Письма о бирациональном
VII. Упорядоченный обрыв

В.В. Шокуров *

5-ое июня/24-го июля, 2006 – Серебряная свадьба; Москва

Аннотация

Чтобы построить результирующую модель в логПММ, достаточно установить существование логперестроек и их обрыв для некоторых последовательностей. Доказано, что из логПММ в размерности $d-1$ и обрыва терминальных логперестроек размерности d следует существование *результирующей* модели любой логпары размерности d: строго логминимальной модели или строго логтерминального лограсслоения Мори, и существование логперестроек размерности $d+1$. Отсюда вытекает существование результирующей модели 4-мерных логпар, существование логперестроек размерности 5 и География логмоделей в размерности 4.

Числа не знаем, бо кончать не маем ...
Из письма зпорожских казаков турецькому султану.

Эта заметка в основном об обрыве перестроек[1], а не о их существовании. Показано, что при определенных индуктивных предположениях и обрыве терминальных перестроек для любой логпары можно построить её логминимальную модель или лограсслоение Мори. Это равносильно Программе логМинимальных Моделей (логПММ) в слабой форме, где обрыв любой последовательности логперестроек заменен обрывом некоторой последовательности. Эта идея

*Работа выполнена при поддержке NSF (гранты DMS-0400832 и DMS-0701465).

[1]Существование последних анонсировано в Birkar C., Cascini P., Hacon C., and J. McKernan, *Existence of minimal models for varieties of log general type*, math.AG/0610203. *Добавлено автором при редактировании.*

совершенствует редукцию к допредельным перестройкам [Sh92, 4.5 и §6] [Sh00] и также появилась недавно в [AHK] (ср. определение 2 ниже). Похоже, что в большинстве приложений логПММ этого достаточно. Индуктивные предположения, включая обрыв, можно опустить вплоть до размерности 4. Результаты в размерности ≤ 4 указывают на то, что терминальный обрыв гораздо проще не терминального, например, klt обрыва, и не дает автоматически последнего. Более того, данная слабая форма логПММ в размерности ≤ 4 не использует какой-либо классификации особенностей. Однако значение данных результатов не следует преувеличивать. Они лишь показывают, что прогресс в логПММ зиждется на обрыве.

Под логПММ подразумевается программа в [Sh96, Section 5]. Терминальность логперестройки означает, что перестройка или дивизориальное сдутие терминально на перестраиваемом или соответственно на исключительном множестве, то есть минимальная логдискрепанта (м.л.д.) > 1 во всех точках такого множества. Терминальный обрыв: любая последовательность терминальных логперестроек конечна. Обычно этот обрыв применяется к последовательности экстремальных и $\mathbb{Q}$-факториальных сдутий по крайней мере в окрестности перестраиваемого множества (ср. предостережение 2 в доказательстве теоремы 2).

Всюду предполагаем, что основное поле k имеет характеристику 0; иногда поле k алгебраически замкнуто или требуется небольшое изменение при определении экстремальной кривой (см. определение 1). Мы пользуемся стандартными фактами и обозначениями логПММ из [ISh] [KMM] [Sh00]. В частности, используем стандартные обозначения: *lt* для логтерминальности; *dlt* для дивизориальной lt; *klt* для lt по Кавамате; *lc* для логканоничности; *wlc* для слабой lc. Напомним вкратце некоторую терминологию и обозначения: *рациональное* 1-сдутие не раздувает дивизоров [Sh00, стр. 91]; $\mathcal{D}_B$ – линейное $\mathbb{R}$-пространство $\mathbb{R}$-дивизоров Вейля D с носителем в Supp B и максимальной абсолютной величиной $\|D\|$ в качестве нормы [Sh00, стр. 141]; под относительным FT (Fano type) многообразием понимается относительное многообразие X/Z, на котором имеется $\mathbb{R}$-граница B такая, что $(X/Z, B)$ – klt пара Фано; о конусе кривых, стягиваниях FT многообразия X/Z и другие подробности см. в [PSh, Section 2]; $K = K_X$ обозначает канонический дивизор многообразия X; $\mathrm{LCS}(X, B)$ – подмногообразие не klt точек.

Теорема 1. *Предположим логПММ в размерности $d-1$ и обрыв терминальных логперестроек размерности d. Тогда любая пара $(X/Z, B)$ размерности d с $\mathbb{R}$-границей B имеет* результирующую *модель. Точнее, пара $(X/Z, B)$*

имеет либо строго логминимальную модель, либо строго логтерминальное лограсслоение Мори.

Пара $(X/Z,B)$ имеет логминимальную модель в том и только том случае, когда её численная логкодаирова размерность не отрицательна [Sh96, p. 263] или, эквивалентно, дивизор $K+B$ lc пары (X,B) псевдоэффективен$/Z$.

На самом деле логПММ можно заменить терминальным обрывом в размерности $\le d-1$ (ср. Следствие 3 и его доказательство).

Вопрос. Однако для $\mathbb{Q}$-границы B достаточны ли логПММ с $\mathbb{Q}$-границами и терминальный обрыв с $\mathbb{Q}$-границами?

Дополнение 1. *Когда исходная пара $(X/Z,B)$ размерности d строго логтерминальна или dlt, результирующая модель может быть построена обрывающейся последовательностью (экстремальных) логперестроек.*

Возможно, для более общих исходных пар, например, для lc пар $(X/Z,B)$, эта часть логПММ проходит: результирующие модели существуют и География логмоделей выполнена в размерности d. Аналогично, при тех же предположениях направленные klt флопы обрываются в размерности d. Ниже некоторые из этих результатов приводятся для 4-мерных многообразий без данных предположений; к этому можно добавить обрыв направленных 4-мерных klt флопов.

Следствие 1. *В предположениях теоремы 1 не отрицательность численной размерности логКодаиры по отношению к границам замкнуто или, эквивалентно, бирациональное существование лограсслоения Мори открыто.*

Чтобы получить подобный результат для обычной логкодаировой размерности нужна полуобильность [Sh96, Гипотеза 2.6].

Доказательство. По определению численная размерность определена для wlc модели [Sh96, Proposition 2.4] и wlc свойство замкнуто. Более того, для предельной границы таких многообразий результирующая модель wlc. В противном случае по теореме 1 и дополнению 1 получаем лограсслоение Мори, что открыто по отношению к границам. $\square$

Следствие 2 (ср. [AHK, Theorem 3.4]). *Любая 4-мерная пара $(X/Z,B)$ с $\mathbb{R}$-границей B имеет результирующую модель. Открытое и замкнутое свойства следствия 1 выполнены для 4-мерных пар.*

Заметим, что полуобильность [Sh96, Conjecture 2.6], специальный обрыв [Sh04, пример 8], конечность Кавамата-Матсуки [ISh, гипотеза 3.16] и [AHK, Theorem 2.15] позволяют улучшить последний результат: любая последовательность логперестроек 4-мерной lc пары $(X/Z, B)$ с псевдоэффективным$/Z$ дивизором $K + B$ обрывается (см. замечание перед определением 2). В действительности полуобильность можно заменить эффективностью пары $(X/Z, B)$ по Биркару. По специальному обрыву ограничимся лишь klt парами $(X/Z, B)$. Предполагая псевдоэффективность $K+B$, по данному следствию и полуобильности находим эффективный дивизор $E \sim_{\mathbb{R}} K + B/Z$. Значит пары $(X/Z, B)$ и $(X/Z, B + \varepsilon E)$ при достаточно малом вещественном числе $\varepsilon > 0$ обладают логминимальными моделями $(Y/Z, B_Y), (Y/Z, (B+\varepsilon E)_Y)$ с одними и теми же многообразиями Y/Z. Ранг групп гомологий $H_4(Y/Z, \mathbb{Z})$ всех таких многообразий Y/Z ограничен по Кавамате-Матсуки. Таким образом по [AHK, Theorem 2.15] с парой $(X/Z, B + \varepsilon E)$ любая последовательность логперестроек обрывается: после конечного числа перестроек каждая последующая сдувает лишь кривые и раздувает поверхность, что увеличивает ранг алгебраических циклов размерности 2. По предыдущему ранг ограничен, так как всегда применимо дополнение 1. В условиях [AHK, Theorem 3.4] обе гипотезы полуобильности и Кавамата-Матсуки выполнены по [Sh83, теорема 2.1] (ср. следствие 10) и Географии логмоделей (см. следствие 5 ниже). В действительности $\mathbb{Q}$-факториальность многообразия X можно опустить. Как и в доказательстве [AHK, Theorem 3.14] можно предполагать, что $B \geq A$, где A – обильный эффективный $\mathbb{R}$-дивизор. Географию применяем к дивизору $\sum D_i = \operatorname{Supp} B$ вблизи B. Многообразия Y/Z логминимальных моделей пары $(X/Z, B)$ отвечают странам вблизи B. При локодаировой размерности $-\infty$ логобрыв сложнее и пока не получается в общем случае.

Доказательство. Непосредственно по логПММ до размерности 3 [Sh96, Theorem 5.2] и терминальному обрыву до размерности 4 [Sh04, пример 9 и лемма 2]. □

Новая редукция. *Из логПММ в размерности $d-1$, обрыва терминальных логперестроек размерности d и существования допредельных перестроек размерности $d+1$ вытекает существование логперестроек размерности $d+1$.*

Напомним, что перестраиваемое сдутие предполагается экстремальным и малым, а перестраиваемое многообразие – $\mathbb{Q}$-факториальным.

Новая индукция. *Из логПММ в размерности $d-1$ и обрыва терминальных логперестроек размерности d вытекает существование допредельных перестроек размерности $d+1$.*

На самом деле достаточно предполагать обрыв бирациональных пар $(X/Z, B)$, *то есть со сдутием* $X \to Z$.

Тем способом, каким это будет установлено ниже [Sh00] [HMc], доказывается конечнопорожденность ограничения любой дивизориальной алгебры на приведенную компоненту допредельного сдутия размерности $d+1$. Аналогично проверяется существование допредельных перестроек размерности n с ядром размерности $n-s \leq d$ [Sh00, 1.1]. Итак, получен более терминальный вариант основной теоремы статьи [HMc].

Следствие 3. *Из логПММ в размерности $d-1$ и обрыва терминальных логперестроек размерности d вытекает существование логперестроек размерности $d+1$.*

Как и в Новой редукции перестраиваемое сдутие предполагается экстремальным и малым, а перестраиваемое многообразие – $\mathbb{Q}$-факториальным. Для d-мерных перестроек эти условия можно опустить.

Доказательство. Непосредственно по Новой редукции и индукции.

Отметим, что в размерности d можно получить более общие логперестройки как в обычной редукции [Sh00, Theorem 1.2]. □

Следствие 4. *Логперестройки как в следствии 3 существуют вплоть до размерности* 5.

Другое доказательство см. в [AHK, Theorem 4.3]. Заметим, что 4-мерные логперестройки требуют лишь терминальный обрыв в размерности 3 [ISh, Теорема 3.5].

Доказательство. Непосредственно по логПММ до размерности 3 [Sh96, Theorem 5.2] и терминальному обрыву до размерности 4 [Sh04, пример 9 и лемма 2]. □

Другие приложения таковы.

Следствие 5 (см. [Sh96, Theorem 6.20] [ISh, гипотезу 2.10]). *Гипотеза о Географии выполнена для относительных* 4*-мерных klt многообразий. Это дает ограниченный обрыв D-перестроек любого относительного* 4*-мерного* FT *многообразия.*

Подобное можно установить для любых относительных lc пар на основании легкого обобщения предложения 1, его дополнений и следствий для lc особенностей вместо dlt (см. замечание после предложения 1).

Доказательство. География получается по теоремам 1 и 2 ниже (ср. доказательство следствия 3).

В случае FT многообразий это дает универсальную границу для D-перестроек.

Подробное изложение появится в другой работе.

□

Следствие 6 (см. [Sh00, Theorem 3.33]). *Существование разложения Зарисского на относительных* 4*-мерных* FT *многообразиях. В частности, дивизориальная алгебра любого* $\mathbb{Q}$*-дивизора конечно порождена на таком многообразии.*

Доказательство. Непосредственно по следствию 5. □

Следствие 7. *Если полное алгебраическое пространство размерности* 4 *лишь с klt особенностями не содержит рациональных кривых над алгебраическим замыканием основного поля, то оно проективно.*

Доказательство. Используем метод работы [Sh95] и дополнение 1. □

Определение 1. Неприводимая кривая C на многообразии X/Z называется *экстремальной*, если она порождает экстремальный луч $R = \mathbb{R}_+[C]$ конуса Клеймана-Мори $\overline{\mathrm{NE}}(X/Z)$ и имеет минимальную степень среди кривых этого луча (относительно любого обильного дивизора). Также предполагаем стягиваемость луча R.

Если основное поле алгебраически не замкнуто, то стягивание над его алгебраическим замыканием может быть не экстремальным и в качестве экстремальной кривой берется такая кривая для (частичного) экстремального подстягивания или сумма сопряжениеи такой кривой деленная на число кривых орбиты.

Если $(X/Z, B)$ – dlt логпара с границей B такая, что дивизор $K + B$ имеет индекс m, то для любой экстремальной кривой C/Z

$$(K + B, C) \in \{\frac{n}{m} \mid n \in \mathbb{Z} \text{ и } n \geq -2dm\},$$

где $d = \dim X$. Непосредственно по антиканонической ограниченности [Sh94, Theorem]. В частности, $(K+C,B) \geq 1/m$ при $(K+B,C)>0$ (ср. [Sh96, Lemma 6.19]).

Эти результаты обобщаются на $\mathbb{R}$-границы.

Предложение 1. *Пусть $(X/Z,B)$ – lc пара с $\mathbb{R}$-границей B. Тогда существует конечное множество вещественных положительных чисел r_i и положительное целое число m такие, что для любой экстремальной кривой C/Z, около общей точки которой пара (X,B) будет dlt, выполнено включение*

$$(K+B,C) \in \{\sum \frac{r_i n_i}{m} \mid n_i \in \mathbb{Z} \text{ и } n_i \geq -2dm\},$$

где $d = \dim X$.

Если пара (X,B) dlt всюду, можно брать произвольную экстремальную кривую. Ожидается, что в действительности условие dlt можно ослабить до lc в данном предложении, его следствиях и дополнениях: для этого достаточна логПММ в размерности d [Sh96, Conjecture and Heuristic Arguments]. Точнее, достаточно существование строго логминимальных моделей над любой lc парой. Для чего достаточно логперестроек и специального обрыва в размерности d, что вытекает из логПММ в размерности $d-1$ по следствию 3, [HMc] и [Sh00, Theorem 2.3]. К тому же свойство lc лучше чем dlt: первое замкнуто (см. пример и доказательство следствия 9 ниже). Однако в наших приложениях предполагать dlt – именно то, что нам надо.

