# О стандартной гипотезе типа Лефшеца для компактификации комплексной абелевой схемы над аффинной кривой *

С. Г. Танкеев

**Аннотация.** Для компактификации $\pi : X \to C$ (с полустабильными слоями) абелевой схемы $\pi' : X' \to C'$ с главной поляризацией и относительной размерности $n$ над аффинной кривой $C' \hookrightarrow C$ построен алгебраический изоморфизм $H^1(C, R^{2n-i}\pi_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim}$ $H^1(C, R^i\pi_*\mathbb{Q})$. Если $\pi' : X' \to C'$ имеет тривиальный след, то мы доказываем стандартную гипотезу Гротендика $B^2(X)$ типа Лефшеца об алгебраичности оператора $\Lambda^{n-1}$ : $H^{2n}(X, \mathbb{Q}) \to H^2(X, \mathbb{Q})$ при условиях, что для общего схемного слоя $X_\eta$ абелевой схемы $\mathrm{End}(X_{\overline{\eta}}) = \mathrm{End}(X_\eta)$, $\dim H^0(C, R^2\pi_*\mathbb{Q}) \neq 2$, $\dim H^2(X, \mathbb{Q}) \neq 2$ и $\mathrm{End}(X_\eta)$ содержится в мнимом квадратичном поле; более того, $B^2(X)$ верна для компактификации якобиевой схемы гладкого 1-параметрического семейства (с сечением) кривых рода $n$ над аффинной кривой с плохой редукцией чисто мультипликативного типа в бесконечно удаленных точках. Если $n = 3$, все слои минимальной модели Нерона якобиевой схемы над бесконечно удаленными точками являются торами и $\mathrm{End}(X_{\overline{\eta}}) = \mathbb{Z}$, то $B(X)$ верна.

Библиография: 27 наименований.

## Введение

Для $d$-мерного комплексного гладкого проективного многообразия $X$ и для целого числа $p \geq 0$ обозначим через $H^{2p}_{\mathrm{alg}}(X, \mathbb{Q})$ $\mathbb{Q}$-подпространство в $H^{2p}(X, \mathbb{Q})$, порожденное классами когомологий $\mathrm{cl}_X(Z) \in H^{2p}(X, \mathbb{Q})$ алгебраических циклов $Z$ коразмерности $p$ на $X$.

Пусть $H$ – обильный дивизор на $X$. Для $i \leq d$ каноническое отображение

$$L^{d-i} : H^i(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{x \mapsto x \cup \mathrm{cl}_X(H)^{\cup\, d-i}} H^{2d-i}(X, \mathbb{Q})$$

является изоморфизмом согласно сильной теореме Лефшеца. Обозначим через $\Lambda^{d-i}$ : $H^{2d-i}(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^i(X, \mathbb{Q})$ изоморфизм, обратный к $L^{d-i}$.

**Стандартная гипотеза Гротендика типа Лефшеца** $B^i(X)$ [1]. *Для натурального числа $i \leq d$ изоморфизм $\Lambda^{d-i} : H^{2d-i}(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^i(X, \mathbb{Q})$ является алгебраическим.*

Если $B^i(X)$ верна для любого натурального числа $i$, то говорят, что стандартная гипотеза $B(X)$ типа Лефшеца выполняется для $X$.

В терминах примитивного разложения Лефшеца

$$x = \sum_{k \geq \max(0, j-d)} L^k\, x_{j-2k},$$

где $x_{j-2k} \in P^{j-2k}(X)$, $P^i(X) = H^i(X, \mathbb{Q}) \cap \mathrm{Ker}\, L^{d-i+1}$ $(i \leq d)$ [2, § 3, (3.3)], абстрактные операторы $\Lambda$ и $*$ определяются следующими формулами:

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант N 06-01-00181).

$$\Lambda x = \sum_{k \geq \max(1, j-d)} L^{k-1} x_{j-2k};$$

$$*x = \sum_{k \geq \max(0, j-d)} (-1)^{(j-2k)(j-2k+1)/2} L^{d-j+k} x_{j-2k}.$$

Хорошо известно, что $B(X)$ эквивалентна алгебраичности $\Lambda$ и $*$. Она верна для многообразий Грассмана, кривых, поверхностей и абелевых многообразий [3], для комплексного проективного трехмерного многообразия $X$ с голоморфным 1-параметрическим семейством $\pi : X \to C$, общий геометрический слой которого является гладкой поверхностью размерности Кодаиры $\varkappa \leq 0$ [4].

В этой статье для компактификации $\pi : X \to C$ (с полустабильными слоями) абелевой схемы $\pi' : X' \to C'$ с главной поляризацией и относительной размерности $n$ над аффинной кривой $C' \hookrightarrow C$ построен алгебраический изоморфизм $H^1(C, R^{2n-i}\pi_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^1(C, R^i\pi_*\mathbb{Q})$ (теорема 1.5). Если $\pi' : X' \to C'$ имеет тривиальный след, то мы доказываем стандартную гипотезу Гротендика $B^2(X)$ типа Лефшеца об алгебраичности оператора $\Lambda^{n-1} : H^{2n}(X, \mathbb{Q}) \to H^2(X, \mathbb{Q})$ при условиях, что для общего схемного слоя $X_\eta$ абелевой схемы $\mathrm{End}(X_{\overline{\eta}}) = \mathrm{End}(X_\eta)$, $\dim H^0(C, R^2\pi_*\mathbb{Q}) \neq 2$, $\dim H^2(X, \mathbb{Q}) \neq 2$ и $\mathrm{End}(X_\eta)$ содержится в мнимом квадратичном поле; более того, $B^2(X)$ верна для компактификации якобиевой схемы гладкого 1-параметрического семейства (с сечением) кривых рода $n$ над аффинной кривой с плохой редукцией чисто мультипликативного типа в бесконечно удаленных точках (теорема 2.11). Если $n = 3$, все слои минимальной модели Нерона якобиевой схемы над бесконечно удаленными точками являются торами и $\mathrm{End}(X_{\overline{\eta}}) = \mathbb{Z}$, то $B(X)$ верна (теорема 3.4).

