ДВЕ ОРБИТЫ:
КОГДА ОДНА ЛЕЖИТ В ЗАМЫКАНИИ ДРУГОЙ?

В. Л. ПОПОВ

В. А. Исковских к 70-летию

Аннотация. Пусть G—связная линейная алгебраическая группа, V—конечномерный алгебраический G-модуль и $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$—две G-орбиты в V. Мы указываем конструктивный способ выяснить лежит $\mathcal{O}_1$ в замыкании $\mathcal{O}_2$ или нет.

1. **Введение**

1.1. Зафиксируем основное алгебраически замкнутое поле k произвольной характеристики. Пусть G — связная линейная алгебраическая группа и V — конечномерный алгебраический G-модуль. Рассмотрим две точки $a, b \in V$ и их G-орбиты $G \cdot a$ и $G \cdot b$.

Следующая проблема постоянно возникает в теории алгебраических групп преобразований и ее приложениях:

Как узнать, лежит ли орбита $G{\cdot}a$ в замыкании в V орбиты $G{\cdot}b$? $(*)$

(здесь и далее топологические термины относятся к топологии Зарисского).

Пример 1.2. Если группа G редуктивна, а $a = 0$, то $(*)$ — это вопрос о том, как узнать является ли b нестабильной точкой в смысле геометрической теории инвариантов, [M65]. Описание конуса нестабильных точек даётся теорией Гильберта–Мамфорда.

Пример 1.3. Пусть G—тор и $X(G)$ группа его характеров в аддитивной записи. Для любых $\lambda \in X(G)$, $g \in G$ и $v \in V$ обозначим через g^λ и v_λ соответственно значение λ на g и проекцию v на λ-весовое подпространство G-модуля V параллельно сумме остальных весовых подпространств. Пусть $\operatorname{supp} v := \{\lambda \in X(G) \mid v_\lambda \neq 0\}$. Тогда из [ВП72] следует, что $(*)$—это вопрос о том как узнать, выполнены ли следующие условия: (i) конус, порожденный $\operatorname{supp} a$ в $X(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, является гранью конуса, порожденного $\operatorname{supp} b$, и (ii) существует такой элемент $g \in G$, что $g^\lambda a_\lambda = b_\lambda$ для любого $\lambda \in \operatorname{supp} a$.

Пример 1.4. Если группа G унипотентна, то каждая G-орбита замкнута в V, см. [R61]. Поэтому $(*)$—это вопрос о том, как узнать лежат ли a и b в одной G-орбите.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 08–01–00095, НШ–1987.2008.1 и программы "*Современные проблемы теоретической математики*" отделения математики РАН.

Пример 1.5. Пусть $\operatorname{char} k = 0$ и пусть G простая группа, V—её алгебра Ли с присоединённым действием G, а a и b нильпотентные элементы. Если G—классическая группа (т. е. типа A_l, B_l, C_l или D_l), то ответ на вопрос $(*)$ даётся известным правилом, формулируемым в терминах размеров жордановых клеток нормальных жордановых форм матриц a и b, см., например, [CM93]. Если G—исключительная группа (т. е. типа E_6, E_7, E_8, F_4 или G_2), то он получается ad hoc методами и даётся явным указанием диаграммы Хассе множества нильпотентных орбит, наделённого порядком Брюа, т. е. частично упорядоченного по правилу

$$\mathcal{O}_1 \leqslant \mathcal{O}_2 \iff \mathcal{O}_1 \subseteq \overline{\mathcal{O}_2}$$

(как обычно, черта обозначает замыкание в V), см. [Spa82], [C85].

Пример 1.6. Помимо классического случая орбит борелевской подгруппы редуктивной группы G на обобщенном многообразии флагов G/P, а также случая из примера (1.5), диаграммы Хассе множеств орбит, наделённых порядком Брюа, найдены ad hoc методами в различных других специальных случаях, см., например, [Каш97], [Ре04], [BHRZ99], [GHR07], [MWZ99] и примеры (1.7), (1.8) ниже. С другой стороны, в целом ряде случаев орбиты классифицированы, но диаграммы Хассе не найдены: например, это так для нильпотентных 3-векторов n-мерных пространств при $n \leqslant 9$, 4-векторов 8-мерного пространства, спиноров m-мерных пространств при $m \leqslant 14$ и 16, см. соответствующие ссылки в [ВП89].

Пример 1.7. Пусть L—конечномерное векторное пространство над k и $G = \mathrm{GL}(L)$, а $V = L^* \otimes L^* \otimes L$. Точки пространства V—это структуры алгебр (не обязательно ассоциативных) на векторном пространстве L. Алгебры, определенные структурами a и b, изоморфны только тогда, когда $G \cdot a = G \cdot b$. На языке теории алгебр вопрос $(*)$ переформулируется так: как узнать, является ли алгебра, определённая структурой a, вырождением (degeneration) алгебры, определенной структурой b? В общем случае он считается сложным. Имеется много работ, посвящённых классификации вырождений в различных специальных случаях ad hoc методами, см., например, [B05], [BS99], [See90] и обзор [ВГО90, гл. 7].

Пример 1.8. Рассмотрим действие группы $G = \mathrm{GL}_d(k)$ на $\mathrm{Mat}_{d,d}(k)$ сопряжениями. Пусть A—конечномерная ассоциативная k-алгебра. Множество структур левых A-модулей на фиксированном d-мерном векторном пространстве над k естественно отождествляется с замкнутым инвариантным подмножеством Mod_A^d прямой суммы $\dim_k A$ экземпляров G-модуля $\mathrm{Mat}_{d,d}(k)$. Пусть M_x обозначает A-модуль, соответствующий точке $x \in \mathrm{Mod}_A^d$. Тогда A-модули M_a и M_b изоморфны тогда и только тогда, когда $G \cdot a = G \cdot b$, а условие $G \cdot a \subseteq \overline{G \cdot b}$ в этой теории выражают, говоря, что M_a является вырождением (degeneration) M_b. В случае, когда A—алгебра путей (path algebra) колчана, получающегося ориентированием рёбер расширенного графа Дынкина системы корней типа A_l, D_l, E_6, E_7 или E_8, в [B95] установлена характеризация отношения вырождения в терминах структур A-модулей M_a и M_b и найден алгоритм, определяющий является ли M_a вырождением M_b или нет.

Пример 1.9. В случае естественного действия группы $\mathrm{GL}_n(k)$ на пространстве форм степени d от n переменных с коэффициентами в k вопрос $(*)$ (под названием *The orbit closure problem*) является одним из ключевых в приложениях методов геометрической теории инвариантов к теории сложности, см. [MS01].