Дополнение 2. *Числа r_i и m,d зависят от пары $(X/Z,B)$, но годятся те же числа после (обобщенного) логфлопа вне $\mathrm{LCS}(X,B)$, то есть лишь в кривых C с $C \cap \mathrm{LCS}(X,B) = \emptyset$.*

Чтобы найти эти числа, используем следующее.

Лемма 1. *В предположениях предложения 1 существует разложение $B = \sum r_i B_i$, где r_i – положительные вещественные числа и B_i – $\mathbb{Q}$-границы (Вейля) такие, что*

(1) $\sum r_i = 1$;

(2) *каждый носитель* $\operatorname{Supp} B_i \subseteq \operatorname{Supp} B$;

(3) *каждый дивизор* $K+B_i$ *будет* $\mathbb{Q}$*-Картье с тривиальным пересечением* $(K+B_i, C) = 0$ *для любой кривой* C/Z *с* $(K+B, C) = 0$*;*

(4)
$$K + B = \sum r_i (K + B_i);$$

(5) *каждая пара* (X, B_i) *будет lc,* $\mathrm{LCS}(X, B_i) \subseteq \mathrm{LCS}(X, B)$ *и* (X, B_i) *dlt в том же множестве, где этому условию удовлетворяет пара* (X, B)*.*

Последнее предположение имеет смысл, поскольку имеется максимальное dlt множество в X и оно открыто: дополнение к замыканию логканонических центров, которые не dlt.

Доказательство. Основная проблема кроется в возможно вещественных кратностях границы B. Свойство (4) следует прямо из (1). Для выполнения условий (2-3) рассмотрим афинное $\mathbb{R}$-пространство $\mathbb{R}$-дивизоров

$$\mathcal{D}_B^0 = \{D \mid \mathrm{Supp}\, D \subseteq \mathrm{Supp}\, B \text{ и дивизор } K+D \text{ удовлетворяет условию о пересечении в (3)}\}.$$

Последнее означает, что $K + D$ $\mathbb{R}$-Картье и $(K + D, C) = 0$ для любой кривой C/Z с $(K+B, C) = 0$. Это пространство, на самом деле, конечномерно и определено над $\mathbb{Q}$. Точнее, оно является конечномерным $\mathbb{R}$-пространством/$\mathbb{Q}$ в конечномерном $\mathbb{R}$-пространстве $\mathcal{D}_B$ всех $\mathbb{R}$-дивизоров Вейля с носителем в $\mathrm{Supp}\, B$. Отметим для этого, что $\mathbb{R}$-Картье условие задает линейное подпространство над $\mathbb{Q}$, а любой канонический дивизор K цел. Значит условие на дивизор $K+D$ быть $\mathbb{R}$-Картье задает конечномерное афинное пространство над $\mathbb{Q}$. Каждое условие $(K+D, C) = 0$ также рационально линейно, потому что каждое пересечение $(K + B_i, C) = m_i$ рационально. Наконец, любой дивизор $D \in \mathcal{D}_B^0$ есть афинная (взвешенная) линейная комбинация $\mathbb{Q}$-Картье дивизоров $K+B_i$ с дивизорами B_i (пока не обязательно границами), сосредоточенными в $\mathrm{Supp}\, B$. Отметим, что $B \in \mathcal{D}_B^0$.

С другой стороны, $\mathbb{R}$-границы $D \in \mathcal{D}_B^0$ с lc парами (X, D) образуют выпуклый замкнутый рациональный многогранник [Sh92, 1.3.2] и граница B принадлежит этому многограннику. Каждое малое возмущение внутри многогранника сохраняет свойство klt вне $\mathrm{LCS}(X, B)$ и свойство dlt в (5). Следовательно дивизор $K + B$ обладает требуемым разложением (ср. шаг 1 в доказательстве следствия 9 ниже). $\square$

Доказательство предложения 1. Числа r_i определены по лемме 1. Положительное число m есть индекс всех дивизоров $K + B_i$, то есть каждый дивизор $m(K+B_i)$ является дивизором Картье. По свойству (5) леммы 1 и антиканонической ограниченности [Sh94, Theorem] каждое пересечение $(K + B_i, C) \geq -2d$. Тем самым

$$(K + B, C) = \sum r_i(K + B_i, C) = \sum r_i \frac{n_i}{m},$$

где $n_i \in \mathbb{Z}$ и $n_i \geq -2dm$.

Наконец, докажем дополнение. Для простоты рассмотрим лишь обычные логфлопы (некоторые замечания о более общих флопах см. ниже). Под таковыми понимаем рациональные 1-сдутия $X \dashrightarrow X'/Z$, которые и их обращения не определены лишь в кривых C/Z с $(K + B, C) = 0$. Отметим, что разложение $B = \sum r_i B_i$ и все его свойство сохраняются при логфлопах в таких кривых [ISh, определение 3.2]. То же самое выполнено для размерности d и индекса m [Sh83, 2.9.1]. Пространство $\mathcal{D}_B^0$ и многогранник границ также сохраняются (при малых флопах) или сюръективны на соответствующие пространство, многогранник при любом логфлопе. Для свойства (5) достаточно того, что логфлоп вне $\mathrm{LCS}(X, B)$.

Обобщенный логфлоп есть крепантная модификация, которая может раздувать некоторые исключительные дивизоры с логдискрепантами ≤ 1 и > 0 вне $\mathrm{LCS}(X, B)$, то есть с центрами не в $\mathrm{LCS}(X, B)$. Как говорит Кавамата, такая модификация логпар является *логK+B-эквивалентностью*, а сами пары *логK+B-эквивалентны*. Например, это может быть крепантное раздутие или его композиция с последующими логфлопами. При определенных предположениях (см. лемму 3 ниже) такое раздутие существует по конечности множества исключительных дивизоров с логдискрепантами ≤ 1 вне $\mathrm{LCS}(X, B)$. Тогда $\mathbb{Q}$-Картье свойство дивизора $K+B_i$ достаточно на раздутии и даже на логразрешении. Данное условие сохраняется при логфлопах даже обобщенных, потому что индексы пересечения могут быть вычисленны на любом общем разрешении по формуле проекции. □

Следствие 8 (об промежутке; ср. [Sh96, Lemma 6.19]). *Пусть $(X/Z, B)$ lc пара с $\mathbb{R}$-границей B. Тогда существует вещественное число $\hbar > 0$ такое, что для любой экстремальной кривой C, для которой (X, B) – dlt пара вблизи общей точки кривой C,*

$(K + B, C) \geq \hbar$, либо

$(K + B, C) \leq 0$.

То есть такие индексы пересечения $(K+B,C)$ не принадлежат промежутку $(0,\hbar)$.

Дополнение 3. *Число $\hbar$ зависит от пары $(X/Z,B)$, но то же число годится после (обобщенного) логфлопа вне* $\mathrm{LCS}(X,B)$.

Отметим, что флопы не всегда сохраняют экстремальные кривые!

Доказательство. При выполнении условий предложения 1 индексы пересечения $(K+B,C)=\sum r_in_i/m$ с экстремальными кривыми C/Z обладают свойством о.у.ц. по этому предложению. Более того, для любого вещественного числа A множество всех таких чисел $\le A$ конечно. Значит число

$$\hbar=\min\{\sum\frac{r_in_i}{m}>0\mid n_i\in\mathbb{Z}\text{ и }n_i\ge -2dm\}$$

и будет требуемым положительным.

По дополнению 2 то же самое число $\hbar$ годится после любого логфлопа вне $\mathrm{LCS}(X,B)$. $\square$

Пример. Пусть $L_i, i=1,2,3,$ – 3 различные прямые в плоскости $\mathbb{P}^2$, проходящие через точку P. Тогда множество

$$\mathcal{P}=\{D\in\mathcal{D}_F\mid(\mathbb{P}^2,D)\text{ – lc пара с }\mathbb{R}\text{-границей }D\}$$

является выпуклым замкнутым рациональным многогранником, где $F=L_1+L_2+L_3$. Грань, состоящая из границ $D=\sum b_iL_i$ с $\sum b_i=2$, дает не dlt пары $(\mathbb{P}^2,D)$ кроме 3-х исключений: $(\mathbb{P}^2,F-L_i), i=1,2,3$. Поэтому свойство dlt не замкнуто и не выпукло. Однако свойство dlt выполнено в точности на $(\mathbb{P}^2\setminus P,D)$ для любой внутренней точки D этой грани.

Следствие 9 (стабильность экстремальных лучей). *Пусть $(X/Z,B)$ – lc пара с $\mathbb{R}$-границей B и F – приведенный дивизор на X. Тогда существует вещественное число $\varepsilon>0$ такое, что если некоторая другая $\mathbb{R}$-граница $B'\in\mathcal{D}_F$ и экстремальный стягиваемый луч $R\subset\overline{\mathrm{NE}}(X/Z)$ удовлетворяют требованиям*

(1) $\|B'-B\|<\varepsilon$;

(2) $K+B'$ *$\mathbb{R}$-Картье и* $(K+B',R)<0$;

(3) *для некоторой экстремальной кривой* C *в* R *пара* (X, B) *dlt вблизи общей точки кривой* C *и то же самое выполнено для пары* (X, B') *возможно с другой экстремальной кривой;*

то имеет место полуотрицательность $(K + B, R) \leq 0$.

Если $(X, B+E)$ *– dlt пара с эффективным* $\mathbb{R}$*-дивизором* E *и* $\operatorname{Supp}(B+E) = F$, *то условие (3) можно опустить.*

Дополнение 4. *При фиксированной границе* B' *логфлоп пары* $(X/Z, B)$ *вне* $\operatorname{LCS}(X, B)$ *в любом луче* R *как в следствии сохраняет* ε *в направлении* B', *то есть стабильность снова выполнена для любого дивизора* D *отрезка* $[B_Y, B'_Y]$ *на флопе* $(Y/Z, B_Y)$, *где* B_Y *и* B'_Y *обозначают бирациональные преобразования на* Y *соответствующих границ* B *и* B' *с* X. *Точнее,* $D \in \mathcal{D}_{F_Y}$ *–* $\mathbb{R}$*-граница, логфлоп проектирует* $\mathcal{D}_F$ *на* $\mathcal{D}_{F_Y}$ *(некоторые компоненты дивизора* F *сдуваются), где* F_Y *обозначает бирациональное преобразование дивизора* F *на* Y*;*

(1) $\|B_Y - D\| < \varepsilon$.

(2) *Для любого экстремального стягиваемого луча* $R \subset \overline{\mathrm{NE}}(Y/Z)$ *такого, что* $(K_Y + D, R) < 0$ *и*

(3) *для некоторой экстремальной кривой* C *в* R *пара* (Y, B_Y) *dlt вблизи общей точки кривой* C *и то же самое выполнено для пары* (Y, B'_Y) *возможно с другой экстремальной кривой;*

имеет место неравенство $(K_Y + D, R) \leq 0$.

Предостережение 1. Логфлоп может испортить особенности пары (Y, D) в другом направлении.

Дополнение 5. *То же самое приложимо к любому логфлопу, являющемуся композицией логфлопов дополнения 4 и логфлопов с более слабым условием:*

(2)' $(K + B, R) = (K + B', R) = 0$.

Доказательство. Основная идея заключается в *коничности* свойства dlt.

Шаг 1: *Выбор числа δ.* Можно предполагать, что $B \in \mathcal{D}_F$. Существует вещественное число $\delta > 0$ такое, что

(3)' для любой $\mathbb{R}$-границы $B' \in \mathcal{D}_F$ с $\mathbb{R}$-Картье дивизором $K + B'$ и любого дивизора D в *открытом* луче $\overrightarrow{BB'}$ с $\|D - B\| \leq \delta$: D – $\mathbb{R}$-граница, пара (X, D) – dlt (в точности) там, где это выполнено для пары (X, B'); в частности, пара (X, D) обладает свойством (3) для той же экстремальной кривой что и (X, B').

По [Sh92, 1.3.2] множество

$$\mathcal{P}_B = \{D \in \mathcal{D}_F \mid (X, D) \text{ – lc пара с } \mathbb{R}\text{-границей } D\}$$

– выпуклый замкнутый (рациональный) многогранный конус в некоторой δ-окрестности вершины B. К сожалению, подобное множество со свойством dlt вместо lc не всегда замкнуто (см пример выше). Однако свойство dlt пар (X, D) выполнено в некотором максимальном открытом подмножестве в X для всех границ D внутри каждой грани многогранника $\mathcal{P}_B$. Действительно, по линейности дискрепант относительно D все внутренние дивизоры D имеют одинаковые носитель на X и одинаковые логканонические центры на X. Значит dlt разрешение пары (X, D) над максимальным dlt открытым подмножеством в X дает то же самое для любого другого внутреннего дивизора. Откуда получаем (3)' по свойству dlt внутренности (минимальной) грани многогранника $\mathcal{P}_B$, содержащей $D = B' \in \mathcal{P}_B$.

По монотонности и стабильности [Sh92, 1.3.3–4] при последнем условии следствия свойство dlt открыто и замкнуто в $\mathcal{P}_B$ вблизи B. Более того, в определении многогранника $\mathcal{P}_B$ свойство lc можно заменить на $\mathbb{R}$-Картье свойство вблизи B. Тогда свойство (3) не нужно. Действительно, каждая простая компонента дивизора E не проходит через логканонические центры пары (X, B).

Шаг 2: *Требуемое число*

$$\varepsilon = \frac{\delta}{N+1},$$

где N – любое положительное число $\geq 2d/\hbar$ и $d = \dim X$.

Действительно, пусть B' – $\mathbb{R}$-граница и C – экстремальная кривая луча R в предположениях (1-3) следствия, но $(K + B, C) > 0$. Тогда по следствию 8 $(K + B, C) \geq \hbar$ и

$$(B - B', C) = (K + B, C) - (K + B', C) > \hbar.$$

Значит

$$(K + B' + N(B' - B), C) = (K + B', C) + N(B' - B, C) < -N\hbar \leq -2d,$$

что противоречит антиканонической ограниченности [Sh94, Theorem]. Действительно, по нашему выбору числа ε и (3)', $D = B' + N(B' - B) = B + (N+1)(B' - B)$ будет $\mathbb{R}$-границей, $\|B - D\| = (N+1)\|B' - B\| < (N+1)\varepsilon \leq \delta$, и D удовлетворяет свойству (3)'. Итак, $(K + B, R) \leq 0$.

Шаг 3: *Дополнения.* Оба дополнения рассматривают логфлоп в R, то есть $(K + B, R) = 0$. При этом граница B' заменяется максимальной B' в направлении B', то есть на (возможно) новую границу B' на луче $\overrightarrow{BB'}$ такую, что величина $\|B' - B\| = \varepsilon$ или бесконечно близка к ε; в первом случае ε слегка уменьшаем. (Так как используется максимальная абсолютная величина, на самом деле в большинстве направление можно взять границу B' с большим эвклидовым расстоянием.) Тогда B' и любой дивизор $D' \in (B, B']$ обладают свойствами (1-3) следствия и свойством (3)' доказательства. В частности, свойство (2) выполнено, поскольку $(K + B, R) = 0$. То же самое приложимо к (2)' в дополнении 5.

