УДК 512.7

Бирациональная геометрия особых многообразий Фано

А.В.Пухликов

Доказана дивизориальная каноничность гиперповерхностей и двойных пространств Фано общего положения с простейшими особенностями.

Введение

0.1. Теорема о прямых произведениях Фано. Напомним [1], что примитивное многообразие Фано F (т. е. гладкое многообразие Фано с $\mathrm{Pic}\,F = \mathbb{Z}K_F$) удовлетворяет условию *дивизориальной каноничности*, или условию (C) (соответственно, условию *дивизориальной лог-каноничности*, или условию (L)), если для любого эффективного дивизора $D \in |-nK_F|$, $n \geq 1$, пара

$$(F, \frac{1}{n}D) \tag{1}$$

имеет канонические (соответственно, лог-канонические) особенности. Если пара (1) имеет канонические особенности для общего дивизора $D \in \Sigma \subset |-nK_F|$ любой *подвижной* линейной системы Σ, то скажем, что F удовлетворяет условию *подвижной каноничности* или условию (M).

В явном виде, условие (C) формулируется следующим образом: для любого бирационального морфизма $\varphi\colon \widetilde{F} \to F$ и исключительного дивизора $E \subset \widetilde{F}$ имеет место неравенство

$$\nu_E(D) \leq na(E). \tag{2}$$

Неравенство (2) противоположно классическому *неравенству Нетера-Фано*, см. [2, гл. II, §1] и библиографию в этой работе. Условие (L) слабее: требуется выполнение неравенства

$$\nu_E(D) \leq n(a(E)+1). \tag{3}$$

В (2) и (3) число $a(E)$ — дискрепантность исключительного дивизора $E \subset \widetilde{F}$ относительно модели F. Неравенство (3) противоположно *лог-неравенству Нетера-Фано.* Условие (M) означает, что (2) имеет место для общего дивизора D любой подвижной системы $\Sigma \subset |-nK_F|$ и любого дискретного нормирования ν_E.

В [1] была доказана

Теорема 1. *Предположим, что примитивные многообразия Фано $F_1,\ldots,F_K$, $K\geq 2$, удовлетворяют условиям (L) и (M). Тогда их прямое произведение*

$$V=F_1\times\ldots\times F_K$$

— бирационально сверхжесткое многообразие. В частности,

(i) *Все структуры рационально связного расслоения на многообразии V суть проекции на прямые сомножители. Точнее, пусть $\beta\colon V^\sharp\to S^\sharp$ — рационально связное расслоение и $\chi\colon V\dashrightarrow V^\sharp$ — бирациональное отображение. Тогда существует множество индексов*

$$I=\{i_1,\ldots,i_k\}\subset\{1,\ldots,K\}$$

и бирациональное отображение

$$\alpha\colon F_I=\prod_{i\in I}F_i\dashrightarrow S^\sharp$$

такие, что коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{cccc} & V & \stackrel{\chi}{\dashrightarrow} & V^\sharp & \\ \pi_I & \downarrow & & \downarrow & \beta \\ & F_I & \stackrel{\alpha}{\dashrightarrow} & S^\sharp, & \end{array}$$

т.е. $\beta\circ\chi=\alpha\circ\pi_I$, где

$$\pi_I\colon\prod_{i=1}^K F_i\to\prod_{i\in I}F_i$$

— естественная проекция на прямой сомножитель.

(ii) *Пусть $V^\sharp$ — некоторое многообразие с $\mathbb{Q}$-факториальными терминальными особенностями, удовлетворяющее условию*

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\operatorname{Pic}V^\sharp\otimes\mathbb{Q})\leq K,$$

и $\chi\colon V\dashrightarrow V^\sharp$ — бирациональное отображение. Тогда χ есть (бирегулярный) изоморфизм.

(iii) *Группы бирациональных и бирегулярных автоморфизмов многообразия V совпадают:*

$$\operatorname{Bir}V=\operatorname{Aut}V.$$

В частности, группа $\operatorname{Bir}V$ конечна.

(iv) *На многообразии V нет структур расслоения на рационально связные многообразия размерности строго меньшей, чем $\min\{\dim F_i\}$. В частности V не имеет структур раслоения на коники и рациональные поверхности.*

(v) *Многообразие V нерационально.*

Точное определение (сверх)жесткости, обсуждение его свойств и список примеров бирационально (сверх)жестких многообразий см. в [2].

Мало сомнений в том, что условие (C) строго сильнее, чем (L): легко привести примеры многообразий, не удовлетворяющих условию (C), но, по-видимому, удовлетворяющих (L). Однако имеющаяся сегодня техника позволяет (для типичных многообразий Фано) доказывать (L) только через (C), устанавливая сразу более сильное свойство (из которого автоматически следуют (L) и (M)).

Отметим также, что гладкость многообразия F совершенно несущественна: достаточно $\mathbb{Q}$-факториальности. Если пара $(F, \frac{1}{n}D)$ канонична для любого эффективного дивизора $D \sim -nK_F$ (эквивалетность с точностью до умножения на некоторое целое положительное число), то на многообразие F распространяется действие теоремы 1. В [1] эта теорема сформулирована и доказана в предположении гладкости только потому, что она затем применяется к гладким многообразиям. Данное в [1] доказательство проходит дословно для $\mathbb{Q}$-факториальных многообразий Фано, удовлетворяющих условиям (L) и (M). Это в дальнейшем будет подразумеваться без специальных оговорок.

0.2. Примеры дивизориально каноничных многообразий. В [1] была доказана дивизориальная каноничность двух классов многообразий: общих двойных пространств размерности три и выше и общих гиперповерхностей Фано индекса 1 размерности ≥ 5. Напомним, что понимается под общностью положения.

Сначала пусть

$$F \stackrel{\sigma}{\to} \mathbb{P}^M$$

— двойное пространство Фано, разветвленное над гладкой гиперповерхностью $W = W_{2M} \subset \mathbb{P}^M$ степени $2M$, $M \geq 3$. Для точки $x \in W$ зафиксируем систему аффинных координат $z_1, \ldots, z_M$ на $\mathbb{P}^M$ с центром в x и пусть

$$w = q_1 + q_2 + \ldots + q_{2M}$$

— уравнение гиперповерхности W, $q_i = q_i(z_*)$ — однородные многочлены степени $\deg q_i = i$. Необходимо различать три случая: $M \geq 5$, $M = 4$ и $M = 3$. Для удобства обозначений считаем, что $q_1 \equiv z_1$. Положим также

$$\bar{q}_i = \bar{q}_i(z_2, \ldots, z_M) = q_i|_{\{z_1=0\}} = q_i(0, z_2, \ldots, z_M).$$

При $M \geq 5$ скажем, что двойное пространство Фано F регулярно в точке x, если ранг квадратичной формы $\bar{q}_2$ не меньше 2.

Пусть $M = 3$ или 4. В этом случае мы требуем, чтобы квадратичная форма $\bar{q}_2$ была отлична от нуля и, более того,

(i) либо $\operatorname{rk} \bar{q}_2 \geq 2$ (как выше),

(ii) либо $\operatorname{rk} \bar{q}_2 = 1$ и выполнено следующее дополнительное условие. Без ограничения общности считаем в этом случае, что

$$\bar{q}_2 = z_2^2.$$

Теперь при $M = 4$ мы требуем, чтобы кубический многочлен от переменной t

$$\bar{q}_3(0, 1, t) = q_3(0, 0, 1, t)$$

имел ровно три различных корня.

При $M=3$ мы требуем, чтобы хотя бы один из двух многочленов от переменной z_3

$$\bar{q}_3(0,z_3) \quad \text{или} \quad \bar{q}_4(0,z_3)$$

(они имеют вид αz_3^m, $\alpha\in\mathbb{C}$, $m=3,4$) был отличен от нуля.

Пусть

$$\mathcal{W}=\mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^M,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^M}(2M)))$$

— пространство гиперповерхностей степени $2M$. Пусть $\mathcal{W}_{\mathrm{reg}}\subset\mathcal{W}$ — множество дивизоров ветвления, удовлетворяющих условию регулярности в каждой точке. Следующий факт доказан в [1].