1.10. Мы даём здесь конструктивное решение проблемы $(*)$: в разделе 2 будет приведён алгоритм, позволяющий с помощью конечного числа простых эффективно осуществимых операций ответить на вопрос $(*)$. А именно, мы явно указываем такую конечную систему линейных уравнений от конечного числа переменных над полем k, что включение $G \cdot a \subseteq \overline{G \cdot b}$ равносильно ее несовместности (точная формулировка содержится в Теореме 2.12). По теореме Кронекера–Капелли, эта редукция сводит получение ответа на вопрос $(*)$ к сравнению рангов двух явно заданных матриц с коэффициентами в k, что делается конструктивно. Конечно, существование конструктивного решения немедленно приводит к вопросу о нахождении алгоритма, наиболее оптимального с практической точки зрения. Но это уже другая проблема, которой мы здесь не касаемся.

1.11. В разделе 3 мы приводим еще один алгоритм получения ответа на вопрос $(*)$. Он менее оптимален, чем алгоритм из раздела 2, но даёт больше информации и относится к более общей задаче. А именно, пусть L — какое-либо линейное подмногообразие в V. Мы показываем как конструктивно найти такую конечную систему $q_1, \ldots, q_m$ полиномиальных функций на V, что

$$\overline{G \cdot L} = \{x \in V \mid q_1(x) = \ldots = q_m(x) = 0\}. \tag{1}$$

При $L = b$ это дает следующий конструктивный ответ на вопрос $(*)$:

$$G \cdot a \subseteq \overline{G \cdot b} \iff q_1(a) = \ldots = q_m(a) = 0.$$

Отметим, что многообразия вида $\overline{G \cdot L}$ вездесущи в теории алгебраических групп преобразований: помимо замыканий орбит, к их числу, например, относятся неприводимые компоненты нуль-конусов Гильберта и, более общо, замыкания стратов Хесселинка [Po03], замыкания пластов [ВП89] и замыкания жордановых классов (или, в другой терминологии, классов разложения) [TY05]. Отметим также, что современные методы коммутативной алгебры позволяют по системе функций $q_1, \ldots, q_m$, удовлетворяющей условию (1), конструктивно найти систему образующих идеала всех полиномов, обращающихся в нуль на $\overline{G \cdot L}$, см., например, [КЛО00, гл. 4, §2]. В частности, это даёт конструктивный способ нахождения образующих идеала полиномов, обращающихся в нуль на замыкании орбиты. В нескольких специальных случаях (например, для нильпотентных орбит присоединённого действия группы $\mathrm{SL}_n(k)$ и для “ранговых многообразий”) такие образующие известны, см. [W89].

1.12. По существу оба алгоритма основаны на возможности рационально запараметризовать открытое подмножество в G многообразием вида

$$\mathbb{A}^{r,s} := \{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{r+s}) \in \mathbb{A}^{r+s} \mid \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_r \neq 0\}, \qquad r, s \in \mathbb{N}$$

(через $\mathbb{N}$ мы обозначаем множество всех целых неотрицательных чисел), а точнее, на существовании доминантного морфизма

$$\iota\colon \mathbb{A}^{r,s} \to G. \tag{2}$$

1.13. Поскольку любое нормальное квазипроективное многообразие, снабженное действием G, эквивариантно вкладывается в проективное пространство [ВП89], в теории алгебраических групп преобразований и её приложениях постоянно возникает вопрос, аналогичный вопросу $(*)$, но для действия G на проективном пространстве (на самом деле в примере 1.9 дело обстоит именно так). Он, однако, сводится к рассмотренному в п. 1.1 вопросу $(*)$ для действия на векторном пространстве (см. п. 2.7).

1.14. В заключение отметим, что поскольку

$$G\cdot a = G\cdot b \iff G\cdot a \subseteq \overline{G\cdot b} \text{ и } G\cdot b \subseteq \overline{G\cdot a},$$

то конструктивное решение проблемы $(*)$ доставляет и конструктивное решение следующей проблемы:

Как узнать, лежат ли две точки из V в одной G-орбите?

2. **Основной результат**

2.1. Дальнейшие построения основываются на следующем факте.

Лемма 2.2. *Для некоторых $r, s \in \mathbb{N}$ существует доминантный морфизм* (2). *Более того, при $r = \operatorname{rk} G$ существует открытое вложение* (2).

Доказательство. Пусть $R_u(G)$—унипотентный радикал группы G. Поскольку $R_u(G)$ является связной разрешимой группой, каноническая проекция $G \to G/R_u(G)$ является, согласно [R56], локально тривиальным в топологии Зарисского торсором с базой $G/R_u(G)$ и структурной группой $R_u(G)$. Так как база аффинна, а структурная группа связна и унипотентна, этот торсор тривиален, [G58]. Значит, многообразие G изоморфно произведению многообразий $R_u(G)$ и $G/R_u(G)$. Поскольку $R_u(G)$—связная унипотентная группа, первое из этих многообразий изоморфно $\mathbb{A}^{\dim R_u(G)}$, [G58]. С другой стороны, большая клетка разложения Брюа редуктивной группы $G/R_u(G)$ изоморфна $\mathbb{A}^{r,\dim G/R_u(G)-r}$, где $r = \operatorname{rk} G/R_u(G) = \operatorname{rk} G$, [Spr98]. Поскольку многообразие $\mathbb{A}^{r,\dim G-r}$ изоморфно $\mathbb{A}^{\dim R_u(G)} \times \mathbb{A}^{r,\dim G/R_u(G)-r}$, это показывает, что существует его открытое вложение в G. $\square$

2.3. *Обозначения*

Зафиксируем в V базис $e_1, \ldots, e_n$. Так как случай $n = 1$ ясен, мы будем далее считать, что $n > 1$. Существуют такие регулярные на G функции $\rho_{i,j}$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, что действие G на V задается матричным представлением

$$\rho\colon G \to \operatorname{Mat}_{n,n}(k), \quad \rho(g) = \begin{bmatrix} \rho_{1,1}(g) & \cdots & \rho_{1,n}(g) \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \rho_{n,1}(g) & \cdots & \rho_{n,n}(g) \end{bmatrix}, \quad g \in G, \tag{3}$$

т. е. $\rho(g)$ — матрица оператора $V \to V$, $v \mapsto g \cdot v$, в базисе $e_1, \ldots, e_n$, так что

$$g \cdot \Big(\sum_{i=1}^{n} \gamma_i e_i \Big) = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} \rho_{i,j}(g) \gamma_j \Big) e_i \quad \text{для любых } g \in G \text{ и } \gamma_1, \ldots, \gamma_n \in k. \tag{4}$$

Зафиксируем какое-нибудь доминантный морфизм (2), что возможно ввиду леммы 2.2. Обозначим через $x_1, \ldots, x_{r+s}$ стандартные координатные функции на $\mathbb{A}^{r,s}$:

$$x_i(a) = \varepsilon_i \quad \text{для } a = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{r+s}) \in \mathbb{A}^{r,s}. \tag{5}$$

Поскольку $x_1, \ldots, x_{r+s}, x_1^{-1}, \ldots, x_r^{-1}$ порождают k-алгебру $k[\mathbb{A}^{r,s}]$ регулярных функций на $\mathbb{A}^{r,s}$, а $x_1, \ldots, x_{r+s}$ алгебраически независимы над k, всевозможные мономы вида

$$x_1^{i_1} \cdots x_{r+s}^{i_{r+s}}, \quad \text{где} \quad i_1, \ldots, i_{r+s} \in \mathbb{Z} \text{ и } i_{r+1}, \ldots, i_{r+s} \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

образуют базис векторного пространства $k[\mathbb{A}^{r,s}]$ над k.