## § 1. Построение алгебраического изоморфизма $\boldsymbol{H^1(C, R^{2n-i}\pi_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^1(C, R^i\pi_*\mathbb{Q})}$ для компактификации абелевой схемы относительной размерности $\boldsymbol{n}$ над аффинной кривой

**1.1.** Пусть $\pi' : X' \to C'$ – абелева схема с главной поляризацией и относительной размерности $n$ над комплексной гладкой алгебраической кривой $C'$, $\check{\pi}' : \check{X}' \to C'$ – двойственная абелева схема, $\tau' : X' \times_{C'} X' \to C'$ – структурный морфизм, $\mathcal{P}'$ – нормализованное расслоение Пуанкаре на $X' \times_{C'} \check{X}' \xrightarrow{\sim} X' \times_{C'} X'$ [5]. Имеется сечение морфизма $\tau'$, поэтому можно рассматривать $\mathcal{P}'$ как элемент относительной группы Пикара $H^0\left(C', R^1\tau'_*\mathcal{O}^\times_{X' \times_{C'} X'}\right) = \mathrm{Pic}(X' \times_{C'} X')/\mathrm{Pic}(C')$. Каноническая точная экспоненциальная последовательность

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O}_{X' \times_{C'} X'} \xrightarrow{f \mapsto e^{2\pi i f}} \mathcal{O}^\times_{X' \times_{C'} X'} \to 1$$

дает каноническое отображение $H^0\left(C', R^1\tau'_*\mathcal{O}^\times_{X' \times_{C'} X'}\right) \xrightarrow{\mathcal{L} \mapsto \mathrm{c}_1(\mathcal{L})} H^0(C', R^2\tau'_*\mathbb{Z})$. Следовательно, элемент $\mathrm{c}_1(\mathcal{P}') \in H^0(C', R^2\tau'_*\mathbb{Q})$ корректно определен.

Мы утверждаем, что

$$\mathrm{c}_1(\mathcal{P}') \in H^0(C', R^1\pi'_*\mathbb{Q} \otimes R^1\pi'_*\mathbb{Q}). \tag{1.1}$$

Действительно, поскольку $\tau' : X' \times_{C'} \overset{\vee}{X}{}' \to C'$ – абелева схема над кривой $C'$, то спектральная последовательность Лере $E_2^{p,q} = H^p(C', R^q\tau'_*\mathbb{Q}) \Rightarrow H^*(X' \times_{C'} X', \mathbb{Q})$ вырождается [6], так что мы имеем разложения

$$H^2(X' \times_{C'} \overset{\vee}{X}{}', \mathbb{Q}) = H^0(C', R^2\tau'_*\mathbb{Q}) \oplus H^1(C', R^1\tau'_*\mathbb{Q}) \oplus H^2(C', \mathbb{Q}) =$$

$$\left[\bigoplus_{a+b=2} H^0(C', R^a\pi'_*\mathbb{Q} \otimes R^b\overset{\vee}{\pi}{}'_*\mathbb{Q})\right] \oplus H^1(C', R^1\pi'_*\mathbb{Q}) \oplus H^1(C', R^1\overset{\vee}{\pi}{}'_*\mathbb{Q}) \oplus H^2(C', \mathbb{Q})$$

[7, (3.5)]. По определению, $\mathcal{P}'$ нормализовано вдоль $e' \times_{C'} \overset{\vee}{X}{}'$, где $e' : C' \to X'$ – нулевое сечение (другими словами, $\mathcal{O}_{C' \times_{C'} \overset{\vee}{X}{}'} \widetilde{\to} (e' \times_{C'} \overset{\vee}{X}{}')^*(\mathcal{P}'))$. Поэтому

$$0 = \mathrm{c}_1\left(\mathcal{O}_{C' \times_{C'} \overset{\vee}{X}{}'}\right) = \mathrm{c}_1((e' \times_{C'} \overset{\vee}{X}{}')^*(\mathcal{P}')) = (e' \times_{C'} \overset{\vee}{X}{}')^*(\mathrm{c}_1(\mathcal{P}'))$$

является $[H^0(C', R^2\overset{\vee}{\pi}{}'_*\mathbb{Q}) \oplus H^1(C', R^1\overset{\vee}{\pi}{}'_*\mathbb{Q}) \oplus H^2(C', \mathbb{Q})]$-компонентой класса Черна $\mathrm{c}_1(\mathcal{P}')$. Поскольку $\mathcal{P}'$ нормализовано вдоль $X' \times_{C'} \overset{\vee}{e}{}'$, то $[H^0(C', R^2\pi'_*\mathbb{Q}) \oplus H^1(C', R^1\pi'_*\mathbb{Q}) \oplus H^2(C', \mathbb{Q})]$-компонента класса Черна $\mathrm{c}_1(\mathcal{P}')$ тривиальна по той же причине. Поэтому утверждение (1.1) доказано.

Пусть $s \in C'$, $\mathcal{P}_s = \mathcal{P}'|_{X_s \times \overset{\vee}{X}_s}$ – расслоение Пуанкаре на $X_s \times \overset{\vee}{X}_s = X_s \times X_s$ и $\mu_s : X_s \times X_s \to X_s$ – групповой закон для $X_s$ (морфизм сложения). Напомним некоторые результаты Клеймана и Либермана.

**1.2. Лемма** [3, лемма 2A12]. *Пусть $X_s$ – абелево многообразие, $Y_s$ – произвольное гладкое проективное многообразие и $u \in H^2(X_s \times Y_s, \mathbb{Q})$ – элемент типа $(1,1)$ в разложении Кюннета. Тогда соответствие $\exp(u) = \sum u^i/i! : H^*(X_s, \mathbb{Q}) \to H^*(Y_s, \mathbb{Q})$ переводит произведение Понтрягина $\alpha \vee \beta = \mu_{s*}(\alpha \otimes \beta)$ в $\cup$-произведение.*

**1.3. Лемма** [3, замечание 2A13]. *Пусть $X_s$ – абелево многообразие, $\overset{\vee}{X}_s$ – двойственное абелево многообразие и $u \in H^2(X_s \times \overset{\vee}{X}_s, \mathbb{Q})$ – компонента типа $(1,1)$ в разложении Кюннета дивизора Пуанкаре. Тогда соответствие $\exp(u) = \sum u^i/i!$ : $H^*(X_s, \mathbb{Q}) \to H^*(\overset{\vee}{X}_s, \mathbb{Q})$ является алгебраическим изоморфизмом алгебры Понтрягина $H^*(X_s, \mathbb{Q})$ на алгебру $H^*(\overset{\vee}{X}_s, \mathbb{Q})$ с $\cup$-произведением.*