Теорема 2. *Множество $\mathcal{W}_{\mathrm{reg}}$ непусто. Для любого дивизора ветвления $W\in\mathcal{W}_{\mathrm{reg}}$ соответствующее двойное пространство Фано $\sigma\colon F\to\mathbb{P}^M$, разветвленное над W, удовлетворяет условию (C).*

Пусть теперь

$$F=F_{M+1}\subset\mathbb{P}=\mathbb{P}^{M+1}$$

— гладкая гиперповерхность Фано степени $M+1$, $M\geq 5$. В точке $x\in F$ зафиксируем систему аффинных координат $z_1,\dots,z_{M+1}$ с началом в точке x. Пусть

$$f=q_1+q_2+\ldots+q_{M+1}$$

— уравнение гиперповерхности F, $q_i=q_i(z_*)$ — однородные многочлены степени $\deg q_i=i$. Пусть

$$f_i=q_1+q_2+\ldots+q_i$$

— левые сегменты многочлена f, $i=1,\dots,M$. Сформулируем условия регулярности.

(R1.1) Последовательность

$$q_1,q_2,\dots,q_M$$

регулярна в кольце $\mathcal{O}_{x,\mathbb{P}}$, то есть, система уравнений

$$q_1=q_2=\ldots=q_M=0$$

задает одномерное подмножество — конечный набор прямых в $\mathbb{P}$, проходящих через точку x.

(R1.2) Линейная оболочка любой неприводимой компоненты замкнутого алгебраического множества

$$q_1=q_2=q_3=0$$

в $\mathbb{C}^{M+1}$ есть гиперплоскость $q_1=0$ (то есть, касательная гиперплоскость T_xF).

(R1.3) Замкнутое алгебраическое множество

$$\overline{\{f_1=f_2=0\}\cap F}=\overline{\{q_1=q_2=0\}\cap F}\subset\mathbb{P}$$

(черта$\,^{-}$означает замыкание в $\mathbb{P}$) неприводимо и любое сечение этого множества некоторой гиперплоскостью $P\ni x$

- либо также неприводимо и приведено,

- либо распадается на две неприводимые компоненты $B_1 + B_2$, где $B_i = F \cap S_i$ есть сечение F плоскостью $S_i \subset \mathbb{P}$ коразмерности 3, и, более того, $\mathrm{mult}_x B_i = 3$,

- либо неприведено и имеет вид $2B$, где $B = F \cap S$ есть сечение F плоскостью S коразмерности 3, и, более того, $\mathrm{mult}_x B = 3$.

Положим
$$\mathcal{F} = \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(M+1)))$$
— пространство гиперповерхностей степени $M+1 \geq 6$. Пусть $\mathcal{F}_{\mathrm{reg}} \subset \mathcal{F}$ — множество гиперповерхностей Фано, удовлетворяющих условиям (R1.1-R1.3) в каждой точке (в частности, любая гиперповерхность $F \in \mathcal{F}_{\mathrm{reg}}$ гладкая). Следующий факт доказан в [1].

Теорема 3. *Множество $\mathcal{F}_{\mathrm{reg}}$ непусто. Любая гиперповерхность Фано $F \in \mathcal{F}_{\mathrm{reg}}$ удовлетворяет условию (C).*

0.3. Формулировка основного результата. Цель настоящей работы — показать, что многообразие Фано любого из двух рассмотренных выше типов продолжает удовлетворять условию (C), если приобретает простейшие особенности.

Теорема 4. *Двойное пространство $\sigma\colon V \to \mathbb{P}^M$, $M \geq 3$, разветвленное над гиперповерхностью $W \subset \mathbb{P}^M$ степени $2M$, имеющей изолированные невырожденные квадратичные особенности и удовлетворяющей условиям регулярности теоремы 2 в каждой гладкой точке, удовлетворяет условию (C).*

Доказательство несложно: теорема сразу следует из предложения 1.3 (и того факта, что кратность неприводимого подмногообразия Y в любой точке не превышает его антиканонической степени $(Y \cdot (-K_V)^{\mathrm{dim Y}})$. Методом [1] легко проверить, что общая гиперповерхность $W \in \mathcal{W}$, имеющая фиксированную особую точку $o \in \mathbb{P}^M$, в любой гладкой точке регулярна, так что многообразия, описанные в теореме 4, существуют.

Обратимся теперь к гиперповерхностям Фано
$$V = V_{M+1} \subset \mathbb{P} = \mathbb{P}^{M+1}.$$
Предполагаем, что $M = \dim V \geq 8$. Это ограничение связано с техникой доказательства теоремы 5: при меньших значениях M доказательство не проходит. Сформулируем условие регулярности в невырожденной двойной точке $o \in V$.

Пусть $z_1, \ldots, z_{M+1}$ — система аффинных координат на пространстве $\mathbb{P}$ с началом в точке o,
$$f = q_2 + q_3 + \ldots + q_{M+1} = 0$$
— уравнение гиперповерхности V, разложенное на однородные компоненты, $q_2(z_*)$ — невырожденная квадратичная форма. Скажем, что V *регулярна* в точке o, если выполнены следующие требования:

(R2.1) последовательность $q_2, \dots, q_{M+1}$ регулярна в $\mathcal{O}_{o,\mathbb{P}}$, т. е. система уравнений

$$q_2 = \ldots = q_{M+1} = 0$$

задает конечное множество точек в $\mathbb{P}^M$ (соответствующих прямым в $\mathbb{P}$, проходящим через точку o и лежащим на V),

(R2.2) для любого $k \in \{2, 3, 4, 5\}$ и любого линейного подпространства $P \subset \mathbb{P}$ коразмерности два, содержащего точку o, замкнутое алгебраическое множество

$$V \cap P \cap \{q_2 = 0\} \cap \ldots \cap \{q_k = 0\} \tag{4}$$

неприводимо и имеет кратность точно $(k + 1)!$ в точке o.

Замечание 0.1. Условие, что кратность множества (4) в точке o есть $(k+1)!$, в терминах многочленов q_i означает, что пересечение замкнутого множества

$$\{q_2 = 0\} \cap \ldots \cap \{q_{k+1} = 0\} \subset \mathbb{P}^M$$

с любым линейным подпространством коразмерности два имеет коразмерность $k + 2$ в $\mathbb{P}^M$ (и степень $(k + 1)!$).

Методы [1] в сочетании с методами [3] позволяют доказать, что общая гиперповерхность $V \subset \mathbb{P}$ с фиксированной двойной точкой $o \in \mathbb{P}$ удовлетворяет условиям (R1.1-R1.3) в каждой точке $x \neq o$, $x \in V$. Основной факт — справедливость условия (R1.1) установлен в [4]. Проверка дополнительных условий (R1.2-R1.3) проводится непосредственно: наличие фиксированной особенности не влияет на рассуждения [1, п. 2.3]. Наконец, тот факт, что общая гиперповерхность $V \ni o$ с особенностью в точке o удовлетворяет в этой точке условиям (R2.1) и (R2.2), очевиден. Таким образом, общая гиперповерхность $V \in \mathcal{F}$ с фиксированной двойной точкой $o \in \mathbb{P}$ регулярна в каждой точке, в смысле условий (R1.1-R1.3) или (R2.1-R2.2).