Свойство (1) дивизора D в первом дополнение следует в основном по определению. Расстояние в (1) $< \varepsilon$ и меньше, чем длина отрезка $[B_Y, B'_Y]$, которая может быть короче и даже 0 при $B'_Y = B_Y$. Если рациональное 1-сдутие $X \dashrightarrow Y$ сдувает дивизоры, F_Y меньше, чем F, и ε меняем на $\varepsilon_Y = \|B'_Y\|$, что является максимальной абсолютной величиной относительно (не сдутых) простых компонент дивизора F_Y. (Так как F имеет конечное число компонент, число ε_Y стабилизируется после конечного числа логфлопов.) Свойство (3)' на Y в направлении D'_Y с $\delta_Y = (N+1)\varepsilon_Y$ получается из того факта, что логперестройки и логфлопы сохраняют или улучшают логособенности. Отметим, что логфлоп вне $\mathrm{LCS}(X, B)$ сохраняет klt, dlt особенности и само множество $\mathrm{LCS}(X, B)$. Логфлопы дополнения 4 будут логперестройками относительно $K + D'$ при $D' \neq B$. Такая логперестройка относительно $K + D'$ улучшает особенности пары (X, D'), на самом деле (3)' выполнено для любого дивизора D отрезка $[B_Y, (N+1)B'_Y]$; $D' \to D'_Y = D$ – сюрьективная проекция. По дополнению 2 константы $\hbar, N$, и d – те же, ε_Y, δ_Y – как выше и при условиях (2-3) дополнения требуемая полуотрицательность выполнена. Это дает те же константы для логфлопов с $(K + D', R) = 0$.

Второе дополнение получаем индукцией по композиции. □

Следствие 10 (ср. [Sh96, Corollary 6.18]). *Пусть $(X/Z, B)$ – klt wlc модель с объемным дивизором $K + B/Z$. Тогда она имеет lc модель, то есть дивизор $K + B$ полуобилен.*

Доказательство. Известно для $\mathbb{Q}$-дивизора B [Sh83, теорема 2.1] [KMM, Theorem 3-1-1 and Remark 3-1-2]. По лемме 1 имеем разложение $B = \sum r_i B_i$ со свойствами (1-5) леммы. Более того, для достаточно малого вещественного числа $\varepsilon > 0$, при $\|B_i - B\| < \varepsilon$ можно предполагать, что $(X/Z, B_i)$ – klt пара с объемным дивизором $K + B_i/Z$ и по следствию 9 $K + B_i$ численно эффективен$/Z$. По конструкции разложения границы B_i всегда можно найти в ε-окрестности от B. Следовательно каждый дивизор $K + B_i$ полуобилен$/Z$ и это же верно для $K + B$. Более того, пара $(X/Z, B' = \sum r_i' B_i)$ при любых $0 < r_i' \in \mathbb{Q}, \sum r_i' = 1$, будет klt минимальной моделью с объемным дивизором $K + B'$ и с той же lc модель, что и для $(X/Z, B)$; все такие модели *эквивалентны* в смысле [Sh96, Definition 6.1]. □

Следствие 11 (стабильность wlc моделей). *Пусть $(X/Z, B)$ – dlt wlc модель с $\mathbb{R}$-границей B и F – приведенный дивизор такие, что $\operatorname{Supp}(B) \subseteq F$ и вблизи B при любом $B' \in \mathcal{P}_B$ пара (X, B') dlt. Тогда существует вещественное число $\varepsilon > 0$ такое, что для любой другой $\mathbb{R}$-границы $B' \in \mathcal{D}_F$ с $\|B' - B\| < \varepsilon$ следующие утверждения равносильны:*

(1) *разность $H = B' - B$ численно эффективна на любой (неприводимой) кривой C/Z с $(K + B, C) = 0$;*

(2) *для некоторого вещественного числа $0 < \delta < \varepsilon/\|H\|$ пара $(X/Z, B + \delta H)$ будет dlt wlc моделью; и*

(3) *для любого вещественного числа $0 < \delta < \varepsilon/\|H\|$ пара $(X/Z, B + \delta H)$ будет dlt wlc моделью.*

Свойство dlt вблизи B выполнено, если существует эффективный $\mathbb{R}$-дивизор E такой, что пара $(X, B + E)$ dlt и $\operatorname{Supp}(B + E) = F$.

Дополнение 6. *Модели утверждения (3) эквивалентны.*

Доказательство. Выбираем то же число ε, что и доказательстве следствия 9. По нашим предположениям свойство dlt вблизи B совпадает со свойством lc: если в шаге 1 доказательства следствия 9 заменить условие lc на dlt и даже на $\mathbb{R}$-Картье условие, то получим тот же конус $\mathcal{P}_B$ в ε-окрестности вершины B.

(1)$\Rightarrow$(3): Численная эффективность в (1) включает свойство $\mathbb{R}$-Картье дивизора H. По нашему выбору чисел ε, δ и границы B' дивизор $D = B + \delta H \in \mathcal{P}_B$ и D – $\mathbb{R}$-граница. Значит по определению многогранника $\mathcal{P}_B$ пара $(X/Z, D)$ dlt. Если она не wlc, то дивизор $K + D$ численно не эффективен/Z и по [Am, Theorem 2] имеется экстремальный стягиваемый луч $R \subset \overline{\mathrm{NE}}(X/Z)$, удовлетворяющий условиям (2-3) следствия 9 с $B' = D$. Значит по следствию $(K+B, R) \leq 0$ и, таким образом, $(K+B, R) = 0$ по свойству wlc пары $(X/Z, B)$. Но $(H, R) < 0$, что противоречит (1).

(3)$\Rightarrow$(2): непосредственно по предположениям.

(2)$\Rightarrow$(1): Предположим, что $(H, C) < 0$ для некоторой (неприводимой) кривой C/Z с $(K + B, C) = 0$. Тогда $(K + B + \delta H, C) = \delta(H, C) < 0$, что противоречит свойству wlc в (2).

Эквивалентность дополнения следует по линейности формы пересечения. Если $(K+B+\delta H, C) = 0$ при некотором числе δ в (3), то $(K+B+\delta H, C) = 0$ при любом δ в (3). В противном случае $(K + B + \delta H, C) < 0$ для некоторого δ в (3). Аналогично, если $(K + B + \delta H, C) > 0$ при некотором δ в (3), то $(K + B + \delta H, C) > 0$ при любом δ в (3). □

Лемма 2 (выпуклость эквивалентности). *Если две wlc модели эквивалентны, то в промежутке между ними все результирующие модели существуют и являются wlc моделями эквивалентными каждой из двух.*

Доказательство. Предположим, что wlc модели $(X/Z, B)$ и $(X/Z, B')$ эквивалентны; по определению можно считать что они имеют одно и то же многообразие X/Z. Проверим, что любая модель $(X/Z, B'')$ между ними, то есть при любом $B'' \in [B, B']$, будет wlc моделью эквивалентной каждой из рассмотренных выше; снова берем то же многообразие X/Z. Это также дает существование результирующей модели пары $(X/Z, B'')$.

Действительно, для некоторых вещественных чисел $\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$, $B'' = \alpha B + \beta B'$. Пусть C/Z – кривая с $(K + B, C) = 0$. Тогда $(K + B', C) = 0$, потому что модели $(X/Z, B)$ и $(X/Z, B')$ эквивалентны. Значит по линейности индекса пересечения

$$(K + B'', C) = \alpha(K + B, C) + \beta(K + B', C) = 0.$$

Аналогично, если $(K+B, C) > 0$, то $(K+B', C)$ и $(K+B'', C) > 0$. Значит $(X/Z, B'')$ – wlc модель эквивалентная моделям $(X/Z, B)$ и $(X/Z, B')$.

Отметим, что (X, B'') lc (ср. [Sh92, 1.3.2]) и каждая логдискрепанта $a(E, X, B'') = \alpha a(E, X, B) + \beta a(E, X, B')$. $\square$

Следующее понятие формализует известный метод из [Sh92, 4.5] редукции логперестроек к допредельным перестройкам и оно чрезвычайно важно в наших доказательствах. То же понятие под именем “направленные перестройки” появилось в [AHK]. Однако оно излишне там: в [AHK, Theorem 3.4 and Corollaries 3.5-6] любая последовательность логперестроек обрывается (см. объяснение к следствию 2).

Определение 2 (H-обрыв). Пусть $(X/Z, B)$ – lc пара и H – $\mathbb{R}$-дивизор. Последовательность логперестроек (не обязательно экстремальных)

$$(X_1 = X/Z, B_1 = B) \dashrightarrow (X_2 = X_1^+/Z, B_2 = B_1^+) \dashrightarrow \dots$$

называется *H-упорядоченной*, если каждой перестройке $X_i \dashrightarrow X_{i+1}/Z$ можно сопоставить вещественное число $\lambda_i > 0$ так, что

(1) эти числа убывают: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$;

(2) каждая перестройка $X_i \dashrightarrow X_{i+1}/Z$ есть логфлоп относительно $K_{X_i} + B_i + \lambda_i H_i$, где H_i – бирациональный образ дивизора H на X_i; и

(3) каждая пара $(X_i/Z, B_i + \lambda_i H_i)$ есть wlc модель.

Говорим, что перестройка $X_i \dashrightarrow X_{i+1}/Z$ имеет *уровень* λ_i относительно H. Итак, *H-обрыв* данной последовательности H-упорядоченных логперестроек означает её обрыв, то есть конечность.

Очевидно, обрыв любой последовательности не тривиальных логперестроек влечет H-обрыв любого её H-упорядочивания. С другой стороны, H-обрыв последовательности логперестроек достаточнен для её обрыва и позволяет построить результирующую модель.

Предложение 2. *Для любой исходной klt wlc модели $(X/Z, B + \lambda_1 H)$ из H-обрыва следует существование результирующей модели пары $(X/Z, B)$, в частности, обрыв соответствующих логперестроек пары $(X/Z, B)$.*

Боле того, для данной исходной модели существует H-упорядоченная последовательность логперестроек при существовании логперестроек размерности $d = \dim X$.

Доказательство. Пусть $X_n \dashrightarrow X_{n+1}/Z$ – последняя перестройка уровня λ_n. По определению $(X_{n+1}/Z, B_{n+1} + \lambda_n H_{n+1})$ – wlc модель и $\lambda = \lambda_n > 0$. Если дивизор $K_{X_{n+1}} + B_{n+1}$ численно эффективен над$/Z$, то $(X_{n+1}/Z, B_{n+1})$ – wlc модель, результитующая модель пары $(X/Z, B)$.

В противном случае дивизор $K_{X_{n+1}} + B_{n+1}$ численно не эффективен$/Z$. По индукции предполагаем, что $(X_{n+1}/Z, B_{n+1} + \lambda_n H_{n+1})$ – klt пара (см. ниже доказательство существования H-упорядоченных перестроек). Тогда по следствию 9 с $(X, B) = (X_{n+1}, B_{n+1} + \lambda_n H_{n+1})$ либо конус $\overline{\mathrm{NE}}(X_{n+1}/Z)$ имеет экстремальный луч R такой, что $(K_{X_{n+1}} + B_{n+1} + \lambda_n H_{n+1}, R) = 0$, $(H_{n+1}, R) > 0$ и $(K_{X_{n+1}} + B_{n+1}, R) < 0$, либо по следствию 11 существует число $0 < \lambda_{n+1} < \lambda_n$ такое, что $(X_{n+1}/Z, B_{n+1} + \lambda_{n+1} H_{n+1})$ – wlc модель. В первом случае по нашим предположениям луч R дает лограсслоение Мори $X_{n+1} \to Y/Z$, результирующую модель с границей B_{n+1} пары $(X/Z, B)$, потому что дивизор H_{n+1} численно обилен$/Y$ и $\lambda_n > 0$. Во втором случае поступаем следующим образом. Можно предполагать число λ_{n+1} минимальным в нашей конструкции, то есть предполагая численную эффективность дивизора $K_{X_{n+1}} + B_{n+1} + \lambda_{n+1} H_{n+1}/Z$; свойство klt сохраняется по монотонности [Sh92, 1.3.3]. Затем получаем лограсслоение Мори как и в первом случае.

Теперь объясним как продолжить последовательность логперестроек, когда престройка $X_n \dashrightarrow X_{n+1}$ – не последняя. Если стягивание выше луча R бирационально, то оно имеет логперестройку $X_{n+1} \dashrightarrow X_{n+2} = X_{n+1}^+/Z$ (возможно дивизориальное сдутие). Она будет флопом wlc модели $(X_{n+1}/Z, B_{n+1} + \lambda_n H_{n+1})$ и поэтому удовлетворяет требованиям (1-3) определения 2 с $\lambda_{n+1} = \lambda_n$. Отметим, что он сохраняет klt свойство пары. В противном случае рассматривается подобная конструкция для мнимального числа $\lambda_{n+1} < \lambda_n$ как выше. Снова она продолжает H-упорядоченную последовательность, когда луч R отвечает сдутию. Поскольку (X_{n+1}, B_{n+1}) – lc пара, $(X_{n+1}, B_{n+1} + \lambda_n H_{n+1})$ – klt и $0 < \lambda_{n+1} < \lambda_n$, по монотонности [Sh92, 1.3.3] $(X_{n+1}, B_{n+1} + \lambda_{n+1} H_{n+1})$ – klt пара. Любой флоп сохраняет свойство klt. Значит пара $(X_{n+2}, B_{n+2} + \lambda_{n+1} H_{n+2})$ тоже klt, что завершает индукцию.

Обычно мы включаем дивизориальные сдутия в логперестройки. Таким образом, мы рассматриваем не только малые модификации при флопах, либо используем тот факт, что после конечного число логперестроек все последующие малы и тому же удовлетворяют флопы. $\square$

Легко указать пример последовательности логперестроек, которая не H-упорядочена по крайней мере для некоторого дивизора H. Возьмите два не пересекающихся сдутия, одно положительное и одно отрицательное относительно H.

Ниже все изоморфизмы моделей, например, локальные, индуцированы их бирациональными изоморфизмами.