2.4. *Степень многообразия* $\rho(G)$

Напомним, [M79], что степенью локально замкнутого подмножества Y в $\mathbb{A}^l$ называется число $\deg Y$ точек пересечения Y с $(l - \dim Y)$-мерным линейным подмногообразием общего положения в $\mathbb{A}^l$. Для нас особый интерес представляет степень $\deg \rho(G)$ подмногообразия $\rho(G)$ в пространстве матриц $\mathrm{Mat}_{n,n}(k)$. В важном случае, когда $\operatorname{char} k = 0$ и G—редуктивная группа, имеется следующая формула для ее вычисления.

Зафиксируем в G максимальный тор T. Пусть $X(T)$ — группа его характеров в аддитивной записи. Она является свободной абелевой группой ранга $r = \dim T = \operatorname{rk} G$ и естественно вкладывается в вещественное векторное пространство $E = X(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Выбрав в $X(T)$ базис, зафиксируем изоморфизм между E и координатным пространством $\mathbb{R}^r$. Будем отождествлять по нему эти пространства. Группа $X(T)$ отождествляется тогда с решеткой $\mathbb{Z}^r$ в $\mathbb{R}^r$. На E естественным образом действует группа Вейля $W := N_G(T)/T$. Обозначим через $d\nu$ стандартную форму объема на E. Пусть $\mathcal{P}_V$ — выпуклая оболочка в E подмножества, являющегося объединением нуля и системы весов T-модуля V. Факторизуя G по связной компоненте ядра неэффективности действия G на V, мы можем (и будем) считать, что это ядро конечно и, следовательно, $\dim \mathcal{P}_V = r$. Зафиксируем систему положительных корней R_+ в множестве корней группы G относительно тора T. Для любого корня $\alpha \in R_+$ обозначим через $\alpha^\vee$ соответствующий кокорень, т. е. линейную форму на E, заданную формулой $\alpha^\vee \colon E \to \mathbb{R}$, $\alpha^\vee(v) = 2\langle \alpha \,|\, v \rangle / \langle \alpha \,|\, \alpha \rangle$, где $\langle \ | \ \rangle$ — какое-нибудь W-инвариантное скалярное произведение на E, см. [Б72]. Пусть $m_1 + 1, \ldots, m_r + 1$ — набор степеней однородных свободных образующих алгебры W-инвариантных полиномиальных функций на пространстве E, т. е. $m_1, \ldots, m_r$ — показатели группы W, см. [Б72].

Теорема 2.5 (Казарновский [Каз87]). *Пусть* $\operatorname{char} k = 0$, *а* ρ—*представление связной редуктивной группы* G, *ядро которого конечно. Тогда*

$$\deg \rho(G) := \frac{\dim G!}{|W| (m_1! \cdots m_r!)^2 |\ker \rho|} \int_{\mathcal{P}_V} \prod_{\alpha \in R_+} (\alpha^\vee)^2 d\nu. \tag{7}$$

Пример 2.6. Пусть $\operatorname{char} k = 0$. Рассмотрим основной объект догильбертовской классической теории инвариантов: $G = \mathrm{SL}_2(k)$, а $V = V_s$ — пространство бинарных форм степени s от переменных z_1, z_2 над полем k, на котором G действует линейными заменами переменных:

$$g \cdot z_1 = \alpha z_1 + \gamma z_2, \quad g \cdot z_2 = \beta z_1 + \delta z_2, \quad \text{если } g = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \in G. \tag{8}$$

В рассматриваемом случае $\dim G = 3$, $|W| = 2$, $r = 1$, $m_1 = 1$, $E = \mathbb{R}$, $X(T) = \mathbb{Z}$. Множество R_+ состоит из единственного корня $\alpha = 2$, а $\alpha^\vee$ является стандартной координатной функцией на $\mathbb{R}$, т. е. $\alpha^\vee(a) = a$ для любого $a \in \mathbb{R}$. Возьмём в качестве базиса $e_1, \ldots, e_{s+1}$ в V последовательность мономов $z_1^s, z_1^{s-1}z_2, \ldots, z_1 z_2^{s-1}, z_2^s$. Из (7) следует, что e_{i+1} является весовым вектором диагонального тора $T = \{\mathrm{diag}(t, t^{-1}) \mid t \in k \setminus \{0\}\}$ с весом $t \mapsto t^{s-2i}$. Поэтому системой весов T-модуля V является арифметическая прогрессия $\{s, s-2, \ldots, -s+2, -s\}$, так что $\mathcal{P}_{V_s} = [-s, s]$. Ядро представления $\rho = \rho_s$, заданного формулой (3), тривиально, если s нечётно, и имеет порядок 2, если s чётно. Поэтому из (7) мы получаем

$$\deg \rho_s(\mathrm{SL}_2) = \frac{3!}{2|\ker \rho_s|} \int_{-s}^{s} x^2 dx = \begin{cases} 2s^3 & \text{если } s \text{ нечётно}, \\ s^3 & \text{если } s \text{ чётно}. \end{cases} \tag{9}$$

2.7. *Редукция к коническому случаю*

Пусть L — конечномерное векторное пространство над k. Пусть H — алгебраическая группа, действующая (алгебраически) на проективном пространстве $\mathbb{P}(L)$ одномерных линейных подпространств в L. Не меняя H-орбит в $\mathbb{P}(L)$, можно заменить группу H на её фактор по ядру неэффективности действия и считать H подгруппой в $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}(L))$. Пусть $\widetilde{H}$ — прообраз H относительно естественного гомоморфизма $\mathrm{GL}(L) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{P}(L))$ (отметим, что редуктивность H эквивалентна редуктивности $\widetilde{H}$). Пусть $\pi\colon L \setminus \{0\} \to \mathbb{P}(L)$ — естественная проекция. Мы называем подмножество в L *коническим*, если оно инвариантно относительно умножения на каждый ненулевой элемент из k.