Основной результат работы —

Теорема 5. *Предположим, что гиперповерхность Фано $V \subset \mathbb{P}$ степени $M + 1 \geq 9$ регулярна в каждой точке, гладкой или особой. Тогда многообразие V удовлетворяет условию (C).*

0.4. Структура работы и схема доказательства. Пусть X — алгебраическое многообразие, D — эффективный $\mathbb{Q}$-дивизор, $S \subset X$ — неприводимое подмногообразие, не содержащееся целиком во множестве особых точек $\operatorname{Sing} X$. Скажем, что S есть *изолированный центр не (лог)канонической особенности пары* (X, D), если существует не (лог)каноническая особенность этой пары, центр которой на X есть S (т. е. для некоторого разрешения $\varphi: X^+ \to X$ и некоторого простого исключительного дивизора $E \subset X^+$ имеет место неравенство Нетера-Фано

$$\nu_E(D) > a(E)$$

или, соответственно, в лог-варианте,

$$\nu_E(D) > a(E) + 1,$$

причем $\varphi(E) = S$), и нет не (лог)канонических особенностей этой пары, центр которых на X строго содержит S. Основной технический инструмент, используемый в настоящей работе для изучения не (лог)канонических особенностей — следующее

Предложение 0.1. *Предположим, что* $\operatorname{codim} S \geq 2$ *и* S *есть изолированный центр неканонической особенности пары* (X, D). *Пусть* $\mu\colon \widetilde{X} \to X$ *— раздутие точки* $x \in S$ *общего положения,* $E_x \subset \widetilde{X}$ *— исключительный дивизор. Для некоторой гиперплоскости* $B \subset E_x$ *выполнено неравенство*

$$\operatorname{mult}_x D + \operatorname{mult}_B \widetilde{D} > 2,$$

где $\widetilde{D} \subset \widetilde{X}$ *— собственный прообраз дивизора* D *на* $\widetilde{X}$.

Доказательство для случая, когда $S = x$ — неособая точка на X, дано в [1, предложение 3]. Общий случай сводится к этому ограничением пары (X, D) на общий гладкий росток $R \ni x$ размерности $\operatorname{codim} S$. Доказательство закончено.

Пусть теперь $D \sim -nK_V$ — эффективный дивизор на многообразии V любого из двух типов, рассматриваемых в настоящей работе. Теоремы 4 и 5 утверждают, что пара $(V, \frac{1}{n}D)$ канонична. Предположим, что это не так. В силу предложения 0.1 и фактов, доказанных в [1], центром неканонической особенности этой пары может быть только особая точка $o \in V$. Этот случай необходимо исключить.

В §1 доказано (в самых общих предположениях, без использования условий регулярности) неравенство

$$\operatorname{mult}_o D > 2n,$$

позволяющее сразу доказать теорему 4. В §2 проведен локальный анализ пары $(V^+, \frac{1}{n}D^+)$, где V^+ — раздутие точки o. Основной результат §2 — существование гиперплоского сечения исключительной квадрики, имеющего высокую кратность относительно дивизора D^+ (собственного прообраза D на V^+). Это позволяет в §3 доказать теорему 5 с помощью ограничения пары $(V, \frac{1}{n}D)$ на гиперплоское сечение многообразия V, соответствующее найденному в §2 гиперплоскому сечению исключительной квадрики. Операцию ограничения на гиперплоское сечение приходится применить дважды. Основной метод доказательства теоремы 5 — это метод гиперкасательных дивизоров, использующий условия регулярности (R2.1-R2.2), см. [2, гл. III] и библиографию в этой работе.

0.5. Замечание. До сих пор не известно было ни одного примера особых многообразий Фано, удовлетворяющих условию дивизориальной каноничности, в размерности ≥ 4. Примеры теорем 4 и 5 являются первыми. В размерности три примеры имеются [5]: это взвешенные гиперповерхности Фано; однако ввиду малости антиканонической степени этих многообразий их изучение не является трудным.

1 Принцип связности и его первые приложения

1.1. Принцип связности. Пусть X, Z — нормальные многобразия или аналитические пространства и $h\colon X \to Z$ — собственный морфизм со связными слоями, а $D = \sum d_i D_i$ — $\mathbb{Q}$-дивизор на X.

Теорема 6 (принцип связности, [6, Theorem 17.4]). *Предположим, что D эффективен ($d_i \geq 0$) и класс*

$$-(K_X + D)$$

h-численно эффективен и h-объемен. Пусть

$$f\colon Y \xrightarrow{h} X \xrightarrow{h} Z$$

— разрешение особенностей пары (X, D). Положим

$$K_Y = g^*(K_X + D) + \sum e_i E_i.$$

Носитель $\mathbb{Q}$-дивизора $\sum\limits_{e_i \leq -1} e_i E_i$, т. е. замкнутое алгебраическое множество

$$\bigcup_{e_i \leq -1} E_i,$$

является связным в окрестности любого слоя морфизма f.

Доказательство см. в [6, Ch.17].

В качестве приложения принципа связности рассмотрим росток $o \in V$ изолированной терминальной особенности со следующими свойствами. Пусть

$$\varphi\colon V^+ \to V$$

— раздутие точки o, $E = \varphi^{-1}(o)$ — неприводимый приведенный исключительный дивизор. Многообразия V, V^+ и E имеют $\mathbb{Q}$-факториальные терминальные особенности. Пусть $\delta = a(E, V)$ — дискрепантность E, D — эффективный $\mathbb{Q}$-дивизор на V, D^+ — его собственный прообраз на V^+. Определим число $\nu_E(D)$ формулой

$$\varphi^* D = D^+ + \nu_E(D) E.$$

Предложение 1.1. *Предположим, что пара (V, D) не канонична в точке o, которая является изолированным центром неканонической особенности этой пары. Предположим также, что для некоторого целого $k \geq 1$ выполнено неравенство*

$$\nu_E(D) + k \leq \delta \tag{5}$$

Тогда пара (V^+, D^+) не лог канонична и найдется не лог каноническая особенность $\widetilde{E} \subset \widetilde{V}$ этой пары (где $\widetilde{V} \to V^+$ — некоторая модель), центр которой

$$\mathrm{centre}(\widetilde{E}, V^+) \subset E$$

имеет размерность $\geq k$.

Доказательство. Предполагая $V \subset \mathbb{P}^N$ проективно вложенным, рассмотрим *общее* линейное подпространство $P \subset \mathbb{P}^N$ коразмерности k, содержащее точку o. Пусть Λ_P — линейная система гиперплоскостей, содержащих P, и Λ — соответствующая линейная система сечений многообразия V. Пусть $\varepsilon > 0$ — достаточно малое рациональное число вида $\frac{1}{K}$ и

$$\{H_I \,|\, i \in I\} \subset \Lambda$$

набор общих дивизоров в количестве $\sharp I = Kk$. Положим

$$R = D + \sum_{i \in I} \varepsilon H_i,$$

и пусть R^+ — собственный прообраз R на V^+.

Очевидно, пара (V^+, D^+) не лог канонична. Центр любой ее не лог канонической особенности содержится в E. Далее, не лог каноничность — открытое свойство, так что, несколько уменьшая коэффициенты в D, можно считать, что выполнена строгая версия неравенства (5), т. е. $\nu_E(D) + k < \delta$ (с сохранением остальных предположений).

Рассмотрим теперь пару (V^+, R^+) (мы продолжаем считать $V \ni o$ ростком, так что все построения локальны в окрестности точки o). Она не лог канонична, и все ее не лог канонические особенности суть не лог канонические особенности пары (V^+, D^+), за исключением одной дополнительной особенности — ростка $(P \cap V)^+$ сечения V плоскостью P, т. е. базисного множества системы Λ. В силу строгой версии неравенства (5), класс $-(K_{V^+} + R^+)$ очевидным образом φ-численно эффективен и φ-объемен, так что, применяя принцип связности (к $X = V^+$, $Z = V$, $h = \varphi$, $D = R^+$), заключаем что объединение центров не лог канонических особенностей пары (V^+, R^+) на V^+ связно. В силу общности P это возможно, только если $(P \cap V)^+$ пересекает какой-то центр не лог канонической особенности пары (V^+, D^+), который должен иметь размерность не меньше k. Этим предложение доказано.

Доказанный факт будет применяться к интересующему нас случаю гиперповерхностной особенности $o \in V$, с гладким исключительным дивизором.

1.2. Особенности пар на гладкой гиперповерхности. Пусть $X \subset \mathbb{P}^N$ — гладкая гиперповерхность степени $m \in \{2, \ldots, N-1\}$, $D \in |\, lH_X \,|$ — эффективный дивизор, высекаемый на X гиперповерхностью степени $l \geq 1$. (Так что H_X — класс гиперплоского сечения X.) Следующий факт и его доказательство хорошо известны [3,7].