Теорема 2. *Предположим логПММ в размерности $d-1$ и обрыв терминальных логперестроек размерности d. Пусть $(X_i/Z, B_i)$ – последовательность d-мерных dlt wlc моделей, сходящаяся к dlt паре $(X/Z, B)$ в следующем смысле:*

(1) *каждая модель X_i изоморфна многообразию X (и модели между собой) в коразмерности 1; все дивизоры B_i и B с* конечным *носителем, то есть существует приведенный дивизор F такой, что B и каждый дивизор $B_i \in \mathcal{D}_F$;*

(2) *каждая модель X_i изоморфна многообразию X вблизи $\mathrm{LCS}(X, B) = S = \lfloor B \rfloor$ и $\mathrm{LCS}(X_i, B_i) = \mathrm{LCS}(X, B)$: существуют окрестности U_i множества $\mathrm{LCS}(X_i, B_i)$ и V_i множества $\mathrm{LCS}(X, B)$, которые изоморфны и отождествляются согласно бирациональному изоморфизму условия (1);*

(3) *имеется конечное число простых b-дивизоров (исключительных и не исключительных) D_j* вне *(возможно* пересекающих*) $\mathrm{LCS}(X, B)$, то есть $\mathrm{center}_X D_j \not\subseteq \mathrm{LCS}(X, B)$, которые содержат все положительные* кодискрепанты $b(D_j, X_i, B_i) = 1 - a(D_j, X_i, B_i)$ *вне $\mathrm{LCS}(X, B)$, то есть, если $\mathrm{center}_{X_i} D_j \not\subseteq \mathrm{LCS}(X, B)$ и $b(D_j, X_i, B_i) > 0$ при некотором значении i, то D_j – один из этих b-дивизоров;*

(4) *существует предел* b-$\mathbb{R}$-дивизоров $\overline{B}_i = S + \sum b(D_j, X_i, B_i) D_j$*:*

$$\overline{B}_{\lim} = S + \sum b_j D_j = S + \sum \lim_{i \to \infty} b(D_j, X_i, B_i) D_j;$$

(5) *$B = B_{\lim} = S + \sum b_j D_j$, где суммирование ведется лишь по дивизорам D_j не исключительным на X, и $\overline{B} \geq \overline{B}_{\lim}$, где $\overline{B} = S + \sum b(D_j, X, B) D_j$ – крепантная b-субграница пары (X, B), продолженная на b-дивизорах D_j.*

Тогда последовательность конечна в модельном смысле*, то есть множество классов эквивалентности моделей $(X_i/Z, B_i)$ конечно.*

Заметим, что в действительности условие (3) влечет конечность носителя в (1).

Следствие 12. *Предположим логПММ в размерности $d-1$ и обрыв терминальных логперестроек размерности d. Пусть $(X_i/Z, B_i)$ – последовательность d-мерных dlt логпар таких, что*

(1) *каждая пара $(X_i/Z, B_i)$ является wlc моделью;*

(2) *все модели изоморфны в коразмерности* 1*; и изоморфны вблизи* $\mathrm{LCS}(X_i, B_i)$*;*

(3) *для некоторых $\mathbb{R}$-границ B и B', каждая граница $B_i \in [B, B']$ и модели упорядочены в отрезке: $B_i = B + \lambda_i H, H = B' - B, \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots, \lambda_i \in (0,1]$; и*

(4) *при некотором значении i логпары $(X_i/Z, B)$ and $(X_i/Z, B')$ будут dlt с $\mathrm{LCS}(X_i, B) = \mathrm{LCS}(X_i, B') = \mathrm{LCS}(X_i, B_i)$.*

Тогда модели стабилизируются*: все модели эквивалентны при $i \gg 0$.*

Отметим, что условие (3) имеет смысл, потому что дивизоры Вейля каждой модели те же самые по первому утверждению в (2).

Доказательство.

Шаг 1: *Не эквивалентность моделей.* По лемме 2 предполагаем, что числа λ_i образуют бесконечную последовательность, $\lambda_0 = \lim_{i\to\infty} \lambda_i$ и модели (X_i, B_i) попарно не эквивалентны. В противном случае выполнена стабилизация.

Шаг 2: *Условиям теоремы 2 удовлетворяет подходящая подпоследовательность.* Можно считать $i = 1$ в предположении (4). Рассмотрим пару $(X = X_1/Z, B := B_{\mathrm{lim}})$, где $B := B_{\mathrm{lim}} = \lim_{i\to\infty} B_i = B + \lambda_0 H$, или $\lambda_0 = 0$ для новой границы B. Условия (1-2) теоремы 2 выполнены по предположениям (2-4). Условие (3) теоремы 2 удовлетворяется на подмножестве $\mathfrak{b}$-дивизоров D_j с $b(D_j, X, B) \geq 0$ и $\mathrm{center}_X D_j \not\subseteq \mathrm{LCS}(X, B)$ или, эквивалентно, $\mathrm{center}_X D_j \in X \backslash \mathrm{LCS}(X, B)$; если к тому же дивизор D_j не исключителен, то предполагаем дивизор D_j лежащим в $\mathrm{Supp}\, B$ или в $\mathrm{Supp}\, B'$. Множество дивизоров D_j конечно по [Sh96, Corollary 1.7]. Тогда требуемое условие выполнено для пар (X, B_i) с любыми границами B_i достаточно близкими к B по предположениям (2) и (4), стабильностью свойства klt и непрерывности логдискрепант относительно кратностей в D_j, где граница B_i на X является её бирациональным образом с X_i. Значит из предположения (1) и монотонности [ISh, леммы 2.4] следует условие (3) теоремы 2 при всех $i \gg 0$.

С точностью до сходимости в условии (4) теоремы 2, все условия в (5) следуют из конструкции и монотонности [ISh, леммы 2.4]. Действительно, $B = B_{\lim}$ по конструкции, $b(D_j, X, B_i) \geq b(D_j, X_i, B_i)$ по монотонности и свойству wlc пар $(X_i/Z, B_i)$. Поэтому

$$b(D_j, X, B) = b(D_j, X, B_{\lim}) = \lim_{i\to\infty} b(D_j, X, B_i) \geq \lim_{i\to\infty} b(D_j, X_i, B_i) = b_j,$$

и $\overline{B} \geq \overline{B}_{\lim}$, что дает условие (5) теоремы 2.

Если при фиксированном дивизоре D_j дискрепанты $b(D_j, X_i, B_i)$ не ограничены снизу, то можно опустить такой дивизор D_j и взять подпоследовательность с $\lim_{i\to\infty} b(D_j, X_i, B_i) = -\infty$. В ограниченном случае получаем в конце концов сходящуюся подпоследовательность условия (4).

Теперь стабилизация получается из конечности теоремы 2, что противоречит шагу 1. $\square$

Лемма 3 (Каноническое раздутие). *Предположим логПММ в размерности $d-1$ и обрыв терминальных логперестроек размерности d. Пусть (X, B) – klt логпара размерности d и $Z \subset X$ – замкнутое подмногообразие коразмерности ≥ 2. Тогда существует (единственное при алгоритме доказательства) крепантное раздутие $Y \to X$ такое, что*

(1) *многообразие Y изоморфно X над $X \setminus Z$;*

(2) *(Y, B_Y) – сп пара в коразмерности ≥ 2 над Z;*

(3) *если к тому же дивизор $K_Y + B$ с бирациональным образом границы B на Y обилен, то раздутие единственно.*

Доказательство-конструкция.

Шаг 1: Рассмотрим логразрешение с границей $B^+ = \sum b_j^+ D_j$, составленной из кодискрепант: $b_j^+ = \max\{b(D_j, X, B), 0\}$. Можно предполагать простые компоненты дивизора $\operatorname{Supp} B^+$ не пересекающимися и, что имеется лишь конечное число исключительных простых b-дивизоров E/X с $b(E, X, B) \geq$

0 или, эквивалентно, с $a(E, X, B) \leq 1$ по свойству klt [Sh96, Corollary 1.7]. Более того, все $b_j^+ < 1$ и пара (Y, B^+) терминальна в коразмерности ≥ 2. Мы используем несколько другую границу $B_Z \leq B^+$ на X: 0 на всех исключительных дивизорах$/Z$ и B^+ в остальном.

Шаг 2: Применим логПММ к паре $(Y/X, B_Z)$. Логперестройки существуют по [HMc, Theorem 1.1] или по индукции следствия 3. Каждая перестройка терминальна, потому что ненулевые компоненты E границы B_Z не сдуваются. Действительно, это выполнено над Z по предположению, потому что соответствующие кратности границы нулевые. В противном случае имеем компоненту E с $P = \mathrm{center}_X E \not\subset Z$ и пара $(X/X, B)$ вблизи P будет lc моделью пары $(Y/X, B_Z)$ даже после рассматриваемого дивизориального сдутия. Сдутие уменьшает кодискрепанту и увеличивает дискрепанту в E, что противоречит [ISh, лемме 2.4]. Значит обрыв выполнен по нашим предположениям. Поскольку результирующая модель $(Y/X, B_Z)$ бирациональна$/X$, она терминальна в коразмерности ≥ 2 и строго логминимальна.

Шаг 3: Используя полуобильность в объемном klt случае получаем lc модель $(Y/X, B_Z)$; предшествующая модель Y шага 2 и эта модель Y будут FT$/X$ (по шагу 4 ниже). Последняя удовлетворяет условиям (1) и (3). Действительно, (1) следует из единственности lc модели. По конструкции граница B_Z на Y является бирациональным образом границы B и дивизор $K_Y + B$ обилен, а такая модель тоже единственна.

Шаг 4: По отрицательности [Sh92, 1.1] у крепантной модели (Y, B_Y) пары (X, B) субграница B_Y будет границей. Не канонические особенности в коразмерности ≥ 2 вполне возможны для B_Y. Тогда применяем шаги 1–2 к (Y, B_Y) с подмногообразием Z_Y, являющимся объединением неканонических центров над$/Z$ пары (Y, B_Y). Этот процесс обрывается и в конце концов мы получаем крепантную модель $(Y/X, B_Y)$. Действительно, каждый раз конструкция раздувает по крайней мере один исключительный дивизор E с $a(E, X, B) > 0$ над неканоническим центром и имеется лишь конечное число таких дивизоров. Однако в общем случае дивизор $K_Y + B$ не обилен над X. Предложенный алгоритм дает единственное раздутие по условию (3). $\square$

Лемма 4 (D-перестройка). *Предположим логПММ в размерности $d-1$ и обрыв терминальных логперестроек размерности d. Пусть (X, B)*

– klt пара размерности d и D – простой дивизор на X такой, что пара (X, B) терминальна в коразмерности ≥ 2 на D, то есть если E – исключительный простой дивизор с $a(E, X, B) \leq 1$, то $\operatorname{center}_X E \not\subseteq D$. *Тогда D-перестройка морфизма X/X существует.*

Доказательство-конструкция. Конструкция достаточно стандартна (ср. терминализацию [ISh, теоремы 6.5] и $\mathbb{Q}$-факториализацию [ISh, леммы 7.8]). По единственности D-перестроек их можно строить локально$/X$ [Sh00, Corollary 3.6].

Шаг 1: Как в шагах 1–2 доказательства леммы 3 с $Z = \emptyset$, то есть с исходной границей $B_Z = B^+$, получаем крепантное раздутие $(Y/X, B_Y)$, которое терминально в коразмерности ≥ 2 и строго логминимально$/X$. По нашим предположениям исключительных дивизоров$/D$ нет.

Шаг 2: Пусть дивизор D – его бирациональный образ на Y. Применим теперь D-ПММ, чтобы построить численно эффективный дивизор D/X. При достаточно малом вещественном числе $\varepsilon > 0$ пара $(Y/X, B_Y + \varepsilon D)$ терминальна в коразмерности ≥ 2 и D-ПММ является логПММ. Снова логперестройки существуют. Обрыв терминален и выполнен: D-перестройки не сдувают дивизоров. Поэтому можно предполагать численную эффективность D над X.

Шаг 3: Сдутие, заданное дивизором D или $K_Y + B_Y + \varepsilon D$, будет требуемою моделью для D, D-перестройкой. Сдутие существует как в шаге 3 доказательства леммы 3, потому что многообразие Y является FT$/X$. Отметим, что данная модель мала над D, потому что на Y нет иключительных дивизоров$/D$. На других слоях$/X$ дивизор D тривиален и многообразие Y изоморфно X над $X \setminus D$. □

Основная лемма. *Пусть $(X/Z, B)$ – dlt пара, $(X'/Z, B_{X'})$ – её wlc модель, изоморфная (X, B) вблизи* $\mathrm{LCS}(X, B) = \mathrm{LCS}(X', B_{X'})$ *и $X \to Y/Z$ – (экстремальное) стягивание отрицательное относительно $K+B$. Тогда оно будет сдутием с исключительным множеством, не пересекающим* $\mathrm{LCS}(X, B)$, *и сдувает лишь b-дивизоры D с $b(D, X, B) > b(D, X', B_{X'})$.*

Сдуваемый b-дивизор D имеет $\operatorname{center}_X D$ в исключительном множестве.

Доказательство. По нашим предположениям $B_{X'}^{\log} = B_{X'}$, то есть $X \dashrightarrow X'$ – рациональное 1-сдутие. Значит по [ISh, предложению 2.5, (ii)] (ср. [Sh96, Proposition 2.4.1]) стягивание $X \to Y/Z$ не расслоено. К тому же $(K+B, C) \geq (K_{X'} + B_{X'}, C') \geq 0$ для любой неприводимой кривой C/Z, пересекающей $\mathrm{LCS}(X, B)$, где C' – бирациональный образ кривой C на X'; последний определен по нашим предположениям. Действительно, логдискрепанты простых b-дивизоров с центрами вблизи $\mathrm{LCS}(X, B)$, в частности, с центрами, пересекающими $\mathrm{LCS}(X, B)$, одинаковы для $(X', B_{X'})$ и (X, B), и по монотонности [ISh, леммы 2.4] $b(D_i, X, B) \geq b(D_i, X', B_{X'})$ для всех других b-дивизоров D_i. По этому и формуле проекции на общем разрешении многообразий X и X' получаем требуемое неравенство (ср. доказательство [ISh, предложения 2.5, (i)]). В частности, исключительное множество сдутия X/Y не пересекает $\mathrm{LCS}(X, B)$.

Теперь для простоты предположим, что существует логперестройка $(X^+/Y/Z, B^+)$ сдутия X/Y: в наших приложениях это всегда выполнено. (В противном случае можно воспользоваться последним утверждением [ISh, леммы 2.4].) Тогда пара $(X'/Z, B_{X'})$ также будет wlc моделью этого дивизориального сдутия или перестройки – основной факт логПММ. Значит $b(D, X, B) > b(D, X^+, B^+) \geq b(D, X', B_{X'})$ или, эквивалентно, $a(D, X, B) < a(D, X^+, B^+) \leq a(D, X', B_{X'})$ по монотонности [ISh, лемм 3.4 и 2.4]. □

Доказательство теоремы 2. Беря подпоследовательность, предполагаем, что модели $(X_i/Z, B_i)$ попарно не эквивалентны. Тогда надо проверить конечность последовательности.