**1.4.** В рассматриваемом случае $X_s = \overset{\vee}{X}_s$ и $\mathrm{cl}_{X_s \times X_s}(\mathcal{P}_s)$ имеет тип Кюннета $(1,1)$. В силу лемм 1.2 – 1.3, для любого натурального числа $i \leq n$ отображение $H^{2n-i}(X_s, \mathbb{Q}) \to H^i(X_s, \mathbb{Q})$, определенное классом $[\mathrm{cl}_{X_s \times X_s}(\mathcal{P}_s)]^{\cup i} = \mathrm{cl}_{X_s \times X_s}(\mathcal{P}_s) \cup \cdots \cup \mathrm{cl}_{X_s \times X_s}(\mathcal{P}_s) \in H^{2i}(X_s \times X_s, \mathbb{Q})$, является алгебраическим изоморфизмом. Этот изоморфизм является композицией следующих отображений:

$$H^{2n-i}(X_s, \mathbb{Q}) \underset{\sim}{\xrightarrow{\mathrm{pr}_{1s}^*}} H^{2n-i}(X_s, \mathbb{Q}) \otimes H^0(X_s, \mathbb{Q}) \underset{\sim}{\xrightarrow{x \mapsto x \cup [\mathrm{cl}_{X_s \times X_s}(\mathcal{P}_s)]^{\cup i}}}$$

$$H^{2n}(X_s, \mathbb{Q}) \otimes H^i(X_s, \mathbb{Q}) \underset{\sim}{\xrightarrow{\mathrm{pr}_{2s*}}} H^i(X_s, \mathbb{Q}), \tag{1.2}$$

где $\mathrm{pr}_{ks} : X_s \times X_s \to X_s$ – каноническая проекция.

**1.5. Теорема.** *Пусть $X$ – гладкое комплексное проективное $(n+1)$-мерное многообразие, $\pi : X \to C$ – сюръективный морфизм на гладкую кривую $C$. Предположим, что любой геометрический слой морфизма $\pi$ является объединением гладких неприводимых компонент кратности 1 с нормальными пересечениями.*

*Если общий схемный слой $X_\eta$ морфизма $\pi$ является абелевым многообразием с главной поляризацией, то существуют такие разрешение особенностей $\sigma : Y \to X \times_C X$ подсхемы $\iota : X \times_C X \hookrightarrow X \times X$ и алгебраический класс $\mathcal{D}_{\mathcal{P}'} \in H^2_{\mathrm{alg}}(Y, \mathbb{Q})$, что для любого натурального числа $i \leq n$ алгебраический класс $(\iota\sigma)_* \mathcal{D}^{\cup i}_{\mathcal{P}'} \in H^{2i+2}_{\mathrm{alg}}(X \times X, \mathbb{Q})$ определяет алгебраический изоморфизм*

$$H^1(C, R^{2n-i}\pi_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^1(C, R^i\pi_*\mathbb{Q}).$$

*Доказательство.* Можно считать, что $\pi$ гладкий над $C \setminus \Delta$, где $\Delta \hookrightarrow C$ – конечное замкнутое подмножество. Пусть $C' = C \setminus \Delta$, $\quad X' = X \setminus \pi^{-1}(\Delta)$, $\quad \pi' = \pi|_{X'} : X' \to C'$, $\tau' : X' \times_{C'} X' \to C'$ – структурный морфизм расслоенного произведения.

Пусть

$$\begin{array}{ccc} X \times_C X & \xrightarrow{p_1} & X \\ \downarrow^{p_2} & \searrow^{\tau} & \downarrow^{\pi} \\ X & \xrightarrow{\pi} & C \end{array}$$

– каноническая диаграмма расслоенного произведения, и $\sigma : Y \to X \times_C X$ – разрешение особенностей $X \times_C X$. Можно считать, что $\sigma$ индуцирует изоморфизм над $C'$. В частности, $Y$ можно рассматривать как гладкую проективную компактификацию многообразия $X' \times_{C'} X'$. Более того, можно считать, что $(\tau\sigma)^{-1}(\Delta)$ является объединением (с некоторыми положительными кратностями) гладких дивизоров с нормальными пересечениями. По теореме Делиня канонический морфизм $H^2(Y, \mathbb{Q}) \to H^0(C', R^2\tau'_*\mathbb{Q})$ является сюръективным морфизмом $\mathbb{Q}$-структур Ходжа [8, теорема 4.1.1, доказательство следствия 4.1.2]. Более того, канонический морфизм $H^2(Y, \mathbb{Q}) \to H^0(C, R^2(\tau\sigma)_*\mathbb{Q})$ является сюръективным морфизмом $\mathbb{Q}$-структур Ходжа [9, следствие (15.14)].

В силу (1.1) имеем: $\mathrm{c}_1(\mathcal{P}') \in H^0(C', R^2\tau'_*\mathbb{Q})$. С другой стороны, $\mathrm{c}_1(\mathcal{P}')$ является элементом типа Ходжа $(1, 1)$. По теореме Лефшеца для дивизоров на $Y$ существует такой алгебраический класс $\mathrm{c}_1(\mathcal{O}_Y(D)) \in H^2_{\mathrm{alg}}(Y, \mathbb{Q})$, что его образ при каноническом сюръективном морфизме $H^2(Y, \mathbb{Q}) \to H^0(C', R^2\tau'_*\mathbb{Q})$ совпадает с $\mathrm{c}_1(\mathcal{P}')$.

Рассмотрим каноническую диаграмму расслоенного произведения

$$\begin{array}{ccc} X' \times_{C'} X' & \xrightarrow{p'_1} & X' \\ \downarrow^{p'_2} & \searrow^{\tau'} & \downarrow^{\pi'} \\ X' & \xrightarrow{\pi'} & C'. \end{array}$$

Для любого открытого подмножества $U \hookrightarrow (C')^{\mathrm{an}}$ собственный морфизм $p'_k : (\tau')^{-1}(U) \to (\pi')^{-1}(U)$ определяет каноническое отображение ${p'_k}^* : H^q((\pi')^{-1}(U), \mathbb{Q}) \to H^q((\tau')^{-1}(U), {p'_k}^*\mathbb{Q})$ [10, гл. II, 4.16]. Поскольку ${p'_k}^*\mathbb{Q} = \mathbb{Q}$, то оно принимает вид ${p'_k}^* : H^q((\pi')^{-1}(U), \mathbb{Q}) \to H^q((\tau')^{-1}(U), \mathbb{Q})$. Следовательно, разложения Кюннета на слоях $\tau'$ дают каноническое инъективное отображение

$${p'_k}^* : R^q\pi'_*\mathbb{Q} \;\hookrightarrow\; R^q\tau'_*\mathbb{Q} = \bigoplus_{a+b=q} R^a\pi'_*\mathbb{Q} \otimes R^b\pi'_*\mathbb{Q}.$$

С другой стороны, собственный морфизм $p'_k : (\tau')^{-1}(U) \to (\pi')^{-1}(U)$ определяет каноническое отображение ${p'_k}^* : H^q_{\mathrm{c}}((\pi')^{-1}(U), \mathbb{Q}) \to H^q_{\mathrm{c}}((\tau')^{-1}(U), \mathbb{Q})$ когомологий с компактными носителями [10, гл. II, 4.16].