Предложение 1.2. *Для любого* $n \geq l$ *пара*

$$(X, \frac{1}{n} D)$$

лог канонична.

Доказательство. Можно считать, что $n = l$. Предположим противное: пара $(X, \frac{1}{n}D)$ не лог канонична. Поскольку для любой кривой $C \subset X$ справедливо неравенство

$$\mathrm{mult}_C\, D \leq n$$

(см. [2,4]), центром не лог канонической особенности пары $(X, \frac{1}{n}D)$ может быть только точка. Пусть $x \in X$ — такая точка. Рассмотрим общую проекцию $\pi\colon \mathbb{P}^N \dashrightarrow \mathbb{P}^{N-1}$. Ее ограничение на X есть конечный морфизм $\pi_X\colon X \to \mathbb{P}^{N-1}$ степени m, который является аналитическим изоморфизмом в точке x, и можно предполагать, что

$$\pi_X^{-1}(\pi_X(x)) \cap \mathrm{Supp}\, D = \{x\}.$$

Отсюда следует, что росток пары $(X, \frac{1}{n}D)$ в точке x и росток пары $(\mathbb{P}^{N-1}, \frac{1}{n}\pi(D))$ в точке $\pi(x)$ аналитически изоморфны. В частности, точка $\pi(x)$ есть изолированный центр не лог канонической особенности пары $(\mathbb{P}^{N-1}, \frac{1}{n}\pi(D))$. Однако такого не может быть.

Не лог каноничность — открытое свойство, так что для рационального числа $s < n^{-1}$, достаточно близкого к n^{-1}, пара

$$(\mathbb{P}^{N-1}, s\pi(D))$$

все еще имеет точку $\pi(x)$ изолированным центром не лог канонической особенности. Пусть $P \subset \mathbb{P}^{N-1}$ — гиперплоскость, не содержащая точку $\pi(x)$. В силу неравенства

$$smn + 1 < N$$

$\mathbb{Q}$-дивизор $-(K_{\mathbb{P}^{N-1}} + s\pi(D) + P)$ обилен, так что можно применить к паре

$$(\mathbb{P}^{N-1}, s\pi(D) + P)$$

принцип связности Шокурова-Коллара (в обозначениях теоремы 6, $X = \mathbb{P}^{N-1}$, Z — точка, в качестве $\mathbb{Q}$-дивизора D берется $s\pi(D) + P$, условия теоремы 6 выполнены тривиальным образом в силу сказанного) и получить противоречие: точка $\pi(x)$ — изолированный центр не лог канонической особенности и дивизор P входит в $\mathbb{Q}$-дивизор $s\pi(D) + P$ с коэффициентом единица, однако $\pi(x) \notin P$, так что связность нарушена. Предложение 1.2 доказано.

Полученный факт позволяет начать серьезное обсуждение изолированной терминальной особенности $o \in V$ (наивные соображения, даже с сильными условиями общности положения для ростка $o \in V$, дают слишком слабые оценки для кратности в точке o), но не более того.

1.3. Слабое локальное неравенство. Пусть $o \in V$ — росток изолированной гиперповерхностной терминальной особенности. Точнее, если $\varphi\colon V^+ \to V$ — раздутие точки o, $\varphi^{-1}(o) = E \subset V^+$ — исключительный дивизор, предполагаем, что V^+ и E — гладкие, причем E изоморфен гладкой гиперповерхности степени $\mu = \mathrm{mult}_o\, V$ в $\mathbb{P}^M$.

Далее, пусть $D \ni o$ — росток простого дивизора, $D^+ \subset V^+$ — его собственный прообраз, $D^+ \sim -\nu E$ для $\nu \in \mathbb{Z}_+$, так что имеет место равенство

$$\operatorname{mult}_o D = \mu\nu.$$

Предложение 1.3. *Предположим, что пара $(V, \frac{1}{n}D)$ не канонична в точке o, которая является изолированным центром неканонической особенности этой пары. Тогда имеет место неравенство*

$$\nu > n. \tag{6}$$

Доказательство. Предположим противное: $\nu \leq n$. Тогда пара $(V^+, \frac{1}{n}D^+)$ не канонична, причем центр любой неканонической особенности этой пары (т. е. любой максимальной особенности дивизора D^+) содержится в исключительном дивизоре E. В силу обращения присоединения пара $(E, \frac{1}{n}D_E^+)$, где $D_E^+ = D^+|_E$, не лог канонична. Пусть $H_E = -E\,|\,_E$ — образующая группы $\operatorname{Pic} E$, т. е. гиперплоское сечение E относительно вложения $E \subset \mathbb{P}^M$. Имеем

$$D_E^+ \sim -\nu E\,|\,_E = \nu H_E.$$

Поскольку $\nu \leq n$, не лог каноничность пары $(E, \frac{1}{n}D_E^+)$ противоречит предложению 1.2. Доказательство закончено.

Замечание 1.1. Не используя обращение присоединения, самое большее, что можно доказать явными геометрическими методами, даже с условиями общности положения для E, — это неравенство $\nu > \frac{n}{2}$, которое гораздо слабее, чем (6). Впрочем, и неравенство (6) недостаточно для исключения максимальных особенностей на типичных многообразиях Фано.

Доказательство теоремы 4. Предположим, что пара $(V, \frac{1}{n}D)$ не канонична. В силу доказанного в [1], центром не канонической особенности может быть только особая точка o. Дивизор $D \sim -nK_V$ можно считать неприводимым. Согласно предложению 1.3, имеем неравенство

$$\operatorname{mult}_o D > 2n,$$

однако антиканоническая степень дивизора D есть

$$\deg D = (D \cdot (-K_V)^{\mathrm{dimV}-1}) = 2n.$$

Таким образом, $\operatorname{mult}_o D > \deg D$, что невозможно (см. подробное обсуждение в [2, гл. II]). Противоречие доказывает теорему.

2 Локальный анализ дивизора в квадратичной точке

2.1. Эффективные дивизоры на квадриках. Пусть $Q \subset \mathbb{P}^M$ — невырожденная квадрика, $H_Q \in \operatorname{Pic} Q$ — класс гиперплоского сечения, $B \subset Q$ — неприводимое подмногообразие.

Определение 2.1. Скажем, что эффективный дивизор D на Q удовлетворяет *условию* $H(n)$ (*относительно* B), где $n \geq 1$ — фиксированное целое число, если для любой точки общего положения $p \in B$ найдется гиперплоскость $F(p) \subset E_p$ в исключительном дивизоре $E_p = \varphi_p^{-1}(p)$ раздутия $\varphi_p \colon Q_p \to Q$ точки p, для которой выполнено неравенство

$$\operatorname{mult}_p D + \operatorname{mult}_{F(p)} \widetilde{D} > 2n, \tag{7}$$

где $\widetilde{D} \subset Q_p$ — собственный прообраз дивизора D.

Отметим, что дивизор D не предполагается неприводимым, а число n не зависит от точки p. Гиперплоскость $F(p)$ алгебраически зависит от точки p; это всюду молчаливо подразумевается в дальнейшем. Пусть $l \geq 1$ — степень гиперповерхности в $\mathbb{P}^M$, высекающей D на Q, т. е.

$$D \sim lH_Q.$$

Предложение 2.1. *Пусть* $\dim B \geq 3$. *Предположим, что эффективный дивизор D удовлетворяет условию $H(n)$ относительно B. Тогда имеет место следующая альтернатива: либо*

1) *выполнено неравенство $l > 2n$ (этот случай будем называть простым), либо*

2) *существует гиперплоское сечение $Z \subset Q$, целиком содержащее подмногообразие B, такое, что для точки общего положения $p \in B$ в принятых обозначениях*

$$F(p) = \widetilde{Z} \cap E_p,$$

где $\widetilde{Z} \subset Q_p$ — собственный прообраз, причем Z входит в дивизор D с кратностью

$$a > 2n - l$$

(т. е. имеет место представление $D = aZ + D^*$, где D^* не содержит Z компонентой; этот случай будем называть трудным).