Нас интересуют модели вне $\mathrm{LCS}(X, B)$. По условию (2) все модели dlt вблизи $\mathrm{LCS}(X, B)$ и мы сохраняем это: предполагая минимальность дивизора F в (1),

(6) в доказательстве ниже все модели $(Y/Z, D)$ с $\mathbb{R}$-границей D изоморфны многообразию X вблизи $\mathrm{LCS}(Y, D) = \mathrm{LCS}(X, B)$, $D \in \mathcal{D}_F$ вблизи $\mathrm{LCS}(X, B)$ и поэтому существует вещественное число $\varepsilon > 0$ такое, что пара (Y, D) dlt вблизи $\mathrm{LCS}(X, B)$, если к тому же $K_Y + D$ – $\mathbb{R}$-Картье дивизор и $\|D - B'\| < \varepsilon$.

Заметим также, что в нашей конструкции ниже границы B, B_i и подобные $\mathbb{R}$-границы D имеют одинаковые приведенные части: $\mathrm{LCS}(Y, D) = \lfloor D \rfloor = \mathrm{LCS}(X, B) = S$.

Шаг 1: *Терминальный предел.* Строим dlt модель $(\overline{X}/Z, B_{\overline{X}})$ такую, что

(7) модели $\overline{X}, X$ и каждая модель X_i изоморфны вблизи $\mathrm{LCS}(X, B) = \mathrm{LCS}(\overline{X}, B_{\overline{X}})$;

(8) преобразование $\overline{X} \dashrightarrow X$ и каждое преобразование $\overline{X} \dashrightarrow X_i$ являются 1-сдутиями; на $\overline{X}$ раздуты все дивизоры D_j условия (3) с $b_j \geq 0$ и с $\mathrm{center}_X D_j \cap \mathrm{LCS}(X, B) = \emptyset$;

(9) каждый $\mathbb{R}$-дивизор D на $\overline{X}$, являющийся $\mathbb{R}$-Картье вблизи $\mathrm{LCS}(X, B)$, будет $\mathbb{R}$-Картье всюду на $\overline{X}$; в частности, каждый дивизор D на $\overline{X}$ с $\mathrm{Supp}\, D \cap \mathrm{LCS}(X, B) = \emptyset$ будет $\mathbb{Q}$-Картье;

(10) $B_{\overline{X}} \geq \overline{B}_{\mathrm{lim}}$ как b-дивизоры, но дивизоры на $\overline{X}$ (то есть в простых дивизорах на $\overline{X}$); в частности, в D_j с неотрицательными кратностями b_j и с $\mathrm{center}_X D_j \cap \mathrm{LCS}(X, B) = \emptyset$ (см. (8)); и

(11) пара $(\overline{X}, B_{\overline{X}})$ dlt и терминальна *полностью* вне $\mathrm{LCS}(X, B)$ в следующем смысле: $a(E, \overline{X}, B_{\overline{X}}) > 1$, или эквивалентно $b(E, \overline{X}, B_{\overline{X}}) < 0$, в каждом исключительном простом дивизоре E с $\mathrm{center}_{\overline{X}} E \cap \mathrm{LCS}(X, B) = \emptyset$.

По лемме 3 строим чуть более слабую версию со свойствами (7), (8) с $b_j > 0$ по (5), потому что $b(D_j, X, B) \geq b_j > 0$, и (10). Лемму применяем к паре (X, B) с замкнутым подмногообразием, являющимся объединением цетров $\mathrm{center}_X E$ исключительных дивизоров E с $a(E, X, B) < 1$, или эквивалентно $b(E, X, B) > 0$, и с $\mathrm{center}_X E \cap \mathrm{LCS}(X, B) = \emptyset$, в частности, всех $\mathrm{center}_X D_j$ в (8) с $b_j > 0$.

Поскольку многообразие $\overline{X}$ возможно не $\mathbb{Q}$-факториально, несколько модифицируем $\overline{X}$, чтобы оно стало достаточно $\mathbb{Q}$-факториальным и терминальным. Для полного раздутия канонических центров вне или *не пересекающих* $\mathrm{LCS}(X, B)$ используем увеличенный дивизор (граница вне $\mathrm{LCS}(X, B)$) $B_{\overline{X}} + \varepsilon H$, где H – общий обильный дивизор Картье, проходящий через такие центры. При достаточно малом вещественном $\varepsilon > 0$ не канонические центры пары $(\overline{X}, B_{\overline{X}} + \varepsilon H)$ будут лишь каноническими центрами $\mathrm{center}_{\overline{X}} E$ с $a(E, \overline{X}, B_{\overline{X}}) = 0$ и $\mathrm{center}_{\overline{X}} E \cap \mathrm{LCS}(X, B) = \emptyset$ (ср. [Sh92, 1.3.4]). Это приводит к выполнению условий (8) с $b_j = 0$ по (5), (11) и сохраняет (7), (10). Чтобы удовлетворить требованию (9), достаточно это выполнить для одного дивизора D, достаточно общего вблизи $\mathrm{LCS}(X, B)$. Действительно, по рациональности klt особенностей $\mathbb{R}$-дивизоры Вейля с точностью до $\sim_{\mathbb{R}} /X \setminus \mathrm{LCS}(X,B)$ конечно порождены. Поскольку $\mathbb{R}$-Картье свойство определяет линейное $\mathbb{R}$-пространство над $\mathbb{Q}$ в пространстве $\mathbb{R}$-дивизоров, можно предполагать его образующие D дивизорами Картье вблизи $\mathrm{LCS}(X,B)$ и целыми. Добавляя обильные дивизоры, можем предполагать их простыми и свободными вблизи $\mathrm{LCS}(X,B)$ и значит по условию (11) не проходящими через канонические (то есть не терминальные) центры вне $\mathrm{LCS}(X,B)$ (даже всюду). Каждую образующую D одну за другой можно превратить в $\mathbb{Q}$-Картье. По лемме 4 имеется малая модификация над $\overline{X}$, на которой (D-перестройке) D будет $\mathbb{Q}$-дивизором. Это дает условие (9) и завершает настоящий шаг. Свойство dlt в (11) вблизи $\mathrm{LCS}(\overline{X},B_{\overline{X}})$ по (6-7).

Шаг 2: *Предел границ.* При каждом значении i пусть B_i^+ – $\mathbb{R}$-граница на $\overline{X}$ с кратностями $\max\{b(D,X_i,B_i),0\}$ в простых дивизорах D на $\overline{X}$. Заменим свойство (10) более точным:

(10)' $B_{\overline{X}} = \overline{B}_{\mathrm{lim}}^+ = S + \sum b_j^+ D_j, b_j^+ = \max\{b_j,0\}$, как b-границы, включающие исключительные на X дивизоры D_j с неотрицательными кратностями $b_j = b_j^+$ и с $\mathrm{center}_X\, D_j \cap \mathrm{LCS}(X,B) = \emptyset$ (ср. (3), (8) и (10) выше), и $0 = b_j^+$ для всех других D_j с $\mathrm{center}_X\, D_j \cap \mathrm{LCS}(X,B) = \emptyset$ (и с $b_j < 0$; а такие D_j возможны); или эквивалентно,

$$B_{\overline{X}} = \lim_{i\to\infty} B_i^+.$$

По монотонности [Sh92, 1.3.3] свойство (11) сохранится; то же с (6) и другими свойствами пары $(\overline{X}/Z, B_{\overline{X}})$. По (9) $\mathbb{R}$-Картье свойство выполнено для всех присоединенных дивизоров $K_{\overline{X}} + B_i^+$ и $K_{\overline{X}} + B_{\overline{X}}$; $B_{\overline{X}} = B = B_{\mathrm{lim}}$ вблизи $\mathrm{LCS}(X,B)$.

К тому же по (6-7), (9) и (11):

(11)' каждая пара $(\overline{X},B_i^+)$ dlt, терминальна в смысле (11); $\mathrm{LCS}(\overline{X},B_i^+) = \mathrm{LCS}(\overline{X},B_{\overline{X}}) = \mathrm{LCS}(X,B)$; и $B_i^+ = B_i$ вблизи $\mathrm{LCS}(X,B)$.

Это верно по стабильности терминальных и klt особенности (ср. [Sh92, 1.3.4]) для подходящей подпоследовательности моделей $(X_i/Z,B_i)$ при всех $i \gg 0$. Последнее утверждение в (11)' позволяет пользоваться для границ B_i^+ свойствами границ B_i вблизи $\mathrm{LCS}(X,B)$, например (2).

Шаг 3: *Wlc терминальный предел.* Можно предполагать, что $(\overline{X}/Z, B_{\overline{X}})$ – wlc модель терминальная в смысле (11). В противном случае по (11) существует экстремальное стягивание $\overline{X} \to Y/Z$ отрицательное относительно $K_{\overline{X}}+B_{\overline{X}}$ [Am, Theorem 2]. Утверждается, что стягивание бирационально, не сдувает компонент D дивизора $B_{\overline{X}}$ с положительными кратностями и не затрагивает $\mathrm{LCS}(X, B)$, то есть будет изоморфизмом в окрестности подмногообразия $\mathrm{LCS}(X, B)$. Действительно, такое стягивание стабильно при малом возмущении дивизора $B_{\overline{X}}$: при любой $\mathbb{R}$-границе $B' \in \mathcal{D}_{F+\sum D_j}$ достаточно близкой к $B_{\overline{X}}$ и с $\mathbb{R}$-Картье дивизором $K_{\overline{X}} + B'$ стягивание отрицательно относительно $K_{\overline{X}}+B'$. По (10-11)' стягивание отрицательно относительно $K_{\overline{X}} + B_i^+$ при всех $i \gg 0$. По конструкции и определению пара $(X_i/Z, B_i)$ является wlc моделью для $(\overline{X}/Z, B_i^+)$. Отметим, что $B_i = (B_i^+)^{\log}_{X_i}$, потому что $\overline{X} \dashrightarrow X_i$ – рациональное 1-сдутие (1) и (8). Следовательно стягивание не расслоено по Основной лемме, или эквивалентно, бирационально. Данное сдутие не пересекает $\mathrm{LCS}(X, B)$ по (6-7) и той же лемме. Наконец, оно не сдувает простых дивизоров D с положительными кратностями в $B_{\overline{X}}$, так как по (10)' они положительны в B_i^+ с $i \gg 0$ и $D = D_j$ с $b_j > 0$. Снова это не возможно по Основной лемме: $b(D_j, \overline{X}, B_i^+) = b(D_j, X_i, B_i)$. Более того, сдутие не сдувает дивизоров D_j с $b_j = 0$. Действительно, после такого сдутия $a + 1 = a(D_j, Y, B_Y) > a(D_j, \overline{X}, B_{\overline{X}}) = 1, a > 0$, и поскольку границы B_{Yi}^+ при всех $i \gg 0$ будут будут малыми возмущениями B_Y, то $a(D_j, Y, B_{Yi}^+) \geq 1+a/2$ при всех $i \gg 0$, где B_Y, B_{Yi}^+ – образы границ $B_{\overline{X}}, B_i^+$ соответственно на Y. Каждая пара $(X_i/Z, B_i)$ также будет wlc моделью пары $(Y/Z, B_{Yi}^+)$ и $a(D_j, X_i, B_i) \geq a(D_j, Y, B_{Yi}^+) \geq 1 + a/2$ по [ISh, лемме 2.4], или эквивалентно, $b(D_j, X_i, B_i) \leq -a/2$ и

$$0 = b_j = \lim_{i\to\infty} b(D_j, X_i, B_i) \leq -a/2 < 0,$$

противоречие.

Следовательно сдутие $\overline{X}/Y$, если оно дивизориально, либо перестройка в противном случае, сохраняет свойства (7-11) и (10-11)' с образами соответствующих границ. Заметим, что по (9) дивизориальное экстремальное сдутие сдувает $\mathbb{Q}$-Картье дивизор не пересекающий $\mathrm{LCS}(X, B)$ и, в частности, сохраняет (9). Логперестройка существует по [HMc, Theorem 1.1] или по индукции следствия 3. Она сохраняет свойство (9) по экстремальности (ср. [Sh83, 2.13.5]). Конечно, для выполнения свойства (11)' берем все модели с $i \gg 0$.

Так как по конструкции каждая логперестойка экстремальна и по

(11) терминальна, то перестройки обрываются и мы получаем wlc модель $(\overline{X}/Z, B_{\overline{X}})$ с требуемым терминальным свойством.

Предостережение 2. Возможны не $\mathbb{Q}$-факториальные логпересройки, то есть многообразие $\overline{X}$ возможно не $\mathbb{Q}$-факториально. Однако согласно обычной редукции [Sh00, Theorem 1.2] такая логперестройка существует (ср. также доказательство следствия 3 выше).

Обрыв тоже возможно не $\mathbb{Q}$-факториален. Он сводится к обычному $\mathbb{Q}$-факториальному терминальному обрыву как и в доказательстве специального обрыва [ISh, Теорема 4.8] на строго логтерминальном раздутии пары $(\overline{X}, B_{\overline{X}})$; так строится и $\mathbb{Q}$-факториализация dlt пары. Для построения такой модели любой lc пары в размерности d, достаточно существования $\mathbb{Q}$-факториальных логперестроек и специального обрыва в этой размерности. Существование терминальных не $\mathbb{Q}$-факториальных логперестроек следует из той же конструкции и следствия 10 (ср. доказательство леммы 4).

Шаг 4: *Промежутки эквивалентности.* Эти промежутки лежат в афинном пространстве $\mathcal{B}$ $\mathbb{R}$-дивизоров на $\overline{X}$, порожденных дивизорами $B_{\overline{X}}$ и B_i^+. По (1), (10–11)' и (6–8) это – конечномерное пространство в линейном пространстве $\mathbb{R}$-дивизоров с носителем в дивизорах D_j и бирациональном образе дивизора F. В этом афинном пространстве $B_{\overline{X}} = \lim_{i\to\infty} B_i^+$. Согласно Географии логмоделей [Sh96, Section 6] [ISh, 2.9] вблизи $B_{\overline{X}}$, то есть для границ в $\mathcal{B}$ близких к $B_{\overline{X}}$, ожидается конечность классов эквивалентности wlc моделей со свойством (6). Мы докажем это частично: существует вещественное число $\varepsilon > 0$ такое, что в каждом направлении B_i^+ wlc модели эквивалентны в промежутке длины ε. Конечно, предполагаем каждую границу $B_i^+ \neq B_{\overline{X}}$: иначе модель $(X_i/Z, B_i)$ эквивалентна $(\overline{X}/Z, B_{\overline{X}})$ (ср. доказательство ниже). Значит каждое направление определено. Точнее, имеется $\mathbb{R}$-граница $B_i' \in \mathcal{B}$ такая, что

(12) $\|B_i' - B_{\overline{X}}\| = \varepsilon$;

(13) $B_i^+ \in (B_{\overline{X}}, B_i')$; и

(14) все wlc модели промежутка $(B_{\overline{X}}, B_i')$ эквивалентны: любой дивизор $D \in (B_{\overline{X}}, B_i')$ будет $\mathbb{R}$-границей и $D \in \mathcal{B}$, $\lfloor D \rfloor = S$, пара $(X_i/Z, D_{X_i})$ – dlt wlc модель эквивалентная модели $(X_i/Z, B_i)$, и имеющая неотрицательные кодискрепанты $b(D_j, X_i, D_{X_i}) \geq 0$ лишь в определенных выше образующих D_j линейного пространства $\mathbb{R}$-дивизоров (см. начало настоящего

шага), где D_{X_i} образ дивизора D на X_i; D как и B_i^+ также обладает свойством (6); D_{X_i} как и B_i обладает свойствами (2-3) и (6).