Лемма 2.8. *Пусть U — непустое открытое H-инвариантное подмножество в $\mathbb{P}(L)$ и $p, q \in U$ — две его точки. Возьмём какие-либо точки $\widetilde{p} \in \pi^{-1}(p)$ и $\widetilde{q} \in \pi^{-1}(q)$. Тогда следующие свойства эквивалентны:*

(i) *орбита $H \cdot p$ лежит в замыкании орбиты $H \cdot q$ в $\mathbb{P}(L)$;*
(ii) *орбита $H \cdot p$ лежит в замыкании орбиты $H \cdot q$ в U;*
(iii) *орбита $\widetilde{H} \cdot \widetilde{p}$ лежит в замыкании орбиты $\widetilde{H} \cdot \widetilde{q}$ в L.*

Орбиты $\widetilde{H} \cdot \widetilde{p}$ и $\widetilde{H} \cdot \widetilde{q}$ являются коническими.

Доказательство. Поскольку $\widetilde{H}$ содержит все умножения пространства L на ненулевые скаляры, $\widetilde{H} \cdot \widetilde{p} = \pi^{-1}(H \cdot p)$ и $\widetilde{H} \cdot \widetilde{q} = \pi^{-1}(H \cdot q)$. Читатель легко проверит, что утверждение вытекает отсюда и из определений. □

Нам понадобится следующее применение леммы 2.8. Рассмотрим в качестве L координатное пространство k^{n+1}, а в качестве H — группу G из п. 1.1, действующую на $\mathbb{P}(L)$ по правилу (см. (3))

$$g\cdot(\alpha_0:\alpha_1:\ldots:\alpha_n) := \left(\alpha_0:\sum_{i=1}^{n}\rho_{1,i}(g)\alpha_i:\ldots:\sum_{i=1}^{n}\rho_{n,i}(g)\alpha_i\right).$$

Стандартное главное открытое подмножество $\{(\alpha_0:\alpha_1:\ldots:\alpha_n)\mid \alpha_0\neq 0\}$ в $\mathbb{P}(\widetilde{L})$ является G-инвариантным и эквивариантно изоморфным G-модулю V. Поэтому, ввиду леммы 2.8, ответ на вопрос $(*)$ эквивалентен ответу на вопрос о том, лежит ли орбита $\widetilde{G}\cdot\widetilde{a}$ в замыкании орбиты $\widetilde{G}\cdot\widetilde{b}$. Это означает, что, заменяя группу G на $\widetilde{G}$, пространство V на L, а точки a и b на, соответственно, $\widetilde{a}$ и $\widetilde{b}$, мы сводим решение вопроса $(*)$ к случаю, когда обе орбиты $G\cdot a$ и $G\cdot b$ являются ненулевыми и коническими. Ввиду этого,

$$\begin{array}{l}\text{при поиске ответа на вопрос } (*), \text{ можно считать,}\\ \text{что } G\cdot a \text{ и } G\cdot b\text{ — ненулевые конические орбиты.}\end{array}\tag{10}$$

Отметим еще, что, ввиду леммы 2.8, вопрос, аналогичный вопросу $(*)$, но для действия группы на проективном пространстве, сводится к вопросу $(*)$ для действия на линейном пространстве.

2.9. *Входные данные алгоритма*

Мы будем считать известными следующие данные:

— Степень многообразия $\rho(G)$,

$$d := \deg\rho(G).\tag{11}$$

— Функции

$$\iota^*(\rho_{p,q})\in k[\mathbb{A}^{r,s}]=k[x_1,\ldots,x_{r+s},x_1^{-1},\ldots,x_r^{-1}],\qquad 1\leqslant p,q\leqslant n.$$

Пример 2.10. Рассмотрим ту же ситуацию, что и в примере 2.6. Число (11) дается формулой (9). Из (8) следует, что функции $\rho_{p,q}$ в (3) определяются равенством

$$(\alpha z_1+\gamma z_2)^{s-j}(\beta z_1+\delta z_2)^j=\sum_{i=0}^{s}\rho_{i+1,j+1}(g)z_1^{s-i}z_2^i,\quad \text{где } g=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}\in G.\tag{12}$$

Возьмём в качестве ι морфизм

$$\iota\colon \mathbb{A}^{1,2}\hookrightarrow \mathrm{SL}_2(k),$$
$$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\mapsto\begin{bmatrix}1 & \varepsilon_2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & 0\\ 0 & \varepsilon_1^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ \varepsilon_3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2\varepsilon_3+\varepsilon_1 & \varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2\\ \varepsilon_1^{-1}\varepsilon_3 & \varepsilon_1^{-1}\end{bmatrix}.\tag{13}$$

Тогда из (5), (12), (13) следует, что функция $\iota^*(\rho_{i+1,j+1})$ равна коэффициенту при $z_1^{s-i}z_2^i$ в разложении бинарной формы

$$\big((x_1+x_1^{-1}x_2x_3)z_1+(x_1^{-1}x_3)z_2\big)^{s-j}\big((x_1^{-1}x_2)z_1+(x_1^{-1})z_2\big)^j$$

от z_1,z_2 с коэффициентами в поле $k(x_1,x_2,x_3)$ в сумму мономов от z_1,z_2. Например, если $d=2$, то $\iota^*(\rho_{2,2})=1+2x_1^{-2}x_2x_3$.

2.11. *Алгоритм*

Перейдём теперь к формулировке и доказательству основного результата. Мы используем введённые выше обозначения и соглашения и исключаем тривиальный случай $\overline{G \cdot b} = V$, т. е. считаем, что

$$\dim G \cdot b < \dim V \tag{14}$$

(поскольку число $\dim G \cdot b$ равно рангу системы векторов $\{d\rho(Y_i)\cdot b\}_{i\in I}$, где $\{Y_i\}_{i\in I}$ — базис векторного пространства $\mathrm{Lie}(G)$, условие (14) может быть проверено конструктивно, если считать известными операторы $d\rho(Y_i)$).