Доказательство. Сразу предположим, что простой случай не реализуется, т. е. $l \leq 2n$. В принятых выше обозначениях для точки общего положения $p \in B$ пусть $\Lambda_p \subset |H_Q|$ — пучок гиперплоских сечений, собственный прообраз $\widetilde{\Lambda}_p$ которого на Q_p высекает на E_p гиперплоскость $F(p)$, т. е.

$$\widetilde{\Lambda}_p \cap E_p = F(p).$$

Исключительный дивизор E_p есть проективизация касательного пространства $T_pQ \cong \mathbb{C}^{M-1}$. Пусть

$$[F(p)] \subset T_pQ$$

— гиперплоскость, проективизация которой есть $F(p)$. Рассмотрим теперь T_pQ как *вложенное* касательное пространство (в некоторой аффинной карте $\mathbb{C}^M \subset$

$\mathbb{P}^M$) и пусть $\overline{T_pQ} \subset \mathbb{P}^M$ — его замыкание (гиперплоскость в $\mathbb{P}^M$, касательная к Q в точке p). Соответственно, пусть

$$\overline{F(p)} = \overline{[F(p)]} \subset \overline{T_pQ}$$

— замыкание подпространства $[F(p)]$. Это — линейное подпространство в $\mathbb{P}^M$ коразмерности два. Нетрудно видеть, что базисное подмножество (и подсхема) пучка Λ_p есть

$$\operatorname{Bs}\Lambda_p = \overline{F(p)} \cap Q.$$

Обозначим это подмножество символом $\Theta(p)$. Положим

$$Z = \overline{\bigcup_{p \in B} \Theta(p)}$$

(где объединение берется по точкам некоторого открытого подмножества B, а черта сверху означает замыкание).

Отметим, что $\Theta(p)$ — квадрика в $\overline{F(p)}$, имеющая, самое меньшее, одну особую точку p и, самое большее, прямую двойных точек (содержащую p). Поскольку $\dim B \geq 3$, для пары различных точек общего положения $p_1 \neq p_2$ имеем $\Theta(p_1) \neq \Theta(p_2)$, откуда следует, что либо $Z = Q$, либо Z — простой дивизор на Q.

Пусть $R \in \Lambda_p$ — общий элемент пучка, $D_R = D\,|_R$ — ограничение дивизора D. В силу неравенства (7) имеем

$$\operatorname{mult}_p D_R > 2n.$$

Многообразие R гладкое в точке p. Имеем представление

$$D_R = a\Theta(p) + D_R^*,$$

где D_R^* не содержит $\Theta(p)$ компонентой, $a \in \mathbb{Z}_+$ — некоторое неотрицательное число. Поскольку Λ_p высекает $\Theta(p)$ с кратностью единица, имеем

$$a = \operatorname{mult}_{\Theta(p)} D.$$

В частности, если $a \geq 1$, то Z — дивизор на Q.

Лемма 2.1. *Верно неравенство $a \geq 1$.*

Доказательство. Предположим противное: $a = 0$. Легко видеть, что

$$\Theta(p) = R \cap T_pR.$$

Пересечение $\Theta(p) \cap D_R$ имеет на R коразмерность два, так что эффективный цикл $(\Theta(p) \circ D_R)_R$ корректно определен. Поэтому

$$2l = \deg(\Theta(p) \circ D_R) \geq \operatorname{mult}_p(\Theta(p) \circ D_R) > 4n,$$

так что вопреки сделанному выше предположению справедливо неравенство $l > 2n$. Противоречие доказывает лемму.

Имеем теперь

$$D = aZ + D^*,$$

где дивизор D^* не содержит Z компонентой. Пусть

$$Z \sim l_Z H_Q, \quad D^* \sim l^* H_Q,$$

так что справедливо равенство

$$l = al_Z + l^*.$$

Лемма 2.2. *$Z \subset Q$ есть гиперплоское сечение: $l_Z = 1$.*

Доказательство. Поскольку Z есть простой дивизор, множество

$$\Delta = \bigcup_{p \in B} \overline{F(p)}$$

(объединение берется по некоторому открытому подмножеству B) не может быть плотно в $\mathbb{P}^M$. Поскольку $\dim B \geq 3$, в этом объединении участвует по крайней мере двумерное семейство линейных подпространств коразмерности два. В силу следующей элементарной леммы замыкание Δ в $\mathbb{P}^M$ есть гиперплоскость. Этим лемма доказана.

Лемма 2.3. *Если поверхность $S \subset \mathbb{P}^3$ содержит двумерное семейство прямых, то S — плоскость.*

Доказательство. Через общую точку поверхности S (достаточно хотя бы одной) проходит одномерное семейство прямых, а случай конуса очевиден. Лемма доказана.

В силу леммы 2.2 для общей точки $p \in B$ имеем

$$\Theta(p) = Z \cap R$$

(левая часть содержится в правой, однако справа стоит сечение Q линейным подпространством коразмерности два). Поэтому $D_R^* = D^* \mid_R$. Очевидно,

$$\deg D_R^* = 2(l - a) = 2l^*.$$

Рассуждая, как в доказательстве леммы 2.1, т. е. пересекая D_R^* с Z (или с $\Theta(p)$ внутри R), получаем оценку

$$2 \operatorname{mult}_p D_R^* \leq \deg D_R^*,$$

что для наших целочисленных параметров дает неравенство

$$2a + l^* = a + l > 2n.$$

Дивизор Z содержит B и имеет, самое большое, одну особую точку. Следовательно, для общей точки $p \in B$ дивизор Z неособ в p и потому

$$F(p) = \widetilde{Z} \cap E_p,$$

как и утверждалось. Предложение 2.1 полностью доказано.

Замечание 2.1. Если $\dim B \geq 4$, то дословно те же рассуждения дают утверждение предложения 2.1 для случая, когда Q — конус над невырожденной квадрикой.

2.2. Гиперплоское сечение высокой кратности. Пусть $o \in V$ — росток невырожденной квадратичной особенности, $\varphi\colon V^+ \to V$ — раздутие точки o, $E = \varphi^{-1}(o) \subset V^+$ — исключительный дивизор. Пусть $D \ni o$ — росток эффективного дивизора, причем пара $(V, \frac{1}{n}D)$ имеет точку o изолированным центром неканонической особенности. Пусть $D^+ \subset V^+$ — собственный прообраз D на V^+, $D^+ \sim -lE$. Предположим, что $l \leq 2n$, так что пара $(V^+, \frac{1}{n}D^+)$ не лог канонична. Пусть $S \subset E$ — центр не лог канонической особенности этой пары, имеющий максимальную размерность (в частности, S — изолированный центр не лог канонической особенности), $\dim S \geq 3$. В частности, выполнено неравенство

$$\operatorname{mult}_S D^+ > n. \tag{8}$$

Имеет место

Предложение 2.2. *Реализуется одна из следующих двух возможностей:*

1) S *— гиперплоское сечение квадрики* E,

2) *найдется гиперплоское сечение* $Z \supset S$ *квадрики* E*, удовлетворяющее неравенству*

$$\operatorname{mult}_Z D^+ > \frac{2n - l}{3}. \tag{9}$$

Доказательство. Если $S \subset E$ — простой дивизор, то в силу неравенства (8) имеем $l > nl_S$, где $S \sim l_S H_E$, а $H_E = -E\,|\,_E$ — гиперплоское сечение квадрики E. Поскольку по предположению $l \leq 2n$, отсюда следует, что $l_S = 1$, т. е. S — гиперплоское сечение (случай 1)).