Предполагаем, что $\mathbb{R}$-границы $D \in \mathcal{B}$ образуют конус с вершиной $B_{\overline{X}}$ в данной ε-окрестности точки $B_{\overline{X}}$ (ср. [Sh92, 1.3.2]). Чтобы установить (14) воспользуемся числом ε следствий 9, 11, предполагая дополнительно

(11)" для каждой $\mathbb{R}$-границы $D \in \mathcal{B}$ с $\|D - B_{\overline{X}}\| \le \varepsilon$, с $\mathbb{R}$-Картье дивизором $K_{\overline{X}} + D$ и с $\lfloor D \rfloor = S$ пара $(\overline{X}, D)$ будет dlt, обладающей свойством (6) и терминальностью как в (11).

Это следует из стабильности терминального и klt свойств при малых возмущениях $\mathbb{R}$-границ [Sh92, 1.3.4].

Действительно, рассмотрим дивизор $D = B_i'$ со свойствами (12-13), а потому и с (11)". Тогда это – $\mathbb{R}$-граница и по (10)' свойство (13) выполнено при всех $i \gg 0$. Применим теперь к паре $(\overline{X}/Z, B_i^+)$ логПММ. Снова по (6) как и в шаге 3 выше, если дивизор $K_{\overline{X}} + B_i^+$ не численно эффективен, то имеется экстремальное стягивание отрицательное относительно $K_{\overline{X}} + B_i^+$ [Am, Theorem 2]. Его перестройка существует по [HMc, Theorem 1.1] или индукции следствия 3. Обрыв выполнен как и в шаге 3. (См. также предостережение 2 выше.) Как и в этом шаге все экстремальные стягивания бирациональны, не пересекают $\mathrm{LCS}(X, B)$, терминальны, не сдувают никаких простых компонент D_j, не пересекающих $\mathrm{LCS}(X, B)$ с кодискрепантой $b(D_j, X_i, B_i) \ge 0$, равной кратности дивизора B_i^+ в D_j; другие дивизоры (даже D_j) с кратностью 0 в B_i^+ могут сдуваться. По терминальному обрыву получаем dlt wlc модель $(\overline{X}_i/Z, B_i^+)$, при этом $(X_i/Z, B_i)$ – её wlc модель. Они эквивалентны; в частности, пара $(\overline{X}_i/Z, B_i^+)$ крепантна $(X_i/Z, B_i)$ и $B_i^+ = \overline{B}_i$ на всех дивизорах модели $\overline{X}_i$, в частности, на дивизорах D_j раздуваемых на $\overline{X}_i$. По следствию 11 и его дополнению 6 то же самое верно для любого дивизора D промежутка $(B_{\overline{X}}, B_i')$ с соответствующей моделью $(X_i/Z, D_{X_i})$. Свойство dlt выполнено вблизи $B_{\overline{X}}$ по (11)", когда в качестве F берется минимальный приведенный дивизор на $\overline{X}$ несущий $\mathcal{B}$. Указанные модели эквивалентны друг другу по дополнению 6. Заметим также, что по следствию 9 предшествующие логперестройки являются логфлопами относительно $K_{\overline{X}} + B_{\overline{X}}$. Значит по дополнениям 4-5 число ε сохраняется в любом направлении. По свойствам (1) и (7–8) все носители $\operatorname{Supp} B_i^+$ можно предполагать одинаковыми. Итак, во всех дополнениях числа ε и δ сохранятся при логфлопах относительно $K_{\overline{X}} + B_{\overline{X}}$: компоненты $\operatorname{Supp} B_i^+$ не сдуваются (см. шаг 3 доказательства следствия 9).

Для выполнения последнего утверждения в (14) надо некоторые b-дивизоры D_j добавить в качестве образующих линейного пространства $\mathbb{R}$-дивизоров, а именно, все D_j с $b_j \geq 0$ и, в частности, такие дивизоры D_j пересекающие $\mathrm{LCS}(X, B)$.

Шаг 5: 1-*мерный случай.* Если вещественное афинное пространство $\mathcal{B}$ размерности 1, то имеется не более двух промежутков $(B_{\overline{X}}, \pm B'_i)$ и не более двух типов моделей. В высших размерностях используем

Шаг 6: *Индукция или предел промежутков эквивалентности.* Промежутки $[B_{\overline{X}}, B'_i]$ дают сходящуюся под последовательность $\lim_{l\to\infty} B'_{i_l} = B' \in \mathcal{B}$. В противном случае число промежутков и моделей конечно как в шаге 5. Предел B' тоже будет $\mathbb{R}$-границей на $\overline{X}$ и по конструкции обладает свойством (11)". Теперь рассечём предел афинной *рациональной* гиперплоскостью: имеется афинная рациональная гиперплоскость $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ такая, что она пересекает $(B_{\overline{X}}, B')$ в точке B_s и промежутки $(B_{\overline{X}}, B'_{i_l})$ в B^+_{sl}. Новые границы B_s, B^+_{sl} на $\overline{X}$, образы B_{sl} последних на X_{i_l} вместо $B_{\overline{X}}, B^+_{i_l}$ и B_{i_l} соответственно удовлетворяют условиям (1–11) и (10–11)' для подходящей подпоследовательности. Значит соответствующее пространству $\mathcal{B}$ пространство дивизоров лежит в $\mathcal{B}'$. (В действительности пара $(X/Z, B)$ и соответствующие свойства не нужны; достаточна пара $(\overline{X}, B_{\overline{X}} := B_s)$.) Свойства (1–2), (6–7), (9), (11), и даже (11)' получаем непосредственно по конструкции. В (3) можно сохранить те же дивизоры D_j по (14). Если множество кодискрепант $b(D_j, X_{i_l}, B_{sl})$ не ограничено снизу в некотором дивизоре D_j, то берем соответствующую подпоследовательность и отбрасываем D_j. Следовательно можем найти подпоследовательность, удовлетворяющую (4). Тогда (5), даже (10), (10)' и (8) выполнены по конструкции. Для (10)' заметим, что $B^+_{sl} = \overline{B}_{sl}$ при всех дивизорах D_j с неотрицательными кратностями в $\overline{B}_{sl}$ по шагу 4 и (14); продолжаем дивизор $\overline{B}_{sl}$ кратностью 0 в других компонентах исключительных на X_{i_l} (ср. шаг 2).

Однако пара $(\overline{X}/Z, B_s)$ не обязательно wlc модель. Тогда снова применяем шаг 3 и т.п. Это завершает индукцию по размерности пространства $\mathcal{B}$.

□

Доказательство-конструкция теоремы 1. Построим строго логтерминальные результирующие модели $(X/Z, B_\lambda)$, $B_\lambda = B^{\log} + \lambda H$, для некоторого эффективного $\mathbb{R}$-дивизора H и всех чисел $\lambda \in [0, 1]$ и найдем вещественное число $\lambda_0 \in [0, 1)$ такое, что модели $(X/Z, B_\lambda)$ минимальны при $\lambda \geq \lambda_0$ и лограсслоения

Мори при $\lambda < \lambda_0$. Значит мы получим требуемую минимальную модель при $\lambda_0 = 0$ и лограсслоение Мори в остальных случаях.

Шаг 1: Используя разрешение Хиронаки, пару $(X/Z, B^{\log})$ предполагаем строго логтерминальной.

Шаг 2: Тогда по специальному обрыву [Sh00, Theorem 2.3] [Sh04, Следствия 4] предполагаем, что любая последовательность логперестроек пары $(X/Z, B^{\log})$ (H- упорядоченная или нет) состоит лишь из *не специальных* перестроек, то есть не пересекающих $\mathrm{LCS}(X, B^{\log})$. (При $\lambda_0 = 0$ это означает, что дивизор $K + B^{\log}$ численно эффективен на $\mathrm{LCS}(X, B^{\log})/Z$; см. шаг 4 ниже.)

Шаг 3: Можно добавить достаточно обильную $\mathbb{R}$-границу $H = \sum h_i H_i, h_i \neq 0$, с простыми дивизорами H_i такую, что

(1) $\lfloor H \rfloor = 0$ и $\operatorname{Supp} H \cap \operatorname{Supp} B^{\log} = \emptyset$ в коразмерности 1;

(2) $(X/Z, B_1 = B^{\log} + H)$ – строго логминальная модель;

(3) простые компоненты H_i носителя $\operatorname{Supp} H$ порождают классы численной эквивалентности всех дивизоров$/Z$; и

(4) кратности h_i дивизора H *независимы* над $\mathbb{Q}(B)$:

$$\sum a_i h_i = a \text{ и все } a_i, a \in \mathbb{Q}(B) \Longrightarrow \text{ все } a_i = 0, a = 0,$$

где $\mathbb{Q}(B) = \mathbb{Q}(B^{\log}) \subset \mathbb{R}$ – поле, порожденное$/\mathbb{Q}$ кратностями границы B, соотвественно $B^{\log}$.

Так как поле $\mathbb{Q}(B)$ счетно (мало), легко найти требуемые кратности h_i как малые возмущение кратностей дивизора H с обильным присоединением $K + B^{\log} + H$.

Шаг 4: Если дивизор $K + B_0$ численно эффективен, то $\lambda_0 = 0$ и доказательство окончено: $(X/Z, B_0 = B^{\log})$ – строго логминальная модель.

В противном случае имеется число

$$0 < \lambda_1 = \min\{\lambda \mid K + B_\lambda \text{ численно эффективен}/Z\}.$$

Пара $(X/Z, B_{\lambda_1})$ тоже будет строго логминимальной моделью.

Шаг 5: *H-упорядоченные логперестройки.* Как и в доказательстве предложения 2 конструкция обрывается на уровне λ_1 лограсслоением Мори или можно найти логперестройку (возможно дивизориальное сдутие) $X_1 \dashrightarrow X_2/Z$ относительно $K+B_0$ уровня λ_1. При доказательстве существования лограсслоения Мори или перестраиваемого сдутия пользуемся следствием 9. Перестройка существует по [HMc, Theorem 1.1] или индукции следствия 3. По шагу 2 логфлоп $X_1 \dashrightarrow X_2/Z$ относительно $K + B_{\lambda_1}$ не задевает $\mathrm{LCS}(X, B_{\lambda_1}) = \mathrm{LCS}(X, B_0)$ (см. свойство (1) шага 3). Значит строго логминимальность модели $(X/Z, B_{\lambda_1})$ сохраняется, то есть модель $(X^+/Z, B_{\lambda_1})$ тоже строго логминимальна. По следствиям 9, 11 и дополнениям 4-5 как и в доказательстве предложения 2 получаем H-упорядоченную последовательность экстремальных логперестроек $X_i \dashrightarrow X_{i+1}/Z$, не пересекающих $\mathrm{LCS}(X_i, B_{\lambda_i}) = \mathrm{LCS}(X, B_0)$.

Шаг 6: *Обрыв логфлопов.* Логперестройки каждого уровня $\lambda > 0$ являются логфлопами относительно $K + B_\lambda$. Утверждается, что имеется не более одного такого флопа, или эквивалентно, экстремального стягиваемого луча R с $(K + B_\lambda, R) = 0$.

Действительно, пусть C – кривая/Z в R. Поэтому $(K+B^{\log}+\lambda H, C) = 0$. Пусть C' – другая кривая/Z с $(K + B^{\log} + \lambda H, C') = 0$. Проверим, что кривая C' также лежит в R. По определению поля $\mathbb{Q}(B)$ имеем два соотношения:

$$\lambda(H, C) = a \text{ и } \lambda(H, C') = a',$$

с вещественными числами $a, a' \in \mathbb{Q}(B)$. Более того, a и $a' \neq 0$ по by (3-4). В противном случае $a = 0$, все $(H_i, C) = 0$ и $C \equiv 0/Z$; то же самое выполнено для a' и C'. Следовательно

$$(H, C) = \frac{a}{\lambda}, (H, C') = \frac{a'}{\lambda}$$

и

$$(H, a'C - aC') = \frac{a'a}{\lambda} - \frac{aa'}{\lambda} = 0.$$

Поэтому, если все $(H_i, a'C - aC') = 0$, то по (3) $C' \equiv a'C/a/Z$ и C' в R; $a'/a > 0$ по проективности X/Z. В противном случае 1-цикл $a'C - aC'$ дает не тривиальное соотношение/$\mathbb{Q}(B)$, что противоречит (4).

Шаг 7: *Стабилизация моделей.* Уровни стабилизируются по следствию 12 с $(X_i/Z, B_i) = (X/Z, B_{\lambda_i})$, то есть имеется лишь конечное число уровней:

$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n > 0$. Конечно, мы используем бирационально меняющуюся модель X. Это означает, что в действительности X зависит от λ. После конечного числа логперестроек можно предполагать условие (2) следствия 12. Второе утверждение в (2) выполнено по шагу 2. Другие условия (1) и (3-4) следствия 12 получаем непосредственно по конструкции при $B = B_{\lambda_1}$ и $B' = B_0$ в (3), и для многообразия $X_i = X_1 = X$ в (4) минимальной модели $(X/Z, B_{\lambda_1})$. Заметим, что модели разного уровня не эквивалентны по лемме 2. Действительно, по конструкции числа $\lambda_{i+1} > 0$ и шагу 5 (см. также следствие 11 и его дополнение 6) модель $(X/Z, B_{\lambda_{i+1}})$ обладает экстремальным лучом R с $(K + B_{\lambda_{i+1}}, R) = 0$, в котором она численно не эквивалентна $(X/Z, B_{\lambda_i})$: $(K + B_{\lambda_i}, R) > 0$, и поэтому данная модель не эквивалентна моделям $(X/Z, B_{\lambda_j})$ с $j \leq i$.