Следующая последовательность шагов вместе с теоремой 2.12 дает конструктивный способ получить ответ на вопрос $(*)$:

(1) Найдём координаты векторов a и b в базисе $e_1, \ldots, e_n$:

$$a = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n, \quad b = \beta_1 e_1 + \ldots + \beta_n e_n,$$

и, поменяв, если нужно, базис $e_1, \ldots, e_n$, добьёмся того, чтобы было выполнено условие

$$\beta_1 \cdots \beta_n \neq 0. \tag{15}$$

(3) Рассмотрим n “общих” полиномов $F_1, \ldots, F_n$ степени $2d-2$ (где d определено формулой (11)) от переменных $y_1, \ldots, y_n$,

$$F_p := \sum_{\substack{q_1,\ldots,q_n\in\mathbb{N}\\ q_1+\cdots+q_n\leqslant 2d-2}} c_{p,q_1,\ldots,q_n} y_1^{q_1}\cdots y_n^{q_n}, \quad p = 1, \ldots, n, \tag{16}$$

т. е. таких, что, помимо $y_1, \ldots, y_n$, все $c_{p,q_1,\ldots,q_n}$ также являются переменными над k, и положим

$$H(y_1, \ldots, y_n) := (y_1 - \alpha_1)F_1 + \ldots + (y_n - \alpha_n)F_n - 1. \tag{17}$$

(4) Заменив в $H(y_1, \ldots, y_n)$ каждую переменную y_i на $\sum_{j=1}^n \beta_j \iota^*(\rho_{i,j})$, получим линейную комбинацию мономов вида (6) с коэффициентами в кольце $k[\ldots, c_{p,q_1,\ldots,q_n}, \ldots]$ полиномов от переменных $c_{p,q_1,\ldots,q_n}$ над полем k:

$$H\Bigl(\sum_{j=1}^n \beta_j \iota^*(\rho_{1,j}), \ldots, \sum_{j=1}^n \beta_j \iota^*(\rho_{n,j})\Bigr) = \sum_{(i_1,\ldots,i_{r+s})\in M} \ell_{i_1,\ldots,i_{r+s}} x_1^{i_1}\cdots x_{r+s}^{i_{r+s}}, \tag{18}$$

где $\ell_{i_1,\ldots,i_{r+s}} \in k[\ldots, c_{p,q_1,\ldots,q_n}, \ldots]$, а M — некоторое конечное подмножество в $\mathbb{Z}^r \times \mathbb{N}^s$. Ввиду (16) и (17), каждый коэффициент $\ell_{i_1,\ldots,i_{r+s}}$ в (18) является *линейной* функцией от переменных $c_{p,q_1,\ldots,q_n}$ с коэффициентами в поле k.

(5) Рассмотрим следующую конечную систему *линейных* уравнений от переменных $c_{p,q_1,\ldots,q_n}$ с коэффициентами в поле k:

$$\ell_{i_1,\ldots,i_{r+s}} = 0, \quad \text{где } (i_1, \ldots, i_{r+s}) \in M. \tag{19}$$

Теорема 2.12. *Пусть $G \cdot b$ — ненулевая коническая орбита* (*см.* (10)). *Следующие свойства эквивалентны:*

(i) *замыкание орбиты $G \cdot b$ в V содержит орбиту $G \cdot a$;*
(ii) *система линейных уравнений* (19) *несовместна.*

Доказательство. Мы разобьём его на несколько шагов.

1. Пусть $z_1, \ldots, z_n$ — дуальный к $e_1, \ldots, e_n$ базис пространства V^*. Пусть t_i — ограничение на $\overline{G \cdot b}$ функции z_i. Поскольку множество $\overline{G \cdot b}$ замкнуто в V, а $k[V] = k[z_1, \ldots, z_n]$, мы имеем

$$k[\overline{G \cdot b}] = k[t_1, \ldots, t_n]. \tag{20}$$

Отметим, что функция t_i — не константа. В самом деле, поскольку орбита $G \cdot b$ является конической, $0 \in \overline{G \cdot b}$. Из определения t_i следует, что $t_i(0) = 0$ и $t_i(b) = \beta_i$. Но $\beta_i \neq 0$ ввиду (15).

Рассмотрим орбитный морфизм

$$\varphi \colon G \to \overline{G \cdot b}, \quad \varphi(g) = g \cdot b. \tag{21}$$

Поскольку морфизм ι доминантен, образ морфизма

$$\psi := \varphi \circ \iota \colon \mathbb{A}^{r,s} \to \overline{G \cdot b} \tag{22}$$

плотен в $\overline{G \cdot b}$, а потому соответствующий коморфизм является вложением алгебр регулярных функций:

$$\psi^* \colon k[\overline{G \cdot b}] \hookrightarrow k[\mathbb{A}^{r,s}]. \tag{23}$$

Из (20) следует, что

$$\psi^*(k[\overline{G \cdot b}]) = k[\psi^*(t_1), \ldots, \psi^*(t_n)], \tag{24}$$

а из (21), (22), (4) и определения t_i, что

$$\psi^*(t_i) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \iota^*(\rho_{i,j}). \tag{25}$$

Функции $z_1 - \alpha_1, \ldots, z_n - \alpha_n$ имеют на V только один общий нуль — точку a. Учитывая G-инвариантность множества $\overline{G \cdot b}$, мы получаем отсюда, что следующие свойства эквивалентны:

$$\left.\begin{array}{ll} (\mathrm{c}_1) & \text{орбита } G \cdot a \text{ не лежит в замыкании орбиты } G \cdot b; \\ (\mathrm{c}_2) & \text{точка } a \text{ не лежит в замыкании орбиты } G \cdot b; \\ (\mathrm{c}_3) & \text{функции } t_1 - \alpha_1, \ldots, t_n - \alpha_n \text{ не имеют на } \overline{G \cdot b} \text{ общих нулей.} \end{array}\right\} \tag{26}$$

2. Воспользуемся теперь эффективной формой теоремы Гильберта о корнях, полученной в [J05]. Чтобы сформулировать этот результат, введём несколько обозначений и определений.

Прежде всего, для любых целых положительных чисел $d_1 \geqslant \cdots \geqslant d_m$ и q положим

$$N(d_1, \ldots, d_m; q) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{m} d_i & \text{если } q \geqslant m \geqslant 1, \\ \left(\prod_{i=1}^{q-1} d_i\right) d_m & \text{если } m > q > 1, \\ d_m & \text{если } q = 1, \end{cases}$$

а также

$$N'(d_1, \ldots, d_m; q) = N(d_1, \ldots, d_m; q), \text{ если } q > 1, \quad \text{и} \quad N'(d_1, \ldots, d_m; 1) = d_1.$$

Далее, назовём *степенью* ненулевой регулярной функции h на неприводимом замкнутом подмножестве X аффинного пространства $\mathbb{A}^l$ число $\deg h$, равное минимуму степеней таких полиномиальных функций на $\mathbb{A}^l$, ограничение которых на X совпадает с h. Легко видеть, что для любых ненулевых регулярных функций f и h на X имеет место неравенство $\deg fh \leqslant \deg f + \deg h$, причём, вообще говоря, равенство может и не выполняться, однако, если множество X — коническое, то обязательно

$$\deg fh = \deg f + \deg h. \tag{27}$$

Теорема 2.13 (Z. Jelonek [J05]). *Пусть X — неприводимое ненульмерное замкнутое подмножество в $\mathbb{A}^l$. Пусть $h_1, \ldots, h_m$ — непостоянные регулярные функции на X, занумерованные так, что*

$$\deg h_1 \geqslant \cdots \geqslant \deg h_m. \tag{28}$$

Тогда следующие условия эквивалентны:

(a) *функции $h_1, \ldots, h_m$ не имеют общих нулей;*

(b) *существуют такие регулярные функции $f_1, \ldots, f_m$ на X, что и $1 = \sum_{i=1}^m f_i h_i$ и для любого i выполнено неравенство*

$$\deg f_i h_i \leqslant \begin{cases} \deg X \cdot N'(\deg h_1, \ldots, \deg h_m; \dim X), & \textit{если } m \leqslant \dim X, \\ 2\deg X \cdot N'(\deg h_1, \ldots, \deg h_m; \dim X) - 1, & \textit{если } m > \dim X. \end{cases}$$

Возьмём теперь в качестве $\mathbb{A}^l$ и X соответственно V и $\overline{G \cdot b}$. Поскольку t_i — непостоянная функция, являющаяся ограничением на $\overline{G \cdot b}$ линейной функции на V, мы имеем

$$\deg (t_1 - \alpha_1) = \ldots = \deg (t_n - \alpha_n) = 1. \tag{29}$$

Далее, в теореме 2.13 положим $m = n$ и $h_i = t_i - \alpha_i$, $i = 1, \ldots, n$ (ввиду (29), условие (28) выполнено). Тогда из (26), теоремы 2.13 и (14), (29) вытекает, что каждое из свойств (c_1), (c_2), (c_3) в (26) эквивалентно свойству

(c_4) существуют такие регулярные функции $f_1, \ldots, f_n$ на $\overline{G \cdot b}$, что $\sum_{i=1}^m (t_i - \alpha_i) f_i - 1 = 0$ и для любого i выполнено неравенство

$$\deg (t_i - \alpha_i) f_i \leqslant 2 \deg \overline{G \cdot b} - 1. \tag{30}$$

Так как $\overline{G \cdot b}$ — коническое (неприводимое) подмногообразие в V, то из (27) и (29) следует, что $\deg (t_i - \alpha_i) f_i = 1 + \deg f_i$, и поэтому неравенство (30) эквивалентно неравенству

$$\deg f_i \leqslant 2 \deg \overline{G \cdot b} - 2. \tag{31}$$

3. Степень многообразия $\overline{G \cdot b}$ можно оценить сверху. А именно, орбита $G \cdot b$ является образом многообразия $\rho(G) \subset \mathrm{End}(V)$ при линейном отображении $\mathrm{End}(V) \to V$, $g \mapsto g \cdot b$. Но, как легко видеть (см., например, [DK02, Prop. 4.7.10]), при аффинных отображениях степень не увеличивается: если Y — локально замкнутое подмножество в $\mathbb{A}^l$ и $\varphi\colon \mathbb{A}^l \to \mathbb{A}^m$ — аффинное отображение, то $\deg Y \geqslant \deg \overline{\varphi(Y)}$. Поэтому $\deg \overline{G \cdot b}$ не превосходит степени подмногообразия $\rho(G)$ в $\mathrm{End}(V)$, т. е. числа d. Следовательно, ввиду (31), для любого i имеет место неравенство

$$\deg f_i \leqslant 2d - 2. \tag{32}$$

4. Поскольку коморфизм ψ^* (см. (23)) является вложением, мы получаем эквивалентность

$$\sum_{i=1}^{m}(t_i-\alpha_i)f_i-1=0 \iff \sum_{i=1}^{m}(\psi^*(t_i)-\alpha_i)\psi^*(f_i)-1=0. \qquad (33)$$

Из неравенства (32) и определений функций t_i, чисел $\deg f_i$, "общих" полиномов F_p (см. (16)) и полинома H (см. (17)) следует, ввиду (25) и (33), что свойство (c_4) эквивалентно такому:

(c_5) для каждого коэффициента $c_{p,q_1,\ldots,q_n}$ каждого "общего" полинома F_p существует такая константа $\nu_{p,q_1,\ldots,q_n}\in k$, что после замены $c_{p,q_1,\ldots,q_n}$ на $\nu_{p,q_1,\ldots,q_n}$ для всех $p,q_1,\ldots,q_n$, правая часть формулы (19) станет нулевым элементом поля рациональных функций от $x_1,\ldots,x_{r+s}$ с коэффициентами в k:

$$\sum_{(i_1,\ldots,i_{r+s})\in M}\ell_{i_1,\ldots,i_{r+s}}(\ldots,\nu_{p,q_1,\ldots,q_n},\ldots)\,x_1^{i_1}\cdots x_{r+s}^{i_{r+s}}=0. \qquad (34)$$

Остаётся заметить, что, поскольку мономы $x_1^{i_1}\cdots x_{r+s}^{i_{r+s}}$, где $(i_1,\ldots,i_{r+s})\in M$, линейно независимы над k, равенство (34) эквивалентно равенству нулю всех коэффициентов его левой части,

$$\ell_{i_1,\ldots,i_{r+s}}(\ldots,\nu_{p,q_1,\ldots,q_n},\ldots)=0,$$

т. е. тому, что $c_{p,q_1,\ldots,q_n}=\nu_{p,q_1,\ldots,q_n}$ является решением системы линейных уравнений (19) от переменных $c_{p,q_1,\ldots,q_n}$. Это завершает доказательство теоремы. □

Замечание 2.14. Как видно из доказательства, утверждение теоремы 2.12 останется верным, если константу d в определении "общих" полиномов $F_1,\ldots,F_n$ заменить на $\deg\overline{G\cdot b}=\deg G\cdot b$. Если из каких-то соображений число $\deg G\cdot b$ известно, это позволяет уменьшить количество переменных и уравнений в системе линейных уравнений (19). В некоторых случаях степени орбит действительно были найдены.

Пример 2.15. Рассмотрим ту же ситуацию, что и в примерах 2.6 и 2.10. Возьмём ненулевую бинарную форму $v\in V_s$ и разложим её в произведение $v=v_1^{n_1}\cdots v_p^{n_p}$, где $v_1,\ldots,v_p$ —попарно непропорциональные формы из V_1. Предположим, что $p\geqslant 3$ и $s/n_i\geqslant 2$ для каждого i. Тогда G-стабилизатор G_v формы v конечен, см. [Po74], и $|G_v|\deg G\cdot v=-2(p-1)s^3-4\sum_{i=1}^{p}(s-n_i)^3+3s^2\sum_{i=1}^{p}(s-n_i)+3s\sum_{i=1}^{p}(s-s_i)(s-2n_i)$ (см. доказательство в [MJ92, Sect. 8]). В частности, если все корни формы v однократны, т. е. $p=s$, $n_1=\ldots=n_s=1$, то

$$|G_v|\deg(G\cdot v)=2s(s-1)(s-2). \qquad (35)$$

Формула (35) может быть также выведена из вычислений Энриквеса и Фано 1897 года; это было сделано Мукаи и Умемурой в 1983 г. (с пробелом, исправленным в [MJ92, Sect. 8, Remark], где даны соответствующие ссылки).