Предположим, что $\operatorname{codim}_E S \geq 2$, т. е. случай 1) не реализуется. Поскольку пара $(V^+, \frac{1}{n}D^+)$ не лог канонична в S, для общей точки $p \in S$ найдется гиперплоскость $\Pi(p) \subset E_p^+$ в исключительном дивизоре $E_p^+ = \varphi_p^{-1}(p)$ раздутия

$$\varphi_p\colon V_p^+ \to V^+$$

точки p, удовлетворяющая неравенству

$$\operatorname{mult}_p D^+ + \operatorname{mult}_{\Pi(p)} D_p^+ > 2n, \tag{10}$$

где $D_p^+ \subset V_p^+$ — собственный прообраз относительно раздутия точки p. Пусть $E(p) \subset V_p^+$ — собственный прообраз исключительной квадрики.

Лемма 2.4. *Для точки p общего положения*

$$\Pi(p) \neq E(p) \cap E_p^+.$$

Доказательство. В противном случае для ограничения $D_E^+ = (D^+ \circ E)$ имеем неравенство

$$\operatorname{mult}_p D_E^+ > 2n,$$

справедливое для почти всех точек $p \in S$. Поскольку точка p пробегает множество положительной размерности, для общей точки дивизор D_E^+ не содержит гиперплоское сечение $E \cap T_pE$ компонентой. Отсюда, как в доказательстве леммы 2.1, немедленно следует, что $l > 2n$ — противоречие. Лемма доказана.

Положим для точки общего положения $p \in S$

$$F(p) = \Pi(p) \cap E(p).$$

Имеют место неравенства

$$\operatorname{mult}_p D^+ + \operatorname{mult}_{F(p)} D_p^+ > 2n, \tag{11}$$

более слабое, чем (10), и

$$\operatorname{mult}_p D_E^+ + \operatorname{mult}_{F(p)} \widetilde{D}_E^+ > 2n, \tag{12}$$

вытекающее из (11), где $\widetilde{D}_E^+ \subset E(p)$ — собственный прообраз. Все геометрические объекты, участвующие в неравенстве (12), определены в терминах квадрики E, т. е. не требуют обращения к V^+ и V_p^+.

Применим к дивизору D_E^+ на квадрике E предложение 2.1. В силу сделанных предположений простой случай не реализуется, так что существует гиперплоское сечение $Z \supset S$, высекающее гиперплоскость $F(p)$ на $E_p = E(p) \cap E_p^+$, т. е. $F(p) = \widetilde{Z} \cap E_p$. Сечение Z входит в дивизор D_E^+ с кратностью строго большей, чем $2n - l$. В частности, $\operatorname{mult}_Z D^+ > 0$.

2.3. Оценка кратности гиперплоского сечения. Докажем неравенство (9). И предположения, и все утверждения предложения 2.2 локальны в точке o. Невырожденная квадратичная особенность аналитически эквивалентна ростку квадрики

$$\{z_1^2 + \ldots + z_{M+1}^2 = 0\} \subset \mathbb{C}^{M+1},$$

так что можно сказать, что дивизор D задается уравнением

$$f = q_l(z_*) + q_{l+1}(z_*) + \ldots,$$

где квадрика $q(z_*) = \sum\limits_{i=1}^{M+1} z_i^2$ не делит ни один из многочленов q_i (если $q_i \neq 0$). Аффинные координаты z_* можно рассматривать как однородные координаты на исключительном дивизоре раздутия начала координат

$$o = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{C}^{M+1},$$

и тогда $\{q = 0\} \subset \mathbb{P}^M$ есть в точности исключительная квадрика E. Дивизор D_E^+ задается уравнением

$$q_l \,|\, _E = 0.$$

Пусть $\lambda(z) = 0$ — уравнение гиперплоского сечения $Z \subset E$. В терминах координат z_* предложение 2.1 утверждает, что для некоторого $a_l > 2n - l$

$$q_l = \lambda^{a_l} g + q w,$$

где $g(z_*)$ и $w(z_*)$ — однородные многочлены соответствующих степеней. Заменяя q_l на $q_l - qw$, можно считать, что λ^{a_l} делит многочлен q_l. Отсюда следует, что собственный прообраз D_l^+ дивизора

$$D_l = \{q_l \,|\, _V = 0\}$$

имеет вдоль Z кратность $\geq a_l > 2n - l$. Однако дивизор D_l есть пересечение конуса V с конусом $\{q_l = 0\}$ (многочлен q_l однороден), так что из неравенства (12) для $D_E^+ = (D_l^+) \,|\, _E$ следует неравенство (11) для D_l^+, где $D_l^+ \subset V^+$ — собственный прообраз D_l на V^+. Таким образом, справедливо следующее утверждение:

оба дивизора D^+ и D_l^+ удовлетворяют неравенству (11) для точки общего положения $p \in S$.

В силу линейности неравенства (11) (и того очевидного факта, что

$$\mathrm{mult}_p\, D_l^+ = \mathrm{mult}_p (D_l^+) \,|\, _E = \mathrm{mult}_p\, D_E^+ \geq \mathrm{mult}_p\, D^+,$$

и аналогично для $F(p)$) дивизор

$$\varphi^*(f_{l+1} \,|\, _V = 0) - lE, \tag{13}$$

где

$$f_{l+1} = q_{l+1}(z_*) + q_{l+2}(z_*) + \ldots = f - q_l(z_*),$$

снова удовлетворяет этому неравенству. Пусть $k \geq 1$ — первый индекс, для которого $q_{l+k}(z_*) \,|\, _E \not\equiv 0$,

$$D_{\geq l+k} = \{f_{l+k} \,|\, _V = 0\},$$

$f_{l+k} = \sum\limits_{i=l+k}^{\infty} q_i(z_*)$. Для собственного прообраза $D_{\geq l+k}^+$ имеем $D_{\geq l+k}^+ \sim -(l+k)E$. Кроме того, как отмечено выше, дивизор $D_{\geq l+k}^+ + kE$ удовлетворяет неравенству (11) в точке общего положения $p \in S$. Поскольку

$$\mathrm{mult}_p\, E = \mathrm{mult}_{F(p)}\, E(p) = 1,$$

дивизор $D_{\geq l+k}^+$ сам по себе удовлетворяет неравенству

$$\mathrm{mult}_p\, D_{\geq l+k}^+ + \mathrm{mult}_{F(p)} (D_{\geq l+k}^+)_p > 2(n-k)$$

(нижний индекс p у дивизора означает, как обычно, собственный прообраз на многообразии V_p^+).

Это позволяет доказать неравенство (9) убывающей индукцией по $l \leq 2n$. База индукции — случай $l = 2n$: в этом случае Z входит в D_E^+ с положительной кратностью, т. е. $\mathrm{mult}_Z\, D^+ > 0$, что и утверждается в 2) для $l = 2n$.

Если, в принятых выше обозначениях, справедливо неравенство

$$l + k \leq 2(n-k),$$

то в силу предположения индукции имеем

$$\mathrm{mult}_Z\, D^+_{\geq l+k} > \frac{2(n-k)-(l+k)}{3} = \frac{2n-l}{3} - k,$$

так что дивизор (13), полученный вычитанием из уравнения f уравнения дивизора D^+_E, содержит Z с кратностью строго большей, чем

$$k + \mathrm{mult}_Z\, D^+_{\geq l+k} > \frac{2n-l}{3}$$

(поскольку дивизор (13) содержит с кратностью k исключительную квадрику E), откуда, с учетом неравенства $\mathrm{mult}_Z\, D^+_l > 2n-l$, получаем искомое неравенство (9).

Если выполнено неравенство

$$l+k > 2(n-k),$$

то мы не можем применить предположения индукции, однако справедлива оценка

$$k > \frac{2n-l}{3},$$

так что, рассуждая как выше, снова получаем неравенство (9) просто потому, что дивизор (13) содержит исключительную квадрику E с кратностью k.

Предложение 2.2 полностью доказано.

Замечание 2.2. Утверждение предложения 2.2 остается справедливым для ростка простейшей вырожденной квадратичной особенности, когда E — конус над невырожденной квадрикой, если предположить, что $\dim S \geq 4$. Никаких изменений в доказательстве не требуется. Можно рассмотреть общее гиперплоское сечение ростка $o \in V$ (содержащее саму точку o) и применить предложение 2.2 к этому сечению.