Наконец, последнее утверждение теоремы следует из двух фактов: численная размерность логКодаиры каждой минимальной модели $(X/Z, B)$ будет ≥ 0, что эквивалентно псевдоэффективности дивизора $K + B$ (ср. следствие 1). $\square$

Доказательство Новой редукции. Основная идея редукции найти упорядоченную последовательность допредельных перестроек, которая на каждом уровне имеет не более одной не специальной перестройки этого уровня на каждой приведенной компоненте границы. Следовательно обрыв таких перестроек равносилен специальному обрыву и стабилизации моделей. Чего добиваемся возмущением и вычитанием дивизора H.

Воспользуемся доказательством-конструкцией и обозначениями параграфа [ISh, §4]. Конструкция строго логминимальной модели $(\overline{V}/Y, B_{\overline{V}}^{\log} + H_{\overline{V}})$ использует лишь допредельные перестройки и специальный обрыв на логканонических центрах коразмерности ≥ 2, для чего достаточно логобрыва в размерности $d - 1$.

Используем следующие свойства дивизора H, эффективного приведенного (лишь с кратностями 1) дивизора Картье на базе Y:

(1) для любого сдутия $\tau\colon Y' \to Y$ нормального $\mathbb{Q}$-факториального многообразия Y' такого, что компоненты прообраза $\tau^* H$ суть все исключительные простые дивизоры E_i на Y'/Y и все компоненты собственного прообраза $H_{Y'}$ дивизора H, компоненты $\tau^* H$ позволяют представить каждый класс численной эквивалентности дивизоров$/Y$ [ISh, b) стр. 65]; при этом для такого сдутия

(2) имеется линейное численное соотношение между компонентами прообраза

$\tau^* H$:
$$\tau^* H = H_{Y'} + \sum a_i E_i = \sum H_i + \sum a_i E_i \equiv 0/Y$$
с положительными целыми числами a_i; и

(3) носитель прообраза $\tau^* H$ есть приведенная часть дивизора $B_{Y'}^{\log} + H_{Y'}$ [ISh, a) стр. 65].

Заметим, что в обоих проявлениях в (2-3), то есть в соотношении и в границе, дивизор $H_{Y'}$ приведен. Все модели наших конструкций удовлетворяют требованию (1), а потому (1-3). (Более того, в дальнейшем сдутие τ является изоморфизмом над $Y \setminus \operatorname{Supp} H$.)

Следующая часть доказательства с вычитанием $H_{\overline{V}}$ несколько отличается. Она изменяется так, чтобы использовались лишь специальный обрыв и терминальный обрыв в размерности d. Как обычно (для перестроек) предполагаем B и $B_{\overline{V}}^{\log}$ $\mathbb{Q}$-границами (или во всех целых независимостях ниже кратности границы B тоже следует включать; ср. шаг 3, (4) доказательства теоремы 1).

Шаг 1: *Возмущение дивизора H.* Существуют логфлоп (возможно не элементарный) $(\overline{V}/Y, B_{\overline{V}}^{\log} + H_{\overline{V}})$ и граница $\Gamma H_{\overline{V}} = \sum \gamma_i H_i$ такие, что

(4) $(\overline{V}/Y, B_{\overline{V}}^{\log} + \Gamma H_{\overline{V}})$ – строго логминимальная модель; и

(5) кратности γ_i целочисленно (или рационально) независимы:
$$\sum n_i \gamma_i = n \text{ и все } n_i, n \in \mathbb{Z} \Longrightarrow \text{ все } n_i = 0, n = 0;$$

в частности, каждая кратность $0 < \gamma_i < 1$. Более того, нам необходимы кратности γ_i сколь угодно близкие к 1: $0 \ll \gamma_i < 1$. Эквивалентно, существует эффективный дивизор $\Delta = \sum \delta_i H_i$ с $0 < \delta_i \ll 1$ такой, что

(4)' $(\overline{V}/Y, B_{\overline{V}}^{\log} + H_{\overline{V}} - \Delta)$ – строго логминимальная модель; и

(5)' кратности δ_i целочисленно независимы.

Действительно, тогда берем $\gamma_i = 1 - \delta_i$. На самом деле достаточно построить такую модель$/W$:

(4)" $(\overline{V}/W, B_{\overline{V}}^{\log} + H_{\overline{V}} - \Delta)$ – строго логминимальная модель, где W/Y – lc модель пары $(\overline{V}/Y, B_{\overline{V}}^{\log}+H_{\overline{V}})$, то есть сдутие $\overline{V}\to W$ задано дивизором $K_{\overline{V}}+B_{\overline{V}}^{\log}+H_{\overline{V}}$. Эта и другие подобные модели существуют согласно LSEPD трюку [Sh92, 4.5.2 и 10.5 перевода] и следствию 10. По конструкции дивизор $K_{\overline{V}}+B_{\overline{V}}^{\log}+H_{\overline{V}}$ обилен на W/Y, $\equiv 0/W$, а дивизор $-\Delta$ численно эффективен и на самом деле полуобилен на $\overline{V}/W$. Поэтому при любом $0<\delta\ll 1$ дивизор $K_{\overline{V}}+B_{\overline{V}}^{\log}+H_{\overline{V}}-\delta\Delta$ – численно эффективен на $\overline{V}/Y$. Это дает модель в (4)' с $\Delta:=\delta\Delta$. Действительно, $K_{\overline{V}}+B_{\overline{V}}^{\log}+H_{\overline{V}}-\delta\Delta$ численно эффективен$/Y$ по конструкции. С другой стороны, по конструкции пара $(\overline{V}, B_{\overline{V}}^{\log}+H_{\overline{V}})$ lc, а по (4)" и монотонности [Sh92, 1.3.3] пара $(\overline{V}, B_{\overline{V}}^{\log})$ строго логтерминальна. Поскольку $\operatorname{Supp}\Delta=\operatorname{Supp}H_{\overline{V}}$, снова по монотонности [Sh92, 1.3.3] пара $(\overline{V}, B_{\overline{V}}^{\log}+H_{\overline{V}}-\delta\Delta)$ строго логтерминальна. Кратности дивизора $\delta\Delta$ суть $\delta\delta_i$. Они целочисленно независимы при $\delta\in\mathbb{Q}$. Следовательно условие (5)' будет выполнено.

При конструкции модели в (4)" воспользуемся индукцией по числу неприводимых компонент дивизора $H_{\overline{V}}$. Если это нуль, все доказано (см. шаг 5 ниже). Начнем с вычитания первой компоненты $D=H_1$ дивизора $H_{\overline{V}}$. Это приведет к новой строго логминимальньной модели $(\overline{V}/W, B_{\overline{V}}^{\log}+H_{\overline{V}}-D)$. Поскольку $K_{\overline{V}}+B_{\overline{V}}^{\log}+H_{\overline{V}}\equiv 0/W$, рассматриваются только логперестройки экстремальных лучей R конуса $\overline{\mathrm{NE}}(\overline{V}/W)$ с $(D,R)>0$, или эквивалентно, строится логминимальная модель пары $(\overline{V}, B_{\overline{V}}^{\log}+H_{\overline{V}}-D)$. Как и в обычной редукции все перестройки допредельны в размерности $d+1$, а потому существуют в силу наших предположений. Проблема лишь с обрывом. Отметим также невозможность лограсслоений Мори в ситуации бирациональной$/Y$. По специальному обрыву и логобрыву в размерности $d-1$, остаётся проблема с обрывом в размерности d. Точнее, достаточно рассмотреть дополнительно случай логперестроек на приведенной компоненте $F\neq D$ границы $B_{\overline{V}}^{\log}+H_{\overline{V}}-D$ с $(F,R)<0$. Такая компонента существует по свойствам (2-3). Согласно специальному обрыву рассматриваем лишь перестройки вне приведенных компонент присоединенной границы B_F для $B_{\overline{V}}^{\log}+H_{\overline{V}}-D$ на F, которая состоит из пересечений с компонентами дивизора $H_{\overline{V}}-D-F+\sum E_i$ (см. логприсоединение [Sh92, 3.2.3]), где $\sum E_i$ – приведенная часть границы $B_{\overline{V}}^{\log}$. Пусть C – перестроенная кривая одной из таких логперестроек, то есть $C\cap\operatorname{Supp}(H_{\overline{V}}-D-F+\sum E_i)=\emptyset$ и $(D,C)<0$. Пусть C' – следующая перестраиваемая кривая. Тогда $(D,C')>0$. По конструкции носитель дивизора $H_{\overline{V}}$ и исключительные дивизоры$/Y$ представляют любой численный класс дивизоров$/Y$

(см. (1) и (3) выше), в частности, это верно для любого численно обильного дивизора$/Y$. Значит имеется обильная на кривых C и C' линейная комбинация $aF+bD$ с вещественными коэфиициентами a,b. С другой стороны, имеется не тривиальное (все коэффициенты положительны) линейное соотношение между носителем $H_{\overline{V}}$ и исключительными дивизорами E_i/Y (см. (2-3) выше). Поэтому вблизи C и C' обильный дивизор имеет вид cD с вещественным числом c, что не возможно по неравенствам $(D,C)<0$ и $(D,C')>0$. Следовательно две последовательные перестройки не могут (со)существовать и мы получаем обрыв. Итак, построена логпара $(\overline{V}/W, B_{\overline{V}}^{\log}+H_{\overline{V}}-D)$, строго логминимальная над W, и пусть W_1/W обозначает её lc модель. Отметим, что каждая модель $(\overline{V}, B_{\overline{V}}^{\log}+H_{\overline{V}}-D)$ конструкции строго логтерминальна, потому что исходная модель $(\overline{V}, B_{\overline{V}}^{\log}+H_{\overline{V}}-D)$ строго логтерминально и это сохраняют логперестройки.

Теперь по индукции предполагаем, что строго логминимальная модель $(\overline{V}/W_1, B_{\overline{V}}^{\log}+H_{\overline{V}}-D-\Delta')$ построена, где $\Delta'=\sum_{i\neq 1}\delta_i'H_i$ и кратности $0<\delta_i'\ll 1$ целочисленно независимы. Поскольку $K_{\overline{V}}+B_{\overline{V}}^{\log}+H_{\overline{V}}-D\equiv 0/W_1$ и $K_{\overline{V}}+B_{\overline{V}}^{\log}+H_{\overline{V}}\equiv 0/W$, то по конструкции $D=H_1\equiv 0/W_1$. Значит свойства (1-3) выполнены на всех моделях Y'/W_1 без H_1, полученных из $\overline{V}/W_1$ логфлопами относительно $K_{\overline{V}}+B_{\overline{V}}^{\log}+H_{\overline{V}}-D\equiv 0/W_1$, потому что на них также $H_1\equiv 0/W_1$ по предположению $K_{\overline{V}}+B_{\overline{V}}^{\log}+H_{\overline{V}}\equiv 0/W$. Это значит, что все численные классы и соотношения рассматриваются над W_1. В свойстве (3) прообраз τ^*H меняем на τ^*H-H_1, при этом исходная модель $(\overline{V}, B_{\overline{V}}^{\log}+H_{\overline{V}}-D)$ строго логтерминальна. Следовательно требуемая модель $\overline{V}/W_1$ существует. По конструкции дивизор $-D$ обилен на W_1/W, а $-D-\Delta'$ численно эффективен и на самом деле полуобилен на $\overline{V}/W_1$. Значит при любом $0<\delta'\ll\delta\ll 1$ дивизор $-\Delta=-\delta D-\delta'(D+\Delta')$ численно эффективен на $\overline{V}/W$. Это приводит к модели в (4)". Действительно, дивизор $K_{\overline{V}}+B_{\overline{V}}^{\log}+H_{\overline{V}}-\Delta$ численно эффективен$/W$, потому что $K_{\overline{V}}+B_{\overline{V}}^{\log}+H_{\overline{V}}\equiv 0/W$. С другой стороны, по конструкции пара $(\overline{V}, B_{\overline{V}}^{\log}+H_{\overline{V}})$ lc и по монотонности [Sh92, 1.3.3] $(\overline{V}, B_{\overline{V}}^{\log})$ строго логтерминальна. Поскольку $\operatorname{Supp}\Delta=\operatorname{Supp}H_{\overline{V}}$, то снова по монотонности [Sh92, 1.3.3] пара $(\overline{V}, B_{\overline{V}}^{\log}+H_{\overline{V}}-\Delta)$ строго логтерминальна. Кратности дивизора Δ суть $\delta_1=\delta+\delta'$ и $\delta_i=\delta'\delta_i', i\neq 1$. Возьмем целочисленно независимые числа $\delta,\delta_i', i\neq 1$ и число $\delta'\in\mathbb{Q}$. Тогда свойство (5)' будет выполнено: δ_i целочисленно независимы.

Шаг 2: *H-упорядоченные перестройки.* Положим $B' = B^{\log}_{\overline{V}} + \Gamma H_{\overline{V}} - \lambda_{\max} H_{\overline{V}}$, где $\lambda_{\max}$ – максимальное число λ такое, что $B^{\log}_{\overline{V}} + \Gamma H_{\overline{V}} - \lambda H_{\overline{V}}$ – граница. Легко установить, что $\lambda_{\max} = \min\{\gamma_i\}$ и, если скажем $\lambda_{\max} = \gamma_1$, то $B' = B^{\log}_{\overline{V}} + \sum_{i\neq 1}(\gamma_i - \gamma_1)H_i$. По конструкции и монотонности [Sh92, 1.3.3] пары $(\overline{V}, B')$ и $(\overline{V}, B^{\log}_{\overline{V}} + \Gamma H_{\overline{V}} = B' + \lambda_{\max} H_{\overline{V}})$ строго логтерминальны с исключительными$/Y$ приведенными компонентами E_i и вторая является логминимальной моделью. Отметим также, что по (5)

(5)” кратности $\gamma_i - \gamma_1, i \neq 1$, целочисленно независимы и $0 < \gamma_i - \gamma_1 \ll 1$.

Чтобы построить логперестройку данной теоремы, найдем строго логминимальную модель пары $(\overline{V}/Y, B')$, вычитая дивизор $H_{\overline{V}}$ из $B' + \lambda_{\max} H_{\overline{V}}$ как в предложении 2. Существование $H_{\overline{V}}$-упорядоченных логперестроек в этой ситуации более непосредственно. Действительно, на каждом уровне $\lambda \leq \lambda_{\max}$ можно воспользоваться логфлопами lc модели W/Y пары $(\overline{V}/Y, B' + \lambda H_{\overline{V}})$ и тем фактом, что многообразие $\overline{V}/Y$ будет FT$/W$. После конструкции логминимальной модели$/W$ превращаем её в логминимальную модель$/Y$ как и в шаге 1 или используем следствие 11 вместе с LSEPD трюком. Отметим невозможность лограсслоения Мори.

С другой стороны, каждая перестройка допредельна как в обычной редукции. Если это логперестройка в экстремальном луче R, то по конструкции $(K_{\overline{V}} + B' + \lambda H_{\overline{V}}, R) = 0$ и $(H_{\overline{V}}, R) > 0$. Значит по свойству (2) имеется дивизор E_i с $(E_i, R) < 0$ и E_i – приведенная компонента $K_{\overline{V}} + B'$. Поскольку $\lambda > 0$, пара $(\overline{V}, B')$ строго логтерминальна.