По теореме двойственности Пуанкаре для комплексного многообразия $V$ комплексной размерности $d$ имеется канонический изоморфизм [11, § 2, теорема (2.8)] $H^{2d}_{\mathrm{c}}(V, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}$, индуцирующий изоморфизм

$$H^m_{\mathrm{c}}(V,\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^{\mathrm{c}}_{2d-m}(V,\mathbb{Q})$$

[12, гл. I, § 4, 4.3]; [13, 7.8]; [3, с. 359]; [14, гл. VI, § 11, следствие 11.2]. Следовательно, можно отождествить $H^{2d-m}(V,\mathbb{Q})$ с двойственным к $H^m_{\mathrm{c}}(V,\mathbb{Q})$.

В силу теоремы двойственности Пуанкаре двойственное отображение к

$$p_2'^{\,*}: H^{2(n+1)-i}_{\mathrm{c}}((\pi')^{-1}(U),\mathbb{Q}) \to H^{2(n+1)-i}_{\mathrm{c}}((\tau')^{-1}(U),\mathbb{Q})$$

принимает вид $p'_{2*}: H^{2n+i}((\tau')^{-1}(U),\mathbb{Q}) \to H^i((\pi')^{-1}(U),\mathbb{Q})$. Оно дает каноническое отображение $p'_{2*}: R^{2n+i}\tau'_*\mathbb{Q} \to R^i\pi'_*\mathbb{Q}$. Ограничение $p'_{2*}$ на подпучок $R^{2n}\pi'_*\mathbb{Q}\otimes R^i\pi'_*\mathbb{Q} \hookrightarrow R^{2n+i}\tau'_*\mathbb{Q}$ индуцирует канонический изоморфизм $p'_{2*}: R^{2n}\pi'_*\mathbb{Q}\otimes R^i\pi'_*\mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} R^i\pi'_*\mathbb{Q}$. В частности, глобализация (1.2) является композицией

$$R^{2n-i}\pi'_*\mathbb{Q} \xrightarrow[\sim]{p_1'^{\,*}} R^{2n-i}\pi'_*\mathbb{Q}\otimes R^0\pi'_*\mathbb{Q} \xrightarrow[\sim]{\cup[\mathrm{c}_1(\mathcal{P}')]^{\cup i}} R^{2n}\pi'_*\mathbb{Q}\otimes R^i\pi'_*\mathbb{Q} \xrightarrow[\sim]{p'_{2*}} R^i\pi'_*\mathbb{Q}. \tag{1.3}$$

Аналогично, для любого открытого подмножества $U \hookrightarrow C^{\mathrm{an}}$ коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} Y & \xrightarrow{\sigma} & X\times_C X & \xrightarrow{p_1} & X \\ & & \downarrow{\scriptstyle p_2} & \searrow^{\tau} & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ & & X & \xrightarrow{\pi} & C \end{array}$$

дает канонический собственный морфизм $p_1\sigma: (\tau\sigma)^{-1}(U) \to \pi^{-1}(U)$ и каноническое отображение $(p_1\sigma)^*: H^q(\pi^{-1}(U),\mathbb{Q}) \to H^q((\tau\sigma)^{-1}(U),\mathbb{Q})$ [10, гл. II, 4.16]. Следовательно, имеется каноническое отображение $(p_1\sigma)^*: R^q\pi_*\mathbb{Q} \to R^q(\tau\sigma)_*\mathbb{Q}$ и

$$(p_1\sigma)^*|_{C'} = p_1'^{\,*}. \tag{1.4}$$

Имеется коммутативная диаграмма канонических отображений

$$\begin{array}{ccc} H^2(Y,\mathbb{Q}) & & \\ \downarrow & \searrow & \\ H^0(C,R^2(\tau\sigma)_*\mathbb{Q}) & \to & H^0(C',R^2\tau'_*\mathbb{Q}). \end{array}$$

Напомним, что $\mathrm{c}_1(\mathcal{P}')$ – образ $\mathrm{c}_1(\mathcal{O}_Y(D))$ при каноническом сюръективном отображении $H^2(Y,\mathbb{Q}) \to H^0(C',R^2\tau'_*\mathbb{Q})$. Обозначим через $\mathcal{D}_{\mathcal{P}'}$ образ алгебраического класса $\mathrm{c}_1(\mathcal{O}_Y(D))$ при каноническом краевом морфизме $H^2(Y,\mathbb{Q}) \to H^0(C,R^2(\tau\sigma)_*\mathbb{Q})$. Поскольку $\tau\sigma: Y \to C$ является 1-параметрическим семейством с гладким общим слоем, то спектральная последовательность Лере для $\tau\sigma$ вырождается [9, следствие (15.15)]: $E_2^{p,q} = E_\infty^{p,q}$. В частности,

$$H^2(Y,\mathbb{Q}) = H^2(C,\mathbb{Q}) \oplus H^1(C,R^1(\tau\sigma)_*\mathbb{Q}) \oplus H^0(C,R^2(\tau\sigma)_*\mathbb{Q}). \tag{1.5}$$

Более того, каноническое отображение $H^2(Y,\mathbb{Q}) \to H^0(C,R^2(\tau\sigma)_*\mathbb{Q})$ является сюръективным морфизмом $\mathbb{Q}$-структур Ходжа [9, следствие (15.14)]. С другой стороны, $(\tau\sigma)^*: H^2(C,\mathbb{Q}) \hookrightarrow H^2(Y,\mathbb{Q})$ является морфизмом $\mathbb{Q}$-структур Ходжа. Следовательно, $H^1(C,R^1(\tau\sigma)_*\mathbb{Q})$ является $\mathbb{Q}$-подструктурой Ходжа в $H^2(Y,\mathbb{Q})$ и (1.5) является разложением $\mathbb{Q}$-структур Ходжа. В частности, компонента $\mathcal{D}_{\mathcal{P}'} \in H^0(C,R^2(\tau\sigma)_*\mathbb{Q}) \hookrightarrow H^2(Y,\mathbb{Q})$ алгебраического класса $\mathrm{c}_1(\mathcal{O}_Y(D)) \in H^2_{\mathrm{alg}}(Y,\mathbb{Q})$ имеет тип Ходжа $(1,1)$. Следовательно, она алгебраическая по теореме Лефшеца.