3 Исключение максимальной особенности

3.1 Оценка кратности в двойной точке. Пусть $V \subset \mathbb{P} = \mathbb{P}^{M+1}$ — гиперповерхность степени $M+1$, где $M \geq 8$, $o \in V$ — изолированная квадратичная особенность, удовлетворяющая условиям регулярности (R2.1-R2.2). Положим

$$\varphi\colon V^+ \to V$$

— раздутие точки o, $E = \varphi^{-1}(o)$ — исключительная квадрика. Символом H обозначаем класс гиперплоского сечения V. Мы пользуемся обозначениями п. 0.3, в частности, $q_2 = 0$ есть уравнение касательного конуса в точке o.

Пусть $D \sim nH$ — эффективный дивизор, D^+ — его собственный прообраз, $D^+ \sim nH - \nu E$ для некоторого $\nu \geq 1$.

Предложение 3.1. *Имеет место неравенство* $\nu \leq \frac{3}{2}n$.

Доказательство. Неравенство линейно по дивизору D, так что без ограничения общности можно считать, что D — простой дивизор. Предположим противное: $\nu > \frac{3}{2}n$. Для первого гиперкасательного дивизора $D_2 = \{q_2\,|_V = 0\}$ имеем

$$D_2^+ \sim 2H - 3E,$$

так что D_2 и D — различные простые дивизоры. Следовательно, теоретико-множественное пересечение $D \cap D_2$ имеет коразмерность два и корректно определен эффективный цикл $Y = (D \circ D_2)$ коразмерности два, удовлетворяющий неравенству

$$\frac{\mathrm{mult}_o}{\deg} Y \geq \frac{3}{2} \cdot \frac{2\nu}{n(M+1)} > \frac{9}{2(M+1)}.$$

Рассмотрим теперь стандартные гиперкасательные системы

$$\Lambda_k = \left| \sum_{i=0}^{k-2} s_i f_{k-i} = 0 \right|,$$

где $f_j = q_2 + \ldots + q_j$ — левый отрезок уравнения V в точке o, s_i пробегает множество всех однородных многочленов от координат z_* степени i. В силу условия регулярности (R2.1) при $r = 2, \ldots, M$ имеем

$$\mathrm{codim}\, \mathrm{Bs}\, \Lambda_k = k - 1,$$

так что обычным способом [2,4] строим последовательность неприводимых подмногообразий

$$Y_2 = Y, Y_3, \ldots, Y_{M-1}$$

коразмерности $\mathrm{codim}\, Y_i = i$, где $Y_{i+1} \subset Y_i$ есть неприводимая компонента эффективного цикла $(Y_i \circ D_{i+2})$, $D_j \in \Lambda_j$ — гиперкасательный дивизор общего положения, причем в качестве Y_{i+1} выбираем компоненту с максимальным отношением $\mathrm{mult}_o / \deg$. Эффективный цикл $(Y_i \circ D_{i+2})$ корректно определен, потому что $\mathrm{codim}\, \mathrm{Bs}\, \Lambda_{i+2} = i + 1$, так что общий дивизор D_{i+2} не содержит Y_i. Имеем оценку

$$\frac{\mathrm{mult}_o}{\deg} Y_{i+1} \geq \frac{i+3}{i+2} \cdot \frac{\mathrm{mult}_o}{\deg} Y_i,$$

так что для последнего подмногообразия, кривой Y_{M-1}, получаем неравенство

$$\frac{\mathrm{mult}_o}{\deg} Y_{M-1} \geq \frac{\mathrm{mult}_o}{\deg} Y \cdot \frac{5}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{M+1}{M} > \frac{9}{8},$$

что, конечно, невозможно. Полученное противоречие доказывает предложение.

3.2. Редукция к гиперплоскому сечению. Обратимся к **доказательству теоремы 5.** Предположим, что пара $(V, \frac{1}{n}D)$ имеет точку o изолированным центром неканонической особенности. В силу линейности неравенства

Нетера-Фано можно предполагать, что D — простой дивизор. Согласно только что доказанному предложению 3.1, $\nu \leq \frac{3}{2}n$, так что мы находимся в ситуации п. 2.2. Пара $(V^+, \frac{1}{n}D^+)$ не лог канонична, некоторое подмногообразие $S \subset E$ есть центр не лог канонической особенности этой пары. Считаем, что S имеет максимальную размерность среди всех центров таких особенностей, так что $\dim S \geq 4$.

Предложение 3.2. *S имеет коразмерность не меньше двух в исключительной квадрике E.*

Доказательство. Если $S \subset E$ — простой дивизор, то, согласно предложению 2.2, S есть гиперплоское сечение квадрики E. Пусть $P \ni o$ — единственная гиперплоскость в $\mathbb{P}$, высекающая S на E, т. е.

$$V_P^+ \cap E = S,$$

где $V_P = V \cap P$, $V_P^+ \subset V^+$ — собственный прообраз. Пара

$$(V, V_P)$$

канонична, так что $D \neq V_P$ и теоретико-множественное пересечение $D \cap V_P$ имеет коразмерность два. Для эффективного цикла $D_P = (D \circ V_P)$ коразмерности два имеем

$$\mathrm{mult}_o D_P = \mathrm{mult}_o D + 2\,\mathrm{mult}_S D^+ > 4n,$$

так что, рассуждая как при доказательстве предложения 3.1, строим последовательность неприводимых подмногообразий

$$Y_2, Y_3, \ldots, Y_{M-1},$$

$\mathrm{codim}\, Y_i = i$, Y_2 — неприводимая компонента цикла D_P, удовлетворяющая неравенству

$$\frac{\mathrm{mult}_o}{\deg} Y_2 \geq \frac{\mathrm{mult}_o}{\deg} D_P > \frac{4}{M+1},$$

и получаем противоречие:

$$\frac{\mathrm{mult}_o}{\deg} Y_{M-1} > \frac{4}{M+1} \cdot \frac{5}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{M+1}{M} = 1,$$

что невозможно. Предложение доказано.

Итак, реализуется вторая возможность предложения 2.2: найдется гиперплоское сечение $Z \supset S$ исключительной квадрики E, удовлетворяющее неравенству (9). Пусть $P \subset \mathbb{P}$ — единственная гиперплоскость, высекающая Z на E (в том же смысле, что и в доказательстве предложения 3.2), $V_P = V \cap P \neq D$. Для эффективного цикла $D_P = (D \circ V_P)$ коразмерности два имеем

$$\mathrm{mult}_o D_P \geq \mathrm{mult}_o D + 2\,\mathrm{mult}_Z D^+ > \frac{4}{3}(l+n) > \frac{8}{3}n.$$

К сожалению, этой оценки недостаточно для исключения максимальной особенности таким же способом, который использовался в доказательстве предложений 3.1 и 3.2. (Нижняя граница для $(\mathrm{mult}_o / \deg)Y_{M-1}$ оказывается меньше единицы, что не позволяет получить противоречие.) Однако мы можем рассмотреть пару

$$(V_P, \frac{1}{n}D_P).$$

В силу обращения присоединения ее собственный прообраз

$$(V_P^+, \frac{1}{n}D_P^+)$$

относительно раздутия точки o не лог каноничен, причем подмногообразие $S \subset E_P = Z$ есть центр не лог канонической особенности этой пары. Можно считать, что

$$\mathrm{mult}_o D_P^+ \leq 4n,$$

иначе противоречие получается дословно таким же рассуждением, как в доказательстве предложения 3.2. Без ограничения общности можно считать S максимальным центром не лог канонической особенности пары $(V_P^+, \frac{1}{n}D_P^+)$. Согласно замечанию 2.2 (и в силу неравенства $\dim S \geq 4$) можно применить предложение 2.2 к последней паре и получить альтернативу: либо

1) S — гиперплоское сечение квадрики E_P, либо

2) найдется гиперплоское сечение $Z^* \supset S$ квадрики E_P, удовлетворяющее неравенству

$$\mathrm{mult}_{Z^*} D_P^+ > \frac{2n - l^*}{3}, \tag{14}$$

где $D_P^+ \sim nH_P - l^* E_P$. Напомним, что целое число l^* удовлетворяет неравенству

$$l^* > \frac{2}{3}(l+n) > \frac{4}{3}n.$$

3.3. Повторное гиперплоское сечение. Пусть $R \subset P = \mathbb{P}^M$ — единственная гиперплоскость, высекающая на E_P в случае 1) подмногообразие S, в случае 2) — подмногообразие Z^*.