Шаг 3: *Обрыв логперестроек.* На каждом уровне $\lambda > 0$ логперестройки этого уровня будут логфлопами относительно $K_{\overline{V}} + B' + \lambda H_{\overline{V}}$. По специальному обрыву после конечного числа их приложений можно считать, что все последующие перестройки *не специальны* на $\cup E_j$, то есть логперестройки экстремальных лучей R таковы, что любая кривая C/Y луча R пересекает лишь одну приведенную компоненту, скажем E_1. На самом деле $C \subset E_1$ и $(K_{\overline{V}} + B' + \lambda H_{\overline{V}}, C) = 0$. Утверждается существование лишь одного такого экстремального луча на E_1. Значит такие логперестройки обрываются.

Пусть $C' \subset E_1$ – кривая$/Y$ с $(K_{\overline{V}} + B' + \lambda H_{\overline{V}}, C') = 0$ и не пересекающая компоненты E_i с $i \neq 1$. Поскольку $K_{\overline{V}} + B^{\log}_{\overline{V}}$ – $\mathbb{Q}$-дивизор, оба соотношения превращаются в соотношения для числа λ и кратностей дивизора B':

$$\lambda(H_{\overline{V}}, C) + \sum_{i\neq 1}(\gamma_i - \gamma_1)(H_i, C) = r$$

и

$$\lambda(H_{\overline{V}}, C') + \sum_{i\neq 1}(\gamma_i - \gamma_1)(H_i, C') = r',$$

где $r, r' \in \mathbb{Q}$. Отметим, что $(H_{\overline{V}}, C)$ и $(H_{\overline{V}}, C') \neq 0$, потому что в противном случае получаем рациональное соотношение, что противоречит (5)”. Действительно, если $(H_{\overline{V}}, C) = 0$, то все пересечения $(H_i, C) = 0, i \neq 1$, и $(H_1, C) = 0$ также, поскольку $H_{\overline{V}} = \sum H_i$. Это не возможно по свойствам (1) и (3), потому что по конструкции $(E_i, C) = 0, i \neq 1$, и по (2) $(E_1, C) = 0$. То же самое верно для кривой C'. Аналогично проверяем, что $C \equiv cC'/Y$ с $c = (H_{\overline{V}}, C)/(H_{\overline{V}}, C') \neq 0$, то есть при этом $(H_{\overline{V}}, C) = c(H_{\overline{V}}, C')$.

Для этого удаляем λ и получаем соотношение

$$(H_{\overline{V}}, C')(\sum_{i\neq 1}(\gamma_i - \gamma_1)(H_i, C)) - (H_{\overline{V}}, C)(\sum_{i\neq 1}(\gamma_i - \gamma_1)(H_i, C')) = r''$$

с $r'' \in \mathbb{Q}$. По (5)” это возможно лишь, когда

$$(H_{\overline{V}}, C')(\gamma_i - \gamma_1)(H_i, C) = (H_{\overline{V}}, C)(\gamma_i - \gamma_1)(H_i, C').$$

Снова по (5)” каждое число $\gamma_i - \gamma_1 \neq 0$ при $i \neq 1$. Поэтому $(H_i, C) = c(H_i, C')$ при $i \neq 1$. С другой стороны, отсюда получаем, что $(H_1, C) = c(H_1, C')$, так как $H_{\overline{V}} = \sum H_i$. Затем проверяем, что $(E_i, C) = c(E_i, C')$ для всех E_i. Следовательно по свойству (1) $C \equiv cC'/Y$ и имеется единственная возможность на E_1 для не специальной логперестройки уровня λ.

Шаг 4: *Стабилизация моделей.* Это означает стабилизацию уровней $\lambda_{\max} \geq \lambda_1 \geq \cdots > 0$. Получаем по следствию 12. По специальному и дивизориальному обрывам после конечного числа логперестроек предполагаем остальные логперестройки не специальными и действительно логперестройками на соответствующих приведенных компонентах $F = E_j$. Поэтому условия (1–2) следствия 12 выполнены для $(X_i/Z, B_i) = (F/Y, B_F)$, где B_F – присоединенная граница $B' + \lambda_i H_{\overline{V}}$ на $F = E_j$. При фиксированной компоненте $F = E_j$ рассматриваем лишь соответствующие уровни λ_i (прореживание) и модели $(X_i/Z, B_i)$. Тогда условие (3) следствия 12 выполнено для присоединенной границы B на $X_i = F$ пары $(\overline{V}, B')$ и соответственно для присоединенной границы B' пары $(\overline{V}, B' + \lambda_1 H_{\overline{V}})$. По шагу 2 каждая модель $(\overline{V}/Y, B' + \lambda_i H_{\overline{V}})$ строго логминимальна. Поэтому конструкция и присоединение дают условие (4) следствия 12 с X_i уровня

λ_1. Данные модели на F/Y не эквивалентны, что приводит к стабилизации: имеется лишь конечное число уровней λ_i. Действительно, модели разных уровней не эквивалентны по лемме 2. По определению числа $\lambda_{i+1} > 0$ и шагу 2 (см. также следствие 11 и его дополнение 6) модель $(\overline{V}/Y, B' + \lambda_{i+1} H_{\overline{V}})$ обладает экстремальным лучом R с $(K_{\overline{V}} + B' + \lambda_{i+1} H_{\overline{V}}, R) = 0$, в котором она численно не эквивалентна $(\overline{V}/Y, B' + \lambda_i H_{\overline{V}})$: $(K_{\overline{V}} + B' + \lambda_i H_{\overline{V}}, R) > 0$, и данный луч сосредоточен на $F = E_j$. Значит модель $(X_{i+1}/Z, B_{i+1})$ не эквивалентна модели $(X_i/Z, B_i)$.

Шаг 5: *Перестройка.* Утверждается, что lc модель $(X^+/Y, B^+)$ пары $(\overline{V}/Y, B' + \lambda H_{\overline{V}})$ с $0 < \lambda \ll 1$ и будет требуемой логперестройкой. Снова по LSEPD трюку и следствию 10 сдутие на такую lc модель существует. Так как кратности $\gamma_i - \gamma_1$ границы $B' + \lambda H_{\overline{V}} = B_{\overline{V}}^{\log} + \lambda H_1 + \sum_{i \neq 1} (\lambda + \gamma_i - \gamma_1) H_i$ малы и многообразие X $\mathbb{Q}$-факториально, граница $B + \lambda H_1 + \sum_{i \neq 1} (\lambda + \gamma_i - \gamma_1) H_i$ на X klt и присоединение $K + B + \lambda H_1 + \sum_{i \neq 1} (\lambda + \gamma_i - \gamma_1) H_i$ численно отрицательно на X/Y. Заметим, что пара $(\overline{V}/Y, B' + \lambda H_{\overline{V}})$ является строго логминимальной моделью пары $(X/Y, B + \lambda H_1 + \sum_{i \neq 1} (\lambda + \gamma_i - \gamma_1) H_i)$. Значит по монотонности [ISh, леммы 2.4] граница $B' + \lambda H_{\overline{V}}$ не имеет приведенных компонент и по свойству (3) сдутие $\overline{V} \to Y$ мало. Поэтому соответствующая lc модель будет логперестройкой пары $(X/Y, B + \lambda H_1 + \sum_{i \neq 1} (\lambda + \gamma_i - \gamma_1) H_i)$. Так как сдутие $X \to Y$ экстремально, его перестройка единственна [Sh00, Corollary 3.6] и пара $(X^+/Y, B^+)$ является требуемой логперестройкой. $\square$

Доказательство Новой индукции. Согласно методам работ [Sh00] [HMc] достаточно установить [HMc, Theorem 7.2] в размерности d. Это получается на основании теорем 1 и 2: первая дает существование моделей W_i, а вторая – их конечность. Более того, можно предполагать пару $(X/Z, \Delta)$ строго логтерминальной со сдутием X/Z. Поэтому обе теоремы нужны лишь в бирациональной ситуации, а также терминальный обрыв требуется лишь для бирациональных пар. Заметим, что $\mathbb{Q}$-факториализация klt пар по теореме 1 получается как строго логминимальная модель с кратностями границы 1 в исключительных дивизорах; на самом деле для этого достаточно существования логперестроек размерности d и специального обрыва. Логперестройки существуют по [HMc, Theorem 1.1] или индукции следствия 3.

Используя LSEPD трюк, границу Δ можно несколько увеличить и предполагать, что $\Delta \in V \subseteq \mathcal{D}_F$ с $F = \operatorname{Supp} \Delta$; и дивизор F содержит все исключительные дивизоры многообразия X/Z. Любой дивизор $\Theta \in$

$\mathcal{D}_F$ достаточно близкий к Δ будет $\mathbb{R}$-границей. Значит пара $(X/Z, \Theta)$ имеет строго логминимальную модель $(W_i/Z, \psi_{i*}\Theta)$, где $\psi_i \colon X \dashrightarrow W_i$ – рациональное 1-сдутие. Это отображение будет 1-сдутием по определению и монотонности [ISh, леммы 2.4]. По бирациональности X/Z лограсслоения Мори не возможны. (Согласно доказательству теоремы 1 после шага 3, сдутие ψ_i раскладывается в композицию логперестроек, что дает свойство (1) в [HMc, Theorem 7.2]; ср. также предложение 2. Однако это не важно для кострукции допредельных перестроек, в частности, для [HMc, Corollary 7.3].) По конструкции выполнены свойства (2–3) в [HMc, Theorem 7.2], а (4) – см. в доказательстве теоремы [HMc, Theorem 7.2].

Итак, остаётся установить конечность моделей с точностью до эквивалентности. Если это верно, имеется сходящаяся последовательность $\mathbb{R}$-границ $\Theta_i \in \mathcal{D}_F \colon \lim_{i\to\infty} \Theta_i = \Delta$, с попарно не эквивалентными wlc моделями $(X_i/Z, B_i) = (W_i/Z, \psi_{i*}\Theta_i)$. Это противоречит теореме 2 (ср. доказательство следствия 12). По конструкции и бирациональности X/Z условие (1) теоремы 2 выполнено для некоторой подпоследовательности моделей (все еще надо построить пару $(X/Z, B)$ и проверить (1) для неё). Построим подходящую модель $(X/Z, B)$ как модификацию строго логминимальной модели $(W/Z, \Delta)$. Последняя модель бирационально выше чем X_i для подпоследовательности с $i \gg 0$: $W \dashrightarrow X_i$ – рациональное 1-сдутие. Действительно, она строится по многообразию X последовательностью упорядоченных логперестроек пары $(X/Z, \Delta)$ (см. доказательство теоремы 1). По стабильности отрицательных сдутий и Основной лемме никогда не сдувается компонента дивизора Δ, не сдуваемая на моделях X_i при всех $i \gg 0$ (ср. шаг 3 доказательства теоремы 2). Так как последовательность логперестроек конечна, получаем требуемую подпоследовательность моделей $(X_i/Z, B_i)$. Поэтому модель $(W/Z, \Delta)$ находится между моделями $(X/Z, B)$ и $(\overline{X}/Z, B_{\overline{X}})$ доказательства теоремы 2, и можно построить пару $(\overline{X}/Z, B_{\overline{X}})$ как в данном доказательстве. Иначе рассмотрим lc модель $(W/Z, \Delta)$, существующую по следствию 10. Она сдувает все простые дивизоры D на X, исключительные на всех многообразиях X_i с $i \gg 0$. В противном случае дивизор $K + \Delta$ объемен на D/Z и то же верно для $K + \Theta_i$ с $i \gg 0$, что противоречит конструкции: каждая логперестройка или дивизориальное сдутие пары $(X/Z, \Theta_i)$ сохраняют это свойство [Sh00, Proposition 3.20]. Поэтому модель $(X/Z, B)$ строится как крепантное раздутие модели $(W/Z, \Delta)$ с теми же раздутыми дивизорами D, что и модели X_i/Z. Эта модель также строится как строго логминимальная модель с кратностями 1 в других исключительных дивизорах$/W$ исходной модели. Пара $(X/Z, B)$ обладает свойством (1).

Условие (2) пусто, потому что пары (X, B) и (X, B_i) klt.

В (3) берем все компоненты границы B и исключительные дивизоры E с $b(E, X, B) \geq 0$. Тогда условия (4-5) выполнены на подходящей подпоследовательности как и в шаге 2 доказательства следствия 12. $\square$

Список литературы

[AHK] Alexeev V., Hacon Ch.D., and Kawamata Yu., *Termination of (many) 4-dimensional log flips*, Inventiones mathematicae **168** (2007), 433–448

[Am] Ambro F., *Quasi-log varieties*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics **240** (2003) 214–233

[HMc] Hacon Ch.D., and McKernan J., *On the existence of flips*, arXiv math.AG/0507597 (2005) preprint

[ISh] Исковских В.А., и Шокуров В.В., *Бирациональные модели и перестройки*, УМН, **60** (2005), 29–98

[KMM] Kawamata Y., Matsuda K., and Matsuki K., *Introduction to the minimal model problem*, in Algebraic Geometry (Sendai, 1985) Adv. Stud. Pure Math. **10** (1987), Kinokuniya, 283–360

[PSh] Prokhorov Yu.G, and Shokurov V.V., *Toward the second main theorem on complements: from local to global*, J. Algebraic Geometry ?? (2008) ??–??

[Sh83] Шокуров В.В., *Теорема о необращении в нуль*, Изв. АН СССР. Сер. матем. **49** (1985), 635–651

[Sh92] Шокуров В.В., *Трехмерные логперестройки*, Изв. РАН. Сер. матем. **56** (1992), 105–203

[Sh94] Shokurov V.V., *Anticanonical boundedness for curves*. Appendix to Nikulin V.V. “Hyperbolic reflection group methods and algebraic varieties” in Higher dimensional complex varieties (Trento, June 1994) ed. Andreatta M., and Peternell T. Berlin: New York: de Gruyter, 1996, 321–328

[Sh95] Shokurov V.V., *Letters of a bi-rationalist: I. A projectivity criterion*, Contemporary Mathematics **27**, AMS 1997, 143–152

[Sh96] Shokurov V.V., *3-fold log models*, J. Math. Sciences **81** (1996) 2667–2699

[Sh00] Shokurov V.V., *Prelimiting flips*, Тр. МИАН **240** (2003), 82–219

[Sh04] Шокуров В.В., *Письма о бирациональном: V. М.л.д. и обрыв логфлипов*, Тр. МИАН **246** (2004), 328–351

Department of Mathematics
Johns Hopkins University
Baltimore, MD–21218, USA
e-mail: shokurov@math.jhu.edu
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
119991, Москва, ул. Губкина 8