3. Задание множества $\overline{G \cdot L}$ уравнениями

3.1. Пусть L — какое-либо линейное подмногообразие в V. Тогда существует морфизм

$$\tau\colon \mathbb{A}^l \to V,$$

образ которого плотен в L: например, можно взять в качестве τ аффинное вложение $\mathbb{A}^l$ в V, образом которого является L. Мы зафиксируем какой-нибудь такой морфизм τ. Кроме того, мы по-прежнему считаем, что зафиксирован какой-либо доминантный морфизм (2).

Мы сохраняем обозначения из п. 2.3. Как и в доказательстве теоремы 2.12, мы обозначаем через $z_1, \ldots, z_n$ дуальный к $e_1, \ldots, e_n$ базис пространства V^*. Кроме того, мы обозначим через $y_1, \ldots, y_l$ стандартные координатные функции на $\mathbb{A}^l$:

$$y_i(a) = \delta_i \text{ для } a = (\delta_1, \ldots, \delta_l) \in \mathbb{A}^l.$$

Тогда

$$\tau(v) = \sum_{i=1}^{n} \tau^*(z_i)(v)e_i \quad \text{для любого } v \in \mathbb{A}^l. \tag{36}$$

3.2. Функции $x_1, \ldots, x_{r+s}$, $y_1, \ldots, y_l$ естественным образом продолжаются до функций на $\mathbb{A}^{r,s} \times \mathbb{A}^l$; их продолжения мы обозначаем теми же буквами. Рассмотрим морфизм

$$\mu\colon A^{r,s} \times \mathbb{A}^l \to V, \quad \mu(u,v) = \iota(u) \cdot \tau(v) \tag{37}$$

Тогда из (4) и (36) следует, что

$$f_p := \mu^*(z_p) = \sum_{q=1}^{n} \iota^*(\rho_{pq})\tau^*(z_q) \qquad 1 \leqslant p, q \leqslant n. \tag{38}$$

Мы отождествим $\mathbb{A}^{r,s} \times \mathbb{A}^l$ с открытым подмножеством в $\mathbb{A}^{r+s+l}$ с помощью вложения

$$\mathbb{A}^{r,s} \times \mathbb{A}^l \hookrightarrow \mathbb{A}^{r+s+l}, \quad ((\varepsilon_1 \ldots, \varepsilon_{r+s}), (\delta_1, \ldots, \delta_l)) \mapsto (\varepsilon_1 \ldots, \varepsilon_{r+s}, \delta_1, \ldots, \delta_l)$$

и продолжим функции $x_1, \ldots, x_{r+s}$, $y_1, \ldots, y_l$ естественным образом до стандартных координатных функций на $\mathbb{A}^{r+s+l}$, сохранив их обозначения. Кроме того, мы отождествим V с $\mathbb{A}^n$ с помощью изоморфизма

$$V \to \mathbb{A}^n, \quad \sum_{i=1}^{n} \gamma_i e_i \mapsto (\gamma_1, \ldots, \gamma_n).$$

Тогда морфизм (37) становится рациональным отображением ϱ аффинного пространства $\mathbb{A}^{r+s+l}$ в аффинное пространство $\mathbb{A}^n$:

$$\varrho\colon \mathbb{A}^{r+s+l} \dashrightarrow \mathbb{A}^n, \quad a \mapsto (f_1(a), \ldots, f_n(a)).$$

Поскольку $\overline{\iota(\mathbb{A}^{r,s}) \cdot L} = \overline{G \cdot L}$, мы имеем равенство

$$\overline{\varrho(\mathbb{A}^{r+s+l})} = \overline{G \cdot L}. \tag{39}$$

Это позволяет применить теорию исключения для нахождения уравнений, высекающих $\overline{G \cdot L}$ в V. Алгоритмическое решение этой задачи получается с помощью базисов Грёбнера следующим образом.

3.3. *Входные данные алгоритма*

Мы будем считать известными следующие данные:

— Функции

$$\iota^*(\rho_{p,q}) \in k[x_1, \ldots, x_{r+s}, x_1^{-1}, \ldots, x_r^{-1}] \subset k(\mathbb{A}^{r+s+l}), \qquad 1 \leqslant p, q \leqslant n. \tag{40}$$

— Функции

$$\tau^*(z_i) \in k[y_1, \ldots, y_l] \subset k[\mathbb{A}^{r+s+l}], \qquad 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{41}$$

Пример 3.4. Зафиксируем точку $v \in L$ и последовательность $f_1, \ldots, f_m$ линейно независимых векторов, задающие параметрическое представление $L = \{v + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i \mid \lambda_d, \ldots, \lambda_m \in k\}$. Возьмём в качестве τ вложение $\tau\colon \mathbb{A}^m \hookrightarrow \mathbb{A}^n$, $\tau(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = v + \sum_{i=m}^l \lambda_i f_i$. Пусть $v = \sum_{j=1}^n \gamma_j e_j$ и $f_i = \sum_{j=1}^n \nu_{ji} e_j$. Тогда

$$\tau^*(z_i) = \sum_{i=1}^n \nu_{ij} y_j + \gamma_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

В отношении функций $\iota^*(\rho_{p,q})$ см. пример 2.10.

3.5. *Алгоритм*

Следующая последовательность шагов вместе с теоремой 3.6 даёт конструктивный способ получить уравнения, задающие $\overline{G \cdot L}$ в V:

(1) Вычислим рациональные функции f_p по формуле (38) и запишем каждую из них в виде частного многочленов:

$$f_p = \frac{g_p}{h_p}, \quad \text{где} \quad g_p \in k[x_1, \ldots, x_{r+s}, y_1, \ldots, y_t], \ h_p \in k[x_1, \ldots, x_r]$$

(см. (40) и (41)).

(2) Рассмотрим кольцо многочленов $k[t, x_1, \ldots, x_{r+s}, y_1, \ldots, y_t, z_1, \ldots, z_n]$, где t—новая переменная, и найдём для его идеала, порождённого многочленами

$$h_1 z_1 - g_1, \ldots, h_n z_n - g_n, 1 - h_1 \cdots h_n t.$$

базис Грёбнера по отношению к лексикографическому упорядочению мономов, при котором каждая из переменных t, x_i и y_j больше каждой переменной z_p.

Теорема 3.6. *Пусть $q_1, \ldots, q_m$—все элементы этого базиса Грёбнера, лежащие в $k[z_1, \ldots, z_n]$. Тогда*

$$\overline{G \cdot L} = \{v \in \mathbb{A}^n \mid q_1(v) = \ldots = q_m(v) = 0\}.$$

Доказательство. Мы имеем $\overline{\varrho(\mathbb{A}^{r+s+l})} = \{v \in \mathbb{A}^n \mid q_1(v) = \ldots = q_m(v) = 0\}$— это общий факт, касающийся замыкании образа любого рационального отображения одного аффинного пространства в другое, см., например, [КЛО00, гл. 3, § 3, теорема 2]. Теперь утверждение теоремы следует из равенства (39). □

Замечание 3.7. Хотя интересующие нас элементы $q_1, \ldots, q_m$ составляют лишь часть указанного базиса Грёбнера, для их нахождения с помощью описанного алгоритма приходится искать весь этот базис целиком.

Список литературы

[Б72] Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли*, гл. IV, V, VI, Мир, М., 1972.

[ВГО90] Э. Б. Винберг, В. В. Горбацевич, А. Л. Онищик, *Строение групп и алгебр Ли*, Итоги науки и техники, Современные проблемы математики, Фундаментальные направления, т. 41, ВИНИТИ, М., 1990, стр. 5–257.

[ВП72] Э. Б. Винберг, В. Л. Попов, *Об одном классе квазиоднородных многообразий*, Изв.АН СССР, сер. мат. **36** (1972), вып. 4, 749–763.

[ВП89] Э. Б. Винберг, В. Л. Попов, *Теория инвариантов*, Современные проблемы математики, Фундаментальные направления, т. 55, ВИНИТИ, М., 1989, стр. 137–314.

[Каз87] Б. Я. Казарновский, *Многогранники Ньютона и формула Везу для матричных функций конечномерных представлений*, Функц. анализ и его прилож. 21 (1987), вып. 4, 73–74.

[Каш97] В. В. Кашин, *Орбиты присоединённого и коприсоединённого действий борелевских подгрупп полупростых алгебраических групп*, в сб.: *Проблемы теории групп и гомологической алгебры*, Ярославль, 1997, 141–159.

[КЛО00] Д. Кокс, Дж. Литтл, Д. О'Ши, *Идеалы, многообразия и алгоритмы*, Мир, М., 2000.

[М79] Д. Мамфорд, *Алгебраическая геометрия* 1. *Комплексные проективные многообразия*, Мир, М., 1979.

[Po74] В. Л. Попов, *Структура замыканий орбит в пространствах конечномерных линейных представлений группы* $\mathrm{SL}(2)$, Мат. заметки **16** (1974), вып. 6, 943–950.

[Po03] В. Л. Попов, *Конус нуль-форм Гильберта*, Труды Мат. инст. им. В. А. Стеклова РАН **241** (2003), 192–209.

[B95] K. Bongartz, *Degenerations for representations of tame quivers*, Ann. Sci. ÉNS **28** (1995), no. 5, 647–668.

[BHRZ99] T. Brustle, L. Hille, G. Röhrle, G. Zwara, *The Bruhat–Chevalley order of parabolic group actions in general linear groups and degeneration for* Δ*-filtered modules*, Adv. in Math. **148** (1999), no. 2, 203–242.

[B05] D. Burde, *Degenerations of* 7*-dimensional nilpotent Lie algebras*, Commun. Algebra **33** (2005), no. 4, 1259–1277.

[BS99] D. Burde, C. Steinhoff, *Classification of orbit closures of* 4*-dimensional complex Lie algebras*, J. Algebra **214** (1999), 729–739.

[C85] R. Carter, *Finite Groups of Lie Type: Conjugacy Classes and Complex Characters*, John Wiley & Sons, London, 1985.

[CM93] D. H. Collingwood, W. M. McGovern, *Nilpotent Orbits in Semisimple Lie Algebras*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1993.

[DK02] H. Derksen, G. Kemper, *Computational Invariant Theory*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Vol. 130, Subseries *Invariant Theory and Algebraic Transformation Groups*, Vol. I, Springer, Berlin, Heidelberg, 2002.

[GHR07] S. Goodwin, L. Hille, G. Röhrle, *Orbits of parabolic subgroups on metabelian ideals*, 2007, `arXiv:0711.3711`.

[G58] A. Grothendieck, *Torsion homologique et sections rationnelles*, in: *Anneaux de Chow et Applications*, Séminaire C. Chevalley ENS 1958, Sec. math. 11 rue Pierre Cirue, Paris, 1958, pp. 5-10–5-29.

[J05] Z. Jelonek, *On the effective Nulltellensatz*, Invent. Math. **162** (2005), 1–17.

[MWZ99] P. Magyar, J. Weyman, A. Zelevinsky, *Multiple flag varieties of finite type*, Adv. Math. **141** (1999), no. 1, 97–118.

[MJ92] L. Moser-Jauslin, *The Chow rings of smooth complete* SL_2*-embeddings*, Compositio Math. **82** (1992), 67–106.

[MS01] K. Mulmuley, M. Sohoni, *Geometric complexity theory* I*: An approach to the P vs. NP and related problems*, SIAM J. Comput. **31** (2001), no. 2, 496–526.

[M65] D. Mumford, *Geometric Invariant Theory*, Ergebn. Math., Bd. 34, Springer-Verlag, Berlin, 1965.

[Pe04] D. D. Pervouchine, *Hierarchy of closures of matrix pencils*, J. Lie Theory **14** (2004), 443–479.

[Po81] V. L. Popov, *Constructive invariant theory*, Astérisque **87–88** (1981), 303–334.

[R56] M. Rosenlicht, *Some basic theorems on algebraic groups*, Amer. J. Math. **78** (1956), 401–443.

[R61] M. Rosenlicht, *On quotient varieties and the affine embedding of certain homogeneous spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **101** (1961), 211–223.

[See90] C. Seeley, *Degenerations of* 6*-dimensional nilpotent Lie algebras over* $\mathbb{C}$, Comm. in Algebra **18** (1990), 3493–3505.

[Spa82] N. Spaltenstein, *Classes Unipotentes et Sous-Groupes de Borel*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 946, Springer-Verlag, New York, 1982.

[Spr98] T. A. Springer, *Linear Algebraic Groups*, 2nd Edition, Progress in Mathematics, Vol. 9, Birkhäser, Boston, 1998.

[TY05] P. Tauvel, R. W. T. Yu, *Lie Algebras and Algebraic Groups*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, Berlin, 2005.

[W89] J. Weyman, *The equations of conjugacy classes of nilpotent matrices*, Invent. Math. **98** (1989), 229–245.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина 8, Москва 119991, Россия

E-mail address: popovvl@orc.ru