Для любого открытого подмножества $U \hookrightarrow C^{\mathrm{an}}$ имеется каноническое отображение $\cup$-произведения [10, гл. II, 6.6]

$$H^p((\tau\sigma)^{-1}(U),\mathbb{Q})\otimes_{\mathbb{Q}} H^q((\tau\sigma)^{-1}(U),\mathbb{Q})\to H^{p+q}((\tau\sigma)^{-1}(U),\mathbb{Q}),$$

которое в свою очередь определяет канонические отображения

$$R^p(\tau\sigma)_*\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Q}} R^q(\tau\sigma)_*\mathbb{Q}\to R^{p+q}(\tau\sigma)_*\mathbb{Q};$$
$$R^p(\tau\sigma)_*\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Q}} H^0(C,R^q(\tau\sigma)_*\mathbb{Q})\xrightarrow{x\otimes y\mapsto x\cup y} R^{p+q}(\tau\sigma)_*\mathbb{Q}.$$

Второе отображение отражает совместимость $\cup$-произведений со спектральной последовательностью Лере $E_2^{p,q}=H^p(C,R^q(\tau\sigma)_*\mathbb{Q})$ [15, с. 143], и композиция

$$R^{2n-i}\pi_*\mathbb{Q}\xrightarrow{(p_1\sigma)^*} R^{2n-i}(\tau\sigma)_*\mathbb{Q}\xrightarrow{\cup\mathcal{D}^{\cup i}_{\mathcal{P}'}} R^{2n-i}(\tau\sigma)_*\mathbb{Q}\cup\mathcal{D}^{\cup i}_{\mathcal{P}'}\hookrightarrow R^{2n+i}(\tau\sigma)_*\mathbb{Q} \tag{1.6}$$

корректно определена.

Для любого открытого подмножества $U\hookrightarrow C^{\mathrm{an}}$ канонический собственный морфизм $p_2\sigma:(\tau\sigma)^{-1}(U)\to\pi^{-1}(U)$ определяет каноническое отображение $(p_2\sigma)^*:$ $H_c^{2(n+1)-i}(\pi^{-1}(U),\mathbb{Q})\to H_c^{2(n+1)-i}((\tau\sigma)^{-1}(U),\mathbb{Q})$ когомологий с компактными носителями [10, гл. II, 4.16]. По теореме двойственности Пуанкаре двойственное к $(p_2\sigma)^*$ отображение принимает вид $(p_2\sigma)_*:H^{2n+i}((\tau\sigma)^{-1}(U),\mathbb{Q})\to H^i(\pi^{-1}(U),\mathbb{Q})$. Следовательно, имеется каноническое отображение $(p_2\sigma)_*:R^{2n+i}(\tau\sigma)_*\mathbb{Q}\to R^i\pi_*\mathbb{Q}$, и можно продолжить (1.6) до композиции

$$\begin{aligned}R^{2n-i}\pi_*\mathbb{Q}\xrightarrow{(p_1\sigma)^*} R^{2n-i}(\tau\sigma)_*\mathbb{Q}\xrightarrow{\cup\mathcal{D}^{\cup i}_{\mathcal{P}'}} R^{2n-i}(\tau\sigma)_*\mathbb{Q}\cup\mathcal{D}^{\cup i}_{\mathcal{P}'}\hookrightarrow\\ R^{2n+i}(\tau\sigma)_*\mathbb{Q}\xrightarrow{(p_2\sigma)_*} R^i\pi_*\mathbb{Q}.\end{aligned} \tag{1.7}$$

Поскольку $(p_2\sigma)_*|_{C'}=p'_{2*}$, то легко видеть, что (1.3), (1.4) и (1.7) дают точную последовательность пучков на $C^{\mathrm{an}}$

$$0\to\mathcal{E}\to R^{2n-i}\pi_*\mathbb{Q}\xrightarrow{x\mapsto(p_2\sigma)_*[(p_1\sigma)^*x\cup\mathcal{D}^{\cup i}_{\mathcal{P}'}]} R^i\pi_*\mathbb{Q}\to\mathcal{G}\to 0, \tag{1.8}$$

где $\mathcal{E}$, $\mathcal{G}$ сконцентрированы на $\Delta$.

Пусть $\mathcal{F}=\mathrm{Im}[R^{2n-i}\pi_*\mathbb{Q}\xrightarrow{x\mapsto(p_2\sigma)_*[(p_1\sigma)^*x\cup\mathcal{D}^{\cup i}_{\mathcal{P}'}]} R^i\pi_*\mathbb{Q}]$. Тогда (1.8) дает точные последовательности

$$0\to\mathcal{E}\to R^{2n-i}\pi_*\mathbb{Q}\to\mathcal{F}\to 0; \tag{1.9}$$
$$0\to\mathcal{F}\to R^i\pi_*\mathbb{Q}\to\mathcal{G}\to 0. \tag{1.10}$$

Поскольку $H^1(C,\mathcal{E})=H^2(C,\mathcal{E})=0$, то из (1.9) следует, что

$$H^1(C,R^{2n-i}\pi_*\mathbb{Q})\xrightarrow{\sim} H^1(C,\mathcal{F}). \tag{1.11}$$

С другой стороны, $H^1(C,\mathcal{G})=0$, поэтому (1.10) – (1.11) дают точную последовательность

$$H^1(C,R^{2n-i}\pi_*\mathbb{Q})\xrightarrow{x\mapsto(p_2\sigma)_*[(p_1\sigma)^*x\cup\mathcal{D}^{\cup i}_{\mathcal{P}'}]} H^1(C,R^i\pi_*\mathbb{Q})\to 0. \tag{1.12}$$

Хорошо известно, что $\cup$-произведения совместимы со спектральной последовательностью Лере $E_2^{p,q}=H^p(C,R^q\pi_*\mathbb{Q})$ [15, с. 143]. В частности,

$$H^i(C, R^p\pi_*\mathbb{Q}) \cup H^j(C, R^q\pi_*\mathbb{Q}) \hookrightarrow H^{i+j}(C, R^{p+q}\pi_*\mathbb{Q}). \tag{1.13}$$

Действительно, для любого открытого подмножества $U \hookrightarrow C^{\rm an}$ имеется каноническое отображение $\cup$-произведения [10, гл. II, 6.6] $H^p(\pi^{-1}(U), \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} H^q(\pi^{-1}(U), \mathbb{Q}) \to H^{p+q}(\pi^{-1}(U), \mathbb{Q})$, которое в свою очередь определяет каноническое отображение $R^p\pi_*\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Q}} R^q\pi_*\mathbb{Q} \to R^{p+q}\pi_*\mathbb{Q}$. Поэтому (1.13) определяется композицией канонических отображений [10, гл. II, 6.6]

$$H^i(C, R^p\pi_*\mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} H^j(C, R^q\pi_*\mathbb{Q}) \to H^{i+j}(C, R^p\pi_*\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Q}} R^q\pi_*\mathbb{Q}) \to H^{i+j}(C, R^{p+q}\pi_*\mathbb{Q}).$$

Каноническое спаривание $H^{2n+1-i}(X, \mathbb{Q}) \times H^{i+1}(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{x \times y \mapsto x \cup y} H^{2n+2}(X, \mathbb{Q})$ невырождено по теореме двойственности Пуанкаре. Поскольку $H^{2n+1}(X_s, \mathbb{Q}) = 0$ для всех $s \in C \setminus \Delta$, то пучок $R^{2n+1}\pi_*\mathbb{Q}$ сконцентрирован на $\Delta$. С другой стороны, когомологическая размерность $C$ равна 2 [10, гл. II, § 5, теорема 5.13.1]. Следовательно, в силу (1.13) имеем:

$$H^1(C, R^{2n-i}\pi_*\mathbb{Q}) \cup H^0(C, R^{i+1}\pi_*\mathbb{Q}) \hookrightarrow H^1(C, R^{2n+1}\pi_*\mathbb{Q}) = 0, \tag{1.14}$$

$$H^1(C, R^{2n-i}\pi_*\mathbb{Q}) \cup H^2(C, R^{i-1}\pi_*\mathbb{Q}) \hookrightarrow H^3(C, R^{2n-1}\pi_*\mathbb{Q}) = 0. \tag{1.15}$$

Хорошо известно, что спектральная последовательность Лере $E_2^{p,q} = H^p(C, R^q\pi_*\mathbb{Q}) \Rightarrow H^*(X, \mathbb{Q})$ вырождается [9, следствие (15.15)]: $E_\infty^{p,q} = E_2^{p,q}$. Следовательно,

$$H^k(X, \mathbb{Q}) = H^0(C, R^k\pi_*\mathbb{Q}) \oplus H^1(C, R^{k-1}\pi_*\mathbb{Q}) \oplus H^2(C, R^{k-2}\pi_*\mathbb{Q}); \tag{1.16}$$

более того, (1.16) является разложением $\mathbb{Q}$-структур Ходжа, потому что каноническое отображение $H^2(C, R^{k-2}\pi_*\mathbb{Q}) \to H^k(X, \mathbb{Q})$ является морфизмом $\mathbb{Q}$-структур Ходжа [9, теорема (15.11), предложение (15.12)], каноническое отображение $H^k(X, \mathbb{Q}) \to H^0(C, R^k\pi_*\mathbb{Q})$ является сюръективным морфизмом $\mathbb{Q}$-структур Ходжа [9, следствие (15.14)], и ядро морфизма $\mathbb{Q}$-структур Ходжа является $\mathbb{Q}$-подструктурой Ходжа. Поэтому (1.14) - (1.16) дают невырожденность канонического спаривания

$$H^1(C, R^{2n-i}\pi_*\mathbb{Q}) \times H^1(C, R^i\pi_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{x \times y \mapsto x \cup y} H^2(C, R^{2n}\pi_*\mathbb{Q}) = H^{2n+2}(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}.$$

В частности,

$$\dim H^1(C, R^{2n-i}\pi_*\mathbb{Q}) = \dim H^1(C, R^i\pi_*\mathbb{Q}). \tag{1.17}$$

Из (1.12) и (1.17) следует, что имеется канонический изоморфизм

$$H^1(C, R^{2n-i}\pi_*\mathbb{Q}) \xrightarrow[\sim]{x \mapsto (p_2\sigma)_*[(p_1\sigma)^*x \cup \mathcal{D}_{\mathcal{P}'}^{\cup i}]} H^1(C, R^i\pi_*\mathbb{Q}). \tag{1.18}$$

Пусть $\mathrm{pr}_k : X \times X \to X$ – каноническая проекция. Тогда $\mathrm{pr}_k\, \iota\sigma = p_k\sigma$. Поскольку $\mathrm{pr}_k$ и $\iota\sigma$ – морфизмы гладких проективных многообразий, то мы имеем в силу формулы проекции:

$$\begin{gathered}(p_2\sigma)_*[(p_1\sigma)^*x \cup \mathcal{D}_{\mathcal{P}'}^{\cup i}] = [\mathrm{pr}_2\, \iota\sigma]_* \left([\mathrm{pr}_1\, \iota\sigma]^*x \cup \mathcal{D}_{\mathcal{P}'}^{\cup i}\right) = \\ \mathrm{pr}_{2*}(\iota\sigma)_* \left((\iota\sigma)^*\, \mathrm{pr}_1^*\, x \cup \mathcal{D}_{\mathcal{P}'}^{\cup i}\right) = \mathrm{pr}_{2*} \left(\mathrm{pr}_1^*\, x \cup (\iota\sigma)_*\mathcal{D}_{\mathcal{P}'}^{\cup i}\right).\end{gathered} \tag{1.19}$$

Из (1.18) - (1.19) следует, что алгебраический класс $(\iota\sigma)_*\mathcal{D}_{\mathcal{P}'}^{\cup i} \in H^{2i+2}_{\rm alg}(X \times X, \mathbb{Q})$ определяет алгебраический изоморфизм $H^1(C, R^{2n-i}\pi_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^1(C, R^i\pi_*\mathbb{Q})$. Теорема доказана.

## § 2. Алгебраичность инвариантных циклов и $B^2(X)$ для компактификации абелевой схемы с полустабильными вырождениями

**2.1.** В обозначениях и условиях теоремы 1.5 формула Кюннета и (1.16) дают разложение

$$(\iota\sigma)_*\mathcal{D}_{\mathcal{P}'} = \sum_{p+q+l+m=4} u_{pqlm}, \tag{2.1}$$

где $u_{pqlm} \in H^p(C, R^q\pi_*\mathbb{Q}) \otimes H^l(C, R^m\pi_*\mathbb{Q})$.

Фиксируем точку $s \in C'$. По теореме Делиня [8, 4.1.1 - 4.1.2] каноническое отображение ограничения $H^2(X,\mathbb{Q}) \to H^2(X_s,\mathbb{Q})$ $\mathbb{Q}$-структур Ходжа является композицией сюръективного морфизма $H^2(X,\mathbb{Q}) \to H^0(C', R^2\pi'_*\mathbb{Q})$ и канонических морфизмов $\mathbb{Q}$-структур Ходжа

$$H^0(C', R^2\pi'_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^2(X_s,\mathbb{Q})^{\pi_1(C',s)} \hookrightarrow H^2(X_s,\mathbb{Q}).$$

Если $H^0(C', R^2\pi'_*\mathbb{Q})$ является $\mathbb{Q}$-структурой Ходжа типа $(1,1)$, то по теореме Лефшеца $\mathbb{Q}$-пространство $H^2(X_s,\mathbb{Q})^{\pi_1(C',s)}$ инвариантных циклов порождается классами алгебраических циклов.

Канонический сюръективный морфизм $\mathbb{Q}$-структур Ходжа $H^2(X,\mathbb{Q}) \to H^0(C', R^2\pi'_*\mathbb{Q})$ [8, теорема 4.1.1] является частью коммутативной диаграммы (с точной нижней строкой) морфизмов смешанных $\mathbb{Q}$-структур Ходжа [8, следствие 3.2.18, доказательство теоремы 4.1.1]

$$\begin{array}{ccccc} H^2(X,\mathbb{Q}) & \to & H^2(X',\mathbb{Q}) & & \\ \downarrow & \searrow & \downarrow & & \\ H^0(C, R^2\pi_*\mathbb{Q}) & \to & H^0(C', R^2\pi'_*\mathbb{Q}) & \to & 0. \end{array}$$

Поэтому

$$\dim H^0(C, R^2\pi_*\mathbb{Q}) \geq \dim H^0(C', R^2\pi'_*\mathbb{Q}) \geq 1.$$

**2.2. Лемма** [4, лемма 3.2]. *Предположим, что $H^0(C', R^2\pi'_*\mathbb{Q})$ является $\mathbb{Q}$-структурой Ходжа типа $(1,1)$. Тогда имеется каноническое вложение* $H^0(C, R^2\pi_*\mathbb{Q}) \hookrightarrow \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{NS}(X)\otimes\mathbb{Q}$.

**2.3. Лемма.** *Предположим, что $H^0(C', R^2\pi'_*\mathbb{Q})$ является $\mathbb{Q}$-структурой Ходжа типа $(1,1)$. Тогда*

$$u_{1111} + \sum_{\substack{p+q+l+m=4\\ p+q\neq 2}} u_{pqlm} \in H^4_{\mathrm{alg}}(X\times X,\mathbb{Q}).$$

*Доказательство.* Прежде всего, в силу (1.16) имеем: $u_{pqlm} \in H^4(X\times X,\mathbb{Q}) \cap H^{2,2}(X\times X,\mathbb{C})$. С другой стороны, $H^2(C,\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}\cdot \mathrm{cl}_X(X_s) \hookrightarrow \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X)$. Теорема Лефшеца и лемма 2.2 дают

$$u_{02lm} \in [H^0(C, R^2\pi_*\mathbb{Q}) \otimes H^2(X,\mathbb{Q})] \cap H^{2,2}(X\times X,\mathbb{C}) =$$
$$H^0(C, R^2\pi_*\mathbb{Q}) \otimes [H^2(X,\mathbb{Q}) \cap H^{1,1}(X,\mathbb{C})] \hookrightarrow \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X)\otimes\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X) \hookrightarrow H^4_{\mathrm{alg}}(X\times X,\mathbb{Q});$$
$$u_{1102} \in [H^1(C, R^1\pi_*\mathbb{Q}) \otimes H^0(C, R^2\pi_*\mathbb{Q})] \cap H^{2,2}(X\times X,\mathbb{C}) =$$
$$[H^1(C, R^1\pi_*\mathbb{Q}) \cap H^{1,1}(X,\mathbb{C})] \otimes H^0(C, R^2\pi_*\mathbb{Q}) \hookrightarrow$$

$$\begin{gathered}\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X)\otimes\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X)\hookrightarrow H^4_{\mathrm{alg}}(X\times X,\mathbb{Q});\\ u_{1120}\in[H^1(C,R^1\pi_*\mathbb{Q})\otimes H^2(C,\mathbb{Q})]\cap H^{2,2}(X\times X,\mathbb{C})=\\ [H^1(C,R^1\pi_*\mathbb{Q})\cap H^{1,1}(X,\mathbb{C})]\otimes H^2(C,\mathbb{Q})\hookrightarrow\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X)\otimes\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X)\hookrightarrow H^4_{\mathrm{alg}}(X\times X,\mathbb{Q});\\ u_{20lm}\in[H^2(C,\mathbb{Q})\otimes H^2(X,\mathbb{Q})]\cap H^{2,2}(X\times X,\mathbb{C})=\\ H^2(C,\mathbb{Q})\otimes[H^2(X,\mathbb{Q})\cap H^{1,1}(X,\mathbb{C})]\hookrightarrow\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X)\otimes\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X)\hookrightarrow H^4_{\mathrm{alg}}(X\times X,\mathbb{Q}).\end{gathered}$$

Остается заметить, что $(\iota\sigma)_*\mathcal{D}_{\mathcal{P}'}=\sum_{p+q+l+m=4}u_{pqlm}\in H^4_{\mathrm{alg}}(X\times X,\mathbb{Q})$. Лемма доказана.

**2.4. Лемма.** *Если* $p+q\neq 2$, *то* $\mathrm{pr}_{2*}\left(\mathrm{pr}_1^*H^{2n}(X,\mathbb{Q})\cup u_{pqlm}\right)=0$.

*Доказательство.* Очевидно, что $u_{pqlm}\in H^{p+q}(X,\mathbb{Q})\otimes H^{4-p-q}(X,\mathbb{Q})$ и

$$\begin{gathered}\mathrm{pr}_{2*}\left(\mathrm{pr}_1^*H^{2n}(X,\mathbb{Q})\cup u_{pqlm}\right)=\mathrm{pr}_{2*}\left([H^{2n}(X,\mathbb{Q})\otimes H^0(X,\mathbb{Q})]\cup u_{pqlm}\right)\hookrightarrow\\ \mathrm{pr}_{2*}\left(H^{2n+p+q}(X,\mathbb{Q})\otimes H^{4-p-q}(X,\mathbb{Q})\right).\end{gathered}$$

С другой стороны, выберем элемент $\sqrt{-1}\in\mathbb{C}$ и рассмотрим отображение степени $<>\colon H^*(X,\mathbb{Q})\to\mathbb{Q}$, определенное изоморфимзмом ориентации $H^{2n+2}(X,\mathbb{Q})\xrightarrow{\sim}\mathbb{Q}$ на $H^{2n+2}(X,\mathbb{Q})$ и нулем на $H^i(X,\mathbb{Q})$ для $i<2n+2$. Теорема двойственности Пуанкаре утверждает, что отображение $x\mapsto<\cdot\cup x>$ индуцирует изоморфизмы $H^{2n+2-i}(X,\mathbb{Q})\xrightarrow{\sim}H_i(X,\mathbb{Q})$, которые будут рассматриваться как отождествления [3, 1.2]. Тогда для всех $\alpha\in H^{2n+p+q}(X,\mathbb{Q})$, $\beta\in H^{4-p-q}(X,\mathbb{Q})$, $\gamma\in H^*(X,\mathbb{Q})$ можно применить следующие стандартные вычисления:

$$<\alpha>=0; \tag{2.2}$$

$$\begin{gathered}<\mathrm{pr}_{2*}(\alpha\otimes\beta)\cup\gamma>=<(\alpha\otimes\beta)\cup\mathrm{pr}_2^*\gamma>=\\ <(\alpha\otimes\beta)\cup(\mathrm{cl}_X(X)\otimes\gamma)>=<\alpha\otimes(\beta\cup\gamma)>=<\alpha>\cdot<\beta\cup\gamma>=0;\end{gathered} \tag{2.3}$$

$$\mathrm{pr}_{2*}(\alpha\otimes\beta)=0. \tag{2.4}$$

Лемма доказана.

**2.5. Лемма.** *Предположим, что* $H^0(C',R^2\pi'_*\mathbb{Q})$ *является* $\mathbb{Q}$*-структурой Ходжа типа* $(1,1)$. *Тогда алгебраический класс*

$$u_{1111}+\sum_{\substack{p+q+l+m=4\\ p+q\neq 2}}u_{pqlm}$$

*определяет алгебраический изоморфизм* $H^1(C,R^{2n-1}\pi_*\mathbb{Q})\xrightarrow{\sim}H^1(C,R^1\pi_*\mathbb{Q})$.

*Доказательство.* В силу (1.13) имеем:

$$[H^1(C,R^{2n-1}\pi_*\mathbb{Q})\otimes H^0(C,\mathbb{Q})]\cup u_{pqlm}\hookrightarrow H^{p+1}(C,R^{q+2n-1}\pi_*\mathbb{Q})\otimes H^l(C,R^m\pi_*\mathbb{Q}).$$

Если $(p,q)\neq(1,1)$, то очевидно, что отображение степени $<>$ тривиально на пространстве $H^{p+1}(C,R^{q+2n-1}\pi_*\mathbb{Q})$, так как $H^{p+1}(C,R^{q+2n-1}\pi_*\mathbb{Q})\neq H^2(C,R^{2n}\pi_*\mathbb{Q})=H^{2n+2}(X,\mathbb{Q})$. Для всех $\alpha\in H^{p+1}(C,R^{q+2n-1}\pi_*\mathbb{Q})$, $\beta\in H^l(C,R^m\pi_*\mathbb{Q})$, $\gamma\in H^*(X,\mathbb{Q})$ можно применить стандартные вычисления (2.2) - (2.4), чтобы получить соотношение

$$\mathrm{pr}_{2*}\left([H^1(C,R^{2n-1}\pi_*\mathbb{Q})\otimes H^0(C,\mathbb{Q})]\cup u_{pqlm}\right)=0\quad\text{для}\quad(p,q)\neq(1,1).$$

С другой стороны,

$$[H^1(C,R^{2n-1}\pi_*\mathbb{Q})\otimes H^0(C,\mathbb{Q})]\cup u_{11lm}\hookrightarrow H^2(C,R^{2n}\pi_*\mathbb{Q})\otimes H^l(C,R^m\pi_*\mathbb{Q})=$$
$$H^{2n+2}(X,\mathbb{Q})\otimes H^l(C,R^m\pi_*\mathbb{Q});$$
$$\left[\mathrm{pr}_{2*}\left([H^1(C,R^{2n-1}\pi_*\mathbb{Q})\otimes H^0(C,\mathbb{Q})]\cup u_{11lm}\right)\hookrightarrow H^1(C,R^1\pi_*\mathbb{Q})\right]\ \Leftrightarrow\ (l,m)=(1,1).$$

Поэтому леммы 2.3, 2.4 и теорема 1.5 показывают, что алгебраический класс

$$u_{1111}+\sum_{\substack{p+q+l+m=4\\ p+q\neq 2}}u_{pqlm}$$

определяет алгебраический изоморфизм $H^1(C,R^{2n-1}\pi_*\mathbb{Q})\xrightarrow{\sim}H^1(C,R^1\pi_*\mathbb{Q})$. Лемма доказана.

**2.6.** Напомним определение класса Пуанкаре $\mathbb{Q}$-структуры Ходжа геометрического происхождения [4, 1.5].

Пусть $W$ – гладкое $d$-мерное проективное многообразие, $V_{\mathbb{Q}}\hookrightarrow H^m(W,\mathbb{Q})$ – ненулевая $\mathbb{Q}$-подструктура Ходжа и $\dim V_{\mathbb{Q}}\neq 2$ для четного $m$. Отображение степени $<>$: $H^{2d}(W,\mathbb{Q})\xrightarrow{\sim}\mathbb{Q}$ определяет невырожденное спаривание

$$\Phi: H^m(W,\mathbb{Q})\times H^m(W,\mathbb{Q})\to\mathbb{Q}$$
$$x\times y\mapsto\ \Phi(x,y)=<x\cup L^{d-m}y>$$

с невырожденным ограничением $\Phi|_{V_{\mathbb{Q}}\times V_{\mathbb{Q}}}\overset{\mathrm{def}}{=}\Phi_{V_{\mathbb{Q}}}$. Из леммы Шура следует, что $[V_{\mathbb{Q}}\otimes V_{\mathbb{Q}}]^{\mathrm{Aut}(\Phi_{V_{\mathbb{Q}}})^0}$ является 1-мерным подпространством, порожденным некоторым циклом Ходжа $\wp(V_{\mathbb{Q}})$. Мы называем $\wp(V_{\mathbb{Q}})$ *классом Пуанкаре* подструктуры Ходжа $V_{\mathbb{Q}}$.

**2.7. Лемма.** *Предположим, что $H^0(C',R^2\pi'_*\mathbb{Q})$ является $\mathbb{Q}$-структурой Ходжа