Предположим, что реализуется случай 1). В силу линейности неравенств

$$\mathrm{mult}_o D_P > \frac{8}{3}n \quad \text{и} \quad \mathrm{mult}_S D_P^+ > n \tag{15}$$

по дивизору D_P и того факта, что дивизор $V_R = V_P \cap R$ им не удовлетворяет, можно считать, что (возможно, приводимый) дивизор D_P не содержит V_R компонентой (иначе удалим эту компоненту, отчего оба неравенства (15) могут только усилиться). Поэтому пересечение $D_P \cap V_R$ имеет коразмерность два на V_P и корректно определен эффективный алгебраический цикл

$$D_R = (D_P \circ V_R),$$

удовлетворяющий неравенству

$$\mathrm{mult}_o D_R \geq \mathrm{mult}_o D_P + 2\,\mathrm{mult}_S D_P^+ > \frac{14}{3}n. \tag{16}$$

В силу линейности последнего неравенства можно считать, что $D_R = Y$ — неприводимое многообразие, т. е. простой дивизор на V_R. Однако V_R есть сечение гиперповерхности V линейным подпространством $R \subset \mathbb{P}$ коразмерности два. Пусть $D_2\,|_R = \{q_2\,|_{V_R} = 0\}$ — первый гиперкасательный дивизор многообразия V_R. Согласно условию регулярности (R2.2), $D_2\,|_R$ неприводим и не удовлетворяет неравенству (16), т. е.

$$Y \neq D_2\,|_R$$

и потому $Y \not\subset D_2 = \{q_2\,|_V = 0\}$. Пусть Y_4 — неприводимая компонента эффективного алгебраического цикла $(Y \circ D_2)$, имеющая максимальное отношение $\mathrm{mult}_o / \deg$. Справедливо неравенство

$$\frac{\mathrm{mult}_o}{\deg} Y_4 > \frac{7}{M+1}.$$

Теперь рассуждаем как выше: строим последовательность неприводимых подмногообразий

$$Y_4, Y_5, \ldots, Y_{M-1},$$

$\mathrm{codim}_V Y_i = i$, Y_{i+1} есть неприводимая компонента эффективного цикла $(Y_i \circ D_{i+2})$, где $D_{i+2} \in \Lambda_{i+2}$ — общий гиперкасательный дивизор. Для Y_{M-1} имеем оценку

$$\frac{\mathrm{mult}_o}{\deg} Y_{M+1} > \frac{7}{M+1} \cdot \frac{M+1}{6} = \frac{7}{6},$$

что невозможно. Противоречие исключает случай 1).

Рассмотрим, наконец, наиболее трудный случай 2). Снова воспользуемся линейностью условий, которым удовлетворяет дивизор D_P на V_P: неравенства

$$\mathrm{mult}_o D_P > \frac{8}{3}n$$

и существования не лог канонической особенности пары $(V_P^+, \frac{1}{n} D_P^+)$ с центром S. Положим, как выше, $V_R = V_P \cap R$. Поскольку $\mathrm{mult}_o V_R = 2 < \frac{8}{3}$ и пара (V_P^+, V_R) лог канонична, можно считать, что дивизор D_P не содержит гиперплоское сечение V_R компонентой. Поэтому корректно определен эффективный цикл коразмерности два (относительно V_P) $D_R = (D_P \circ V_R)$, удовлетворяющий неравенству

$$\mathrm{mult}_o D_R \geq \mathrm{mult}_o D_P + \mathrm{mult}_{Z^*} D_P^+ > \frac{28}{9}n. \tag{17}$$

Как и в случае 1), неравенства (17) достаточно, чтобы (в силу условия регулярности (R2.2)) заключить, что компонента $Y = Y_3$ цикла D_R, имеющая максимальное отношение $\mathrm{mult}_o / \deg$, не содержится в дивизоре $D_2 = \{q_2\,|_V = 0\}$, так что корректно определен эффективный цикл

$$(Y_3 \circ D_2),$$

в котором найдется неприводимая компонента Y_4, удовлетворяющая неравенству

$$\frac{\mathrm{mult}_o}{\deg} Y_4 > \frac{14}{3(M+1)}. \tag{18}$$

В силу условий регулярности (R2.2) эту процедуру можно повторить еще три раза. Рассмотрим подробно первый шаг. Подмногообразие

$$W_{2\cdot 3} = \{q_2 = 0\} \cap \{q_3 = 0\} \cap V_R$$

неприводимо, имеет степень $\deg W_{2\cdot 3} = 6(M+1)$ и кратность

$$\mathrm{mult}_o W_{2\cdot 3} = 24,$$

так что $W_{2\cdot 3} \neq Y_4$. Поскольку по построению

$$Y_4 \subset \{q_2 = 0\} \cap V_R,$$

отсюда следует, что $Y_4 \not\subset \{q_3 = 0\}$, так что

$$Y_4 \not\subset D_3 = \{(q_2 + q_3)\,|_V = 0\}$$

и корректно определен эффективный цикл $(Y_4 \circ D_3)$ коразмерности 5, некоторая неприводимая компонента Y_5 которого удовлетворяет неравенству

$$\frac{\mathrm{mult}_o}{\deg} Y_5 > \frac{56}{9(M+1)}.$$

Точно таким же образом рассмотрим неприводимое подмногообразие

$$W_{2\cdot 3\cdot 4} = W_{2\cdot 3} \cap \{q_4 = 0\}$$

и построим неприводимое подмногообразие $Y_6 \subset V$ коразмерности 6, удовлетворяющее неравенству

$$\frac{\mathrm{mult}_o}{\deg} Y_6 > \frac{70}{9(M+1)}.$$

Наконец, рассматривая подмногообразие

$$W_{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = W_{2\cdot 3\cdot 4} \cap \{q_5 = 0\},$$

построим неприводимое подмногообразие $Y_7 \subset V$ коразмерности 7, удовлетворяющее неравенству

$$\frac{\mathrm{mult}_o}{\deg} Y_7 > \frac{28}{3(M+1)}.$$

Если $M = 8$, получаем противоречие. Если $M \geq 9$, то применяем технику гиперкасательных дивизоров в традиционном варианте (как в доказательстве предложения 3.1), пересекая Y_7 с общими гиперкасательными дивизорами $D_9, \ldots$. Для неприводимой кривой Y_{M-1} получаем оценку

$$\frac{\mathrm{mult}_o}{\deg} Y_{M-1} > \frac{28}{3(M+1)} \cdot \frac{M+1}{9} = \frac{28}{27}.$$

Полученное противоречие завершает исключение случая 2) и доказательство теоремы 5.

Литература

1. Пухликов А.В., Бирациональная геометрия прямых произведений Фано. Известия РАН, сер. матем. 2005. Т. 69, no. 6, 153-186.

2. Пухликов А.В., Бирационально жесткие многообразия. I. Многообразия Фано. Успехи матем. наук. 2007. Т. 62, вып. 5. С. 15-106.

3. Пухликов А.В., Бирационально жесткие гиперповерхности Фано с изолированными особенностями. Матем. сборник. 2002. Т. 193, no. 3. С. 135-160.

4. Pukhlikov A.V., Birational automorphisms of Fano hypersurfaces, Invent. Math. **134** (1998), no. 2, 401-426.

5. Cheltsov I.A., Fano varieties with many self-maps, Adv. Math. **217** (2008), no. 1, 97-124.

6. Kollár J., et al., Flips and Abundance for Algebraic Threefolds, Asterisque 211, 1993.

7. Чельцов И.А. Лог-канонические пороги на гиперповерхностях. Матем. сборник. 2001. Т. 192, no. 8. С. 155-172.