\mathsf{Q}_3),$$

где $\mathsf{Q}_3 = \left(\bullet \overset{\longrightarrow}{\underset{\longrightarrow}{\longrightarrow}} \bullet\right)$ *— колчан Кронекера с 3 стрелками.*

С другой стороны, для многообразия Y_5 описание производной категории было найдено Д.Орловым. Пусть $\mathcal{U}$ — ограничение на $Y = Y_5$ тавтологического расслоения с грассманиана $\mathsf{Gr}(2,5)$. Пусть $W' = H^0(Y, \mathcal{U}^*)^* \cong \mathsf{k}^5$, так что $Y \subset \mathsf{Gr}(2, W')$.

Теорема 4.2 ([Or]). *Расслоения $W'/\mathcal{U} \otimes \mathcal{O}_Y(-1), \mathcal{U}, \mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_Y(1)$ образуют полный исключительный набор, так что*
$$\mathcal{D}^b(Y_5) = \langle W'/\mathcal{U} \otimes \mathcal{O}_Y(-1), \mathcal{U}, \mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_Y(1)\rangle.$$
Более того, $\mathsf{Hom}(W'/\mathcal{U} \otimes \mathcal{O}_Y(-1), \mathcal{U}) = \mathsf{k}^3$, $\mathsf{Ext}^{\neq 0}(W'/\mathcal{U} \otimes \mathcal{O}_Y(-1), \mathcal{U}) = 0$, так что $\mathcal{B}_{Y_5} \cong \mathcal{D}^b(\mathsf{Q}_3)$.

Пользуясь этими результатами, немедленно получаем искомую эквивалентность.

Следствие 4.3. *Для всякого многообразия X_{22} рода 12 и для единственного дель Пеццо трифолда Y_5 степени 5 существует эквивалентность категорий $\mathcal{A}_{X_{22}} \cong \mathcal{D}^b(\mathsf{Q}_3) \cong \mathcal{B}_{Y_5}$.*

4.2. Случай $d = 4$. Напомним, что многообразие модулей $\mathcal{MF}^2_4$ трифолдов дель Пеццо Y_4 степени 4 изоморфно многообразию модулей $\mathcal{M}_2$ кривых рода 2. Изоморфизм строится следующим образом. Пусть $Y = Y_4 = Q \cap Q' \subset \mathbb{P}^5$. Рассмотрим пучок квадрик $\{Q_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{P}^1}$ порожденный квадриками Q и Q'. Если Y гладко, то общая квадрика Q_λ в пучке гладка и существует ровно 6 различных точек $\lambda_1, \dots, \lambda_6 \in \mathbb{P}^1$ для которых квадрика Q_λ вырождена. Рассмотрим двулистное накрытие $C(Y) \to \mathbb{P}^1$, разветвленное в точках λ_i. Тогда $C(Y)$ — гладкая кривая рода 2.

Теорема 4.4 ([BO1, K6]). *Отображение $\mathcal{MF}^2_4 \to \mathcal{M}_2$, $Y \mapsto C(Y)$ является изоморфизмом. Более того, существует эквивалентность категорий $\mathcal{B}_{Y_4} \cong \mathcal{D}^b(C(Y_4))$.*

Наша цель — показать, что многообразия X_{18} ведут себя аналогично. В самом деле, напомним, что по определению $X = X_{18}$ — линейное сечение коразмерности 2 в $\mathsf{G}_2\mathsf{Gr}(2,7)$. Пусть $\{\mathcal{X}_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{P}^1}$ — пучок гиперплоских сечений грассманиана $\mathsf{G}_2\mathsf{Gr}(2,7)$, проходящих через X. Поскольку проективно двойственным многообразием к $\mathsf{G}_2\mathsf{Gr}(2,7)$ является гиперповерхность степени 6, существует ровно 6 различных точек $\lambda_1, \dots, \lambda_6 \in \mathbb{P}^1$, для которых $\mathcal{X}_\lambda$ особо. Рассмотрим двулистное накрытие $C(X) \to \mathbb{P}^1$, разветвленное в точках λ_i. Тогда $C(X)$ — гладкая кривая рода 2. Тем самым, мы получаем отображение $\mathcal{MF}^1_{18} \to \mathcal{M}_2$, $X \mapsto C(X)$.

Теорема 4.5 ([K5]). *Существует эквивалентность категорий $\mathcal{B}_{X_{18}} \cong \mathcal{D}^b(C(X_{18}))$.*

Пользуясь этими результатами, получаем искомую эквивалентность для $d = 4$. Пусть $Z_4 \subset \mathcal{MF}^2_4 \times \mathcal{MF}^1_{18}$ — график морфизма $\mathcal{MF}^1_{18} \to \mathcal{M}_2 \cong \mathcal{MF}^2_4$.

Следствие 4.6. *Для всякой пары трифолдов $(Y_4, X_{18}) \in Z_4 \subset \mathcal{MF}^2_4 \times \mathcal{MF}^1_{18}$ существует эквивалентность категорий $\mathcal{A}_{X_{18}} \cong \mathcal{B}_{Y_4}$.*

4.3. Случай $d = 3$. В предыдущих двух случаях нам удалось явно описать сравниваемые категории. В случае $d = 3$ это не представляется возможным. Единственное, что удается — доказать эквивалентность.

Напомним, что по определению всякое многообразие $X = X_{14}$ является линейным сечением коразмерности 5 в $\mathsf{Gr}(2,6)$. Пусть W — шестимерное векторное пространство, так что $\mathsf{Gr}(2,6) = \mathsf{Gr}(2,W) \subset \mathbb{P}(\Lambda^2 W)$. Тогда X определяется 5-мерным подпространством $A \subset \Lambda^2 W^*$ или, иными словами, инъективным отображением $\alpha : A \to \Lambda^2 W$, где A — фиксированное векторное пространство размерности 5. Обозначим соответствующий трифолд X_{14} через $X(\alpha)$.

С другой стороны, рассмотрим пространство $\mathbb{P}(\Lambda^2 W^*)$ кососимметрических форм на W. Рассмотрим в нем гиперповерхность, состоящую из вырожденных форм. Хорошо известно, что уравнение этой гиперповерхности задается пфаффианом. Отсюда видно, что это кубическая гиперповерхность. Мы будем обозначать ее через $\mathsf{Pf}(W)$ и называть пфаффовым многообразием. Естественно, пфаффово многообразие особо, его множество особых точек совпадает с множеством всех кососимметрических форм ранга 2 на W, то есть с грассманианом $\mathsf{Gr}(2,W^*) \subset \mathsf{Pf}(W) \subset \mathbb{P}(\Lambda^2 W^*)$. Однако, коразмерность множества особых точек в $\mathbb{P}(\Lambda^2 W^*)$ равна $14-8=6$, поэтому для общего α прообраз $\mathsf{Pf}(W)$ в $\mathbb{P}(A)$ является гладкой кубической гиперповерхностью, которую мы обозначим через $Y(\alpha)$. Далее, сопоставляя вырожденной кососимметрической форме ее ядро, мы получаем подрасслоение $K \subset W \otimes \mathcal{O}$ ранга 2 на гладкой части многообразия $\mathsf{Pf}(W)$. Пусть $E(\alpha) = \alpha^* K \otimes \mathcal{O}_{Y(\alpha)}(1)$, где в правой части α рассматривается как отображение $Y(\alpha) \to \mathsf{Pf}(W)$, а $\mathcal{O}_{Y(\alpha)}(1)$ — ограничение пучка $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(A)}(1)$.

Теорема 4.7 ([K3, K9]). *Отображение $X(\alpha) \mapsto (Y(\alpha), E(\alpha))$ задает изоморфизм многообразия модулей $\mathcal{MF}^1_{14}$ трифолдов Фано X_{14} рода 8 и многообразия модулей $\mathcal{MFI}^2_3(2)$ пар (Y,E), где Y — гладкая трехмерная кубика, а E — стабильное векторное расслоение на Y ранга 2, с $c_1(E)=0$, $c_2(E)=2L$ и $H^1(Y,E(-1))=0$. Для всякого α существует эквивалентность $\mathcal{B}_{X_{14}(\alpha)} \cong \mathcal{A}_{Y_3(\alpha)}$.*

Замечание 4.8. Расслоения E, фигурирующие в формулировке теоремы известны под называнием инстантонных расслоений заряда 2.

Пусть $Z_3 \subset \mathcal{MF}^2_3 \times \mathcal{MF}^1_{14}$ — график морфизма $\mathcal{MF}^1_{14} \cong \mathcal{MFI}^2_3(2) \to \mathcal{MF}^2_3$.

Следствие 4.9. *Для всякой пары трифолдов $(Y_3, X_{14}) \in Z_3 \subset \mathcal{MF}^2_3 \times \mathcal{MF}^1_{14}$ существует эквивалентность категорий $\mathcal{A}_{X_{14}} \cong \mathcal{B}_{Y_3}$.*

4.4. Геометрические соответствия. На самом деле, в работе [K3] доказано больше, чем просто эквивалентность категорий, утверждающаяся в теореме 4.7. Там построено геометрическое сответствие между многообразиями $X(\alpha)$ и $Y(\alpha)$.

Пусть $\mathbb{P}_{X(\alpha)}(\mathcal{E})$ — проективизация исключительного расслоения $\mathcal{E}$ ранга 2 на $X(\alpha)$. Так как $\mathcal{E}$ является ограничением тавтологического расслоения с грассманиана $\mathsf{Gr}(2,W)$, мы получаем естественное отображение $\mathbb{P}_{X(\alpha)}(\mathcal{E}) \to \mathbb{P}(W)$. С другой стороны, можно убедиться, что $H^0(Y(\alpha), E(\alpha)^* \otimes \mathcal{O}_{Y(\alpha)}(1)) \cong W^*$, поэтому существует также естественное отображение $\mathbb{P}_{Y(\alpha)}(E(\alpha)) \to \mathbb{P}(W)$.

Теорема 4.10 ([K3]). *Образы многообразий $\mathbb{P}_{X(\alpha)}(\mathcal{E})$ и $\mathbb{P}_{Y(\alpha)}(E(\alpha))$ в $\mathbb{P}(W)$ совпадают с гиперповерхностью $M \subset \mathbb{P}(W)$ степени 4, имеющей особенность вдоль кривой $C \subset M$ рода 26. Отображения $\mathbb{P}_{X(\alpha)}(\mathcal{E}) \to M$ и $\mathbb{P}_{Y(\alpha)}(E(\alpha)) \to M$ являются малыми стягиваниями и индуцируют изоморфизмы над дополнением к C. Более того, индуцированный бирациональный изоморфизм $\mathbb{P}_{X(\alpha)}(\mathcal{E}) \dashrightarrow \mathbb{P}_{Y(\alpha)}(E(\alpha))$ является флопом.*

Замечание 4.11. Гиперповерхность $M \subset \mathbb{P}(W)$ известна под назыанием *квартики да Палатини*. Кривая C параметризует прямые на $X(\alpha)$ и, в то же время, прямые подскока расслоения $E(\alpha)$ на $Y(\alpha)$ (то есть прямые $L \subset Y(\alpha)$, для которых $E(\alpha)_{|L} \cong \mathcal{O}_L(1) \oplus \mathcal{O}_L(-1)$).

Есть основания ожидать, что аналогичное геометрическое соответствие существует и для других значений d. Например, обозначим через $\mathcal{MFB}^1_{4d+2}(t)$ многообразие модулей пар (X,F), где X — трифолд Фано индекса 1 и степени $4d+2$, а F — стабильное векторное расслоение на X ранга 2 с $c_1(F) = -H$, $c_2(F) = (d+2+t)L$ (заметим, что при $t=0$ в силу теоремы 2.5 такое расслоение только одно — исключительное расслоение $\mathcal{E}_2$, поэтому $\mathcal{MFB}^1_{4d+2}(0) = \mathcal{MF}^1_{4d+2}$). Пользуясь теоремой Римана–Роха (см. доказательство предложения 3.9) можно проверить, что для всяких d, t и любой пары $(X,F) \in \mathcal{MF}^1_{4d+2}(t)$ выполнено

$$\dim H^0(X, F^*) = d+3-t,$$

следовательно существует отображение $\mathbb{P}_X(F) \to \mathbb{P}^{d+2-t}$. Более того, из того, что $c_1(F^*) = H$, $c_2(F^*) = (d+2-t)L$ следует, что степень образа многообразия $\mathbb{P}_X(F)$ в $\mathbb{P}^{d+2-t}$ равна

$$\deg \mathbb{P}_X(F) = c_1(F^*)^3 - 2c_1(F^*)c_2(F^*) = H^3 - 2(d+2-t)HL = (4d+2) - 2(d+2-t) = 2d-2+2t.$$

Аналогично, пусть $\mathcal{MFI}^1_d(k)$ — многообразие модулей пар (Y, E), где Y — трифолд Фано индекса 2 и степени d, а E — инстантонное расслоение заряда k на Y, то есть стабильное векторное расслоение ранга 2 с $c_1(E) = 0$, $c_2(E) = kL$ и $H^1(Y, E(-1)) = 0$ (см. [K3]). Пользуясь теоремой Римана–Роха (см. доказательство предложения 3.9) можно проверить, что для всяких d, k и любой пары $(Y, E) \in \mathcal{MFI}^2_d(k)$ выполнено

$$\dim H^0(Y, E^*(1)) = 2d - 2k + 4,$$

следовательно существует отображение $\mathbb{P}_Y(E) \to \mathbb{P}^{2d-2k+3}$. Более того, из того, что $c_1(E^*(1)) = 2H$, $c_2(E(1)) = H^2 + kL$, следует, что степень образа многообразия $\mathbb{P}_Y(E)$ в $\mathbb{P}^{2d-2k+3}$ равна

$$\deg \mathbb{P}_Y(E) = c_1(E^*(1))^3 - 2c_1(E^*(1))c_2(E^*(1)) = 8H^3 - 4H(H^2 + kL) = 8d - 4(d + k) = 4d - 4k.$$

Отметим, что при $d + 1 = 2k - t$ и размерность и степень совпадают.

Гипотеза 4.12. *Для всех $1 \le d \le 5$ существуют целые числа $k, t \ge 0$, удовлетворяющие равенству $d+1 = 2k-t$, для которых существует изоморфизм $\xi : \mathcal{MFI}^2_d(k) \cong \mathcal{MFB}^1_{4d+2}(t)$, такой что если $(X, F) = \xi(Y, E)$, то существует изоморфизм $h : H^0(Y, E^*(1)) \xrightarrow{\sim} H^0(X, F^*)$ и бирациональный изоморфизм $\theta : \mathbb{P}_X(F) \dashrightarrow \mathbb{P}_Y(E)$, так что диаграмма*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}_X(F) \arrow[r, dashed, "\theta"] \arrow[d] & \mathbb{P}_Y(E) \arrow[d] \\ \mathbb{P}(H^0(X, F^*)^*) \arrow[r, "h", "\cong"'] & \mathbb{P}(H^0(Y, E^*(1))^*) \end{tikzcd}$$

коммутативна. Более того, существует эквивалентность категорий $\mathcal{A}_X \cong \mathcal{B}_Y$, так что соответствие $Z_d \subset \mathcal{MF}^2_d \times \mathcal{MF}^1_{4d+2}$ — образ графика изоморфизма $\xi : \mathcal{MF}^2_d(k) \to \mathcal{MFB}^1_{4d+2}(t)$.

Замечание 4.13. При $d = 3$ в силу теоремы 4.10 следует взять $k = 2$, $t = 0$. При $d = 5$ есть основания считать, что $k = 4$, $t = 2$ подойдут.

5. Приложение. Группа Гротендика и алгебраические циклы

Пусть X — гладкое проективное многообразие размерности n. Обозначим через $A^p(X)$ группу алгебраических циклов коразмерности p на X по модклю рациональной эквивалентности. Пусть $A^\bullet(X) = \oplus_{p=0}^n A^p(X)$ — кольцо Чжоу. Далее, обозначим через $K_0(X)$ группу Гротендика категории когерентных пучков на X (эквивалентно, производной категории $\mathcal{D}^b(X)$). Рассмотрим отображение, задаваемое характером Чженя $\mathsf{ch} : K_0(X) \to A^\bullet(X) \otimes \mathbb{Q}$. Хорошо известно, что ch индуцирует изоморфизм $\mathbb{Q}$-векторных пространств $K_0(X) \otimes \mathbb{Q} \to A^\bullet(X) \otimes \mathbb{Q}$.

С другой стороны, рассмотрим в обоих случаях численную эквивалентность. Напомним, что алгебраический цикл $a \in A^p(X)$ численно эквиалентен нулю, если он лежит в ядре билинейной формы пересечения

$$A^\bullet(X) \otimes A^\bullet(X) \xrightarrow{\cdot} A^\bullet(X) \xrightarrow{\mathrm{pr}} A^n(X) \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z}.$$

Иначе говоря, если он пересекается по нулю с любым циклом из $A^{n-p}(X)$. Пусть $A^\bullet(X)_{num} = \oplus A^p(X)_{num}$ — кольцо алгебраических циклов по модулю численной эквивалентности. Заметим, что любой элемент кручения в $A^\bullet(X)$ численно тривиален, поэтому $A^\bullet(X)_{num}$ не имеет кручения.

Аналогично, класс $v \in K_0(X)$ численно эквиалентен нулю, если он лежит в ядре билинейной формы Эйлера

$$\chi : K_0(X) \otimes K_0(X) \longrightarrow \mathbb{Z}, \qquad \chi([F], [G]) = \sum_i (-1)^i \dim \mathsf{Ext}^i(F, G).$$

Пусть $K_0(X)_{num} := K_0(X)/\operatorname{\mathsf{Ker}} \chi$ — численная группа Гротендика.

Теорема Римана–Роха показывает, что ядро формы Эйлера совпадает с прообразом относительно характера Чженя подкольца в $A^\bullet(X) \otimes \mathbb{Q}$, сотоящего из численно тривиальных циклов. Следовательно, ch индуцирует отображение $K_0(X)_{num} \to A^\bullet(X)_{num} \otimes \mathbb{Q}$, которое мы также обозначаем ch, и индуцирует изоморфизм $\mathbb{Q}$-векторных пространств $K_0(X)_{num} \otimes \mathbb{Q} \cong A^\bullet(X)_{num} \otimes \mathbb{Q}$.

Для всякого p-цикла $Z = \sum a_i S_i$ положим $[\mathcal{O}_Z] := \sum a_i [\mathcal{O}_{S_i}] \in K_0(X)$. Заметим, что $[\mathcal{O}_Z]$ существенно зависит от цикла Z, а не только от его класса рациональной или численной эквивалентности. Чуть ниже мы покажем, как можно ибавиться от такой зависимости (см. замечание 5.3).

Определение 5.1. Будем говорить, что гладкое проективное n-мерное многообразие X является АК-согласованым, если для всякого набора циклов Z_p^i на X, $0 \le p \le n$, $1 \le i \le m_p$ такого что циклы $\operatorname{codim} Z_p^i = p$ and $\{Z_1^p, Z_2^p, \dots, Z_{m_p}^p\}$ образуют базис в $A^p(X)_{num}$, классы $[\mathcal{O}_{Z_i^p}]$, $0 \le p \le n$, $1 \le i \le m_p$ образуют $\mathbb{Z}$-базис в $K_0(X)_{num}$.

Если алгебраическое многообразие X АК-согласовано, то его численную группу Гротендика легко описать. Для этого достаточно выбрать базисы в группах алгебраических циклов и рассмотреть их структурные пучки. Безусловно, такое описание может быть весьма полезным. Цель настоящего раздела — найти легко проверяемый критерий АК-согласованости.

Начнем с приготовлений. Рассмотрим две фильтрации на $K_0(X)_{num}$. Первая индуцирована фильтрацией по коразмерности на $A^\bullet(X)$:

$$F^p K_0(X)_{num} = \mathsf{ch}^{-1}(\oplus_{q=p}^n A^q(X)_{num} \otimes \mathbb{Q}).$$

Вторая индуцирована коразмерностью носителя

$$S^p K_0(X)_{num} = \langle\ [G] \mid \operatorname{codim}\operatorname{supp}(G) \ge p\ \rangle,$$

где $\langle\quad\rangle$ обозначает линейную оболочку. Будем называть фильтрацию $F^\bullet$ индуцированной фильтрацией, а $S^\bullet$ — фильтрацией по носителю. Обозначим через $\mathsf{gr}_F^p K_0(X)_{num}$ и $\mathsf{gr}_S^p K_0(X)_{num}$ присоединенные градуированные факторы этих фильтраций.

Заметим, что для всякого $G \in \mathcal{D}^b(X)$ с $\operatorname{codim}\operatorname{supp}(G) \ge p$ имеем $\mathsf{ch}(G) \in \oplus_{q\ge p} A^q(X)_{num} \otimes \mathbb{Q}$, поэтому $S^p K_0(X)_{num} \subset F^p K_0(X)_{num}$, и возникает следующая коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
S^p K_0(X)_{num} \arrow[r, hook] & F^p K_0(X)_{num} \arrow[r, "\mathsf{ch}"] & \oplus_{q\ge p} A^q(X)_{num} \otimes \mathbb{Q} \\
S^{p+1} K_0(X)_{num} \arrow[r, hook] \arrow[u, hook] & F^{p+1} K_0(X)_{num} \arrow[r, "\mathsf{ch}"] \arrow[u, hook] & \oplus_{q\ge p+1} A^q(X)_{num} \otimes \mathbb{Q} \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Переходя к присоединенным факторам, получаем цепочку отображений

$$\mathsf{gr}_S^p K_0(X)_{num} \xrightarrow{\ i_p\ } \mathsf{gr}_F^p K_0(X)_{num} \xrightarrow{\ \mathsf{ch}_p\ } A^p(X)_{num} \otimes \mathbb{Q}$$

Здесь ch_p — p-ый коэффициент характера Чженя, а i_p — отображение, индуцированное тождественным автоморфизмом $K_0(X)_{num}$. Отсюда следует, что $\mathsf{ch}_p : \mathsf{gr}_F^p K_0(X)_{num} \otimes \mathbb{Q} \to A^p(X)_{num} \otimes \mathbb{Q}$ является изоморфизмом. Покажем, что обратное отображение определено над $\mathbb{Z}$.

Лемма 5.2. *Существует линйное отображение* $\mathsf{O}_p : A^p(X)_{num} \to \mathsf{gr}_F^p K_0(X)_{num}$, *обратное к* ch_p. *Более того,* $\mathsf{O}_p(Z) = [\mathcal{O}_Z] \bmod F^{p+1} K_0(X)_{num}$.

Доказательство: Для всякого p-цикла Z на X определим $\mathsf{O}_p(Z)$ как образ класса его структурного пучка $[\mathcal{O}_Z]$ в $\mathsf{gr}_F^p K_0(X)_{num}$. Так как

$$\mathsf{ch}(\mathcal{O}_Z) = Z + \text{члены большей чем } p \text{ коразмерности}, \tag{†}$$

имеем $[\mathcal{O}_Z] \in F^p K_0(X)_{num}$ и $\mathsf{ch}_p(\mathsf{O}_p(Z)) = Z$. Так как ch_p инъективен, заключаем, что O_p корректно определено и $\mathsf{ch}_p \circ \mathsf{O}_p = \mathrm{id}$. □

Замечание 5.3. Из приведенной леммы следует, что образ $[\mathcal{O}_Z]$ в $\mathsf{gr}^p_F K_0(X)_{num}$ зависит только от класса Z по модулю численной эквивалентности.

Далее, легко показать, что для всякого когерентного пучка G, сосредоточенного в коразмерности p, его p-ый коэффициент характера Чженя является целым, $\mathsf{ch}_p(G) \in A^p(X)_{num}$. В самом деле, если $Z_1, \dots, Z_m$ — компоненты коразмерности p носителя $\mathsf{supp}\, G$, а ℓ_i — длина G в общей точке Z_i, то $\mathsf{ch}_p(G) = \sum \ell_i Z_i$. Более того, отсюда же следует, что отображение $\mathsf{ch}_p : \mathsf{gr}^p_S K_0(X)_{num} \to A^p(X)_{num}$ сюръективно. Значит, мы получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
A^p(X)_{num} \arrow[r, hook] \arrow[dr, hook, "\mathsf{O}_p"] & A^p(X)_{num} \otimes \mathbb{Q} \\
\mathsf{gr}^p_S K_0(X)_{num} \arrow[u, two heads, "\mathsf{ch}_p"] \arrow[r, "i_p"] & \mathsf{gr}^p_F K_0(X)_{num} \arrow[u, hook, "\mathsf{ch}_p"']
\end{tikzcd}$$

Предложение 5.4. *Для гладкого проективного многообразия X следующие свойства эквивалентны:*

i) $\forall\ 0 \le p \le n$ O_p *— изоморфизм;*
ii) X *АК-согласовано;*
iii) $\forall\ 0 \le p \le n$ $S^p K_0(X)_{num} = F^p K_0(X)_{num}$*;*
iv) $\forall\ 0 \le p \le n$ $\mathsf{ch}_p(\mathsf{gr}^p_F K_0(X)_{num}) \subset A^p(X)_{num}$.

Доказательство: (i) $\Rightarrow$ (ii): Очевидное индукционное рассуждение показывает, что $\{[\mathcal{O}_{Z^i_q}]\}^{1\le i\le m_q}_{q\ge p}$ — базис в $F^p K_0(X)_{num}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Допустим, X АК-согласовано. Выберем базисы во всех $A^p(X)_{num}$ как в определениин 5.1 и предположим, что $v = \sum a^i_q [\mathcal{O}_{Z^i_q}] \in F^p K_0(X)_{num}$ для некоторых $a^i_q \in \mathbb{Z}$. Пусть q — минимальное целое число, такое что $a^i_q \ne 0$ для какого-либо i, и допустим, что $q < p$. Применяя ch_q, получим

$$0 = \mathsf{ch}_q(v) = \sum_i a^i_q \mathsf{ch}_q([\mathcal{O}_{Z^i_q}]) = \sum_i a^i_q \mathsf{ch}_q(\mathsf{O}_q(Z^i_q)) = \sum_i a^i_q Z^i_q,$$

откуда следует, что $a^i_q = 0$ для всех i. Значит, $q \ge p$, то есть $a^i_q = 0$ при всех $q < p$. Но тогда, ясно, что $v \in S^p K_0(X)_{num}$. Итак, мы показали, что $F^p K_0(X)_{num} \subset S^p K_0(X)_{num}$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Если $S^p K_0(X)_{num} = F^p K_0(X)_{num}$, то $\mathsf{gr}^p_S K_0(X)_{num} = \mathsf{gr}^p_F K_0(X)_{num}$ при всех p, значит $\mathsf{ch}_p(\mathsf{gr}^p_F K_0(X)_{num}) = \mathsf{ch}_p(\mathsf{gr}^p_S K_0(X)_{num}) \subset A^p(X)_{num}$.

(iv) $\Rightarrow$ (i): Так как отображения ch_p и O_p взаимно обратные изоморфизмы групп $\mathsf{gr}^p_F K_0(X)_{num} \otimes \mathbb{Q}$ и $A^p(X)_{num} \otimes \mathbb{Q}$, причем сохраняющие решетки $\mathsf{gr}^p_F K_0(X)_{num}$ и $A^p(X)_{num}$, то они индуцируют изоморфизмы этих решеток. $\square$

Теперь мы приведем несколько критериев АК-согласованности.

Лемма 5.5. *Для всякого гладкого проективного многообразия X имеем $\mathsf{ch}_p(\mathsf{gr}^p_F K_0(X)_{num}) \subset A^p(X)_{num}$ при $p = 0, 1, 2$ и $p = n$.*

Доказательство: Заметим, что $\mathsf{ch}_0(G)$ — ранг G, а $\mathsf{ch}_1(G) = c_1(G)$, откуда получаем утверждение для $p = 0$ и $p = 1$. При $p = 2$ имеем $\mathsf{ch}_2(G) = c_1(G)^2/2 - c_2(G)$, поэтому если $c_1(G) = \mathsf{ch}_1(G) = 0$, то $\mathsf{ch}_2(G) = -c_2(G) \in A^2(X)_{num}$. Наконец, если $G \in F^n K_0(X)_{num}$, то по теореме Римана–Роха имеем $\mathsf{ch}_n(X) = \chi(\mathcal{O}_X, G) \in \mathbb{Z}$, где группа $A^n(X)_{num}$ отождествлена с $\mathbb{Z}$ отображением степени. Этим доказано утверждение для $p = n$. $\square$

Следствие 5.6. *Если $\dim X \le 3$, то X АК-согласовано.*

Другой способ проверять АК-согласованность дается следующей леммой.

Лемма 5.7. *Предположим, что спаривание пересечения $A^p(X)_{num} \otimes A^{n-p}(X)_{num} \to \mathbb{Z}$ индуцирует изоморфизм $A^p(X)_{num} \to A^{n-p}(X)^*_{num}$. Тогда отображение $\mathsf{O}_p : A^p(X)_{num} \to \mathsf{gr}^p_F K_0(X)_{num}$ является изоморфизмом. В частности, если спаривание $A^p(X)_{num} \otimes A^{n-p}(X)_{num} \to \mathbb{Z}$ индуцирует изоморфизм $A^p(X)_{num} \to A^{n-p}(X)^*_{num}$ при всех p, то X АК-согласовано.*

Доказательство: Пусть $Z, W \subset X$ — подсхемы коразмерности p и $(n-p)$ соответственно. Тогда из (†) и теоремы Римана–Роха следует, что

$$Z \cdot W = (-1)^p \chi(\mathcal{O}_Z, \mathcal{O}_W),$$

следовательно, имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} A^p(X)_{num} \arrow[r, "\mathsf{O}_p"] \arrow[d, "\cdot"'] & \mathsf{gr}^p_F K_0(X)_{num} \arrow[d, "(-1)^p\chi"] \\ A^{n-p}(X)^*_{num} & \mathsf{gr}^{n-p}_F K_0(X)^*_{num} \arrow[l, "\mathsf{O}^*_{n-p}"'] \end{tikzcd}$$

Заметим, что все отображения в диаграмме являются вложениями конечного индекса. Поэтому, если левая вертикальная стрелка — изоморфизм, то O_p — тоже изоморфизм. □

Полученные в данном разделе результты позволяют легко описать группу $K_0(X)_{num}$ для всех трифолдов Фано.

Следствие 5.8. *Пусть V — трифолд Фано с $\mathsf{Pic}\, V \cong \mathbb{Z}$. Пусть H — образующая в $\mathsf{Pic}\, V$, L — прямая на V, а P — точка на V. Тогда $K_0(X)_{num} = \langle [\mathcal{O}_V], [\mathcal{O}_H], [\mathcal{O}_L], [\mathcal{O}_P] \rangle$.*

Доказательство: Из следвствия 5.6 (или из леммы 5.7) следует, что V АК-согласовано. ПО определению АК-согласованности, получаем искомый базис. □

Замечание 5.9. Для проверки АК-согласованности можно комбинировать результаты леммы 5.5 и леммы 5.7. Иначе говоря, если алгебраическое многообразие X удовлетворяет условиям леммы 5.7 при всех $3 \le p \le n-1$, то X АК-согласовано. В самом деле, из доказательства предложения 5.4 легко видеть, что свойство (iv$_p$) для каждого p лечет свойство (i$_p$).

Эти соображения можно применить, например, для четырехмерной кубики. В самом деле, условия леммы 5.7 при $p = 3$ выполнены, поэтому четырехмерная кубика АК-согласована.

Литература

[B] A. Bondal, *Representations of associative algebras and coherent sheaves*, (Russian) Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **53** (1989), no. 1, 25–44; translation in Math. USSR-Izv. **34** (1990), no. 1, 23–42.

[BK] A. Bondal, M. Kapranov, *Representable functors, Serre functors, and reconstructions* , (Russian) Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **53** (1989), no. 6, 1183–1205, 1337; translation in Math. USSR-Izv. **35** (1990), no. 3, 519–541.

[BO1] A. Bondal, D. Orlov, *Semiorthogonal decomposition for algebraic varieties*, preprint math.AG/9506012.

[Fu] Fujita T., *On the structure of polarized varieties with A-genera zero*, J. Fac. Sci. Univ Tokyo. Sec. IA. 22, 103–115.

[Is] V. Iskovskikh, *Anticanonical models of three-dimensional algebraic varieties*, Current problems in mathematics, VINITI, Moscow, 12, 59–157 (Russian); translation in J. Soviet Math. 13 (1980) 745–814.

[IP] V. Iskovskikh, Yu. Prokhorov, *Fano varieties*, Algebraic geometry, V, 1–247, Encyclopaedia Math. Sci., 47, Springer, Berlin, 1999.

[K1] Kuznetsov A., *An exceptional collection of vector bundles on V_{22} Fano threefolds*, Vestnik MGU, Ser. 1, Mat. Mekh., 1996, no. 3, p. 41–44 (in Russian).

[K2] Kuznetsov A., *Fano threefolds V_{22}*, preprint MPIM/97-24.

[K3] Kuznetsov A., *Derived categories of cubic and V_{14} threefolds*, Proc. V.A.Steklov Inst. Math, V. 246 (2004), p. 183–207; preprint math.AG/0303037.

[K5] Kuznetsov A., *Hyperplane sections and derived categories*, Izvestiya RAN: Ser. Mat. 70:3 p. 23–128 (in Russian); translation in Izvestiya: Mathematics 70:3 p. 447–547.

[K6] Kuznetsov A., *Derived categories of quadric fibrations and intersections of quadrics*, Advances in Mathematics, V. 218 (2008), N. 5, 1340-1369.

[K8] Kuznetsov A., *Lefschetz decompositions and categorical resolutions of singularities*, Selecta Mathematica, V. 13 (2008), N. 4, 661-696.

[K9] Kuznetsov A., *Homological projective duality for Grassmannians of lines*, preprint math.AG/0610957.

[M] Mukai S., *Fano 3-folds*, London Math. Soc. Lect. Note Ser. 179, 255–263.

[MU] S. Mukai, H. Umemura, *Minimal rational threefolds*, Algebraic geometry (Tokyo/Kyoto, 1982), 490–518, Lecture Notes in Math., 1016, Springer, Berlin, 1983.

[Or] D. Orlov, *Exceptional set of vector bundles on the variety* V_5, (Russian) Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. 1991, no. 5, 69–71; translation in Moscow Univ. Math. Bull. **46** (1991), no. 5, 48–50.

[O1] D. Orlov, *Projective bundles, monoidal transformations, and derived categories of coherent sheaves*, (Russian) Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. **56** (1992), no. 4, 852–862; translation in Russian Acad. Sci. Izv. Math. **41** (1993), no. 1, 133–141.

Отдел Алгебры, МИ РАН им. В.А. Стеклова, Москва, 11991, ул. Губкина д. 8.

Лаборатория Понселе, Независимый Московский Университет

E-mail address: akuznet@mi.ras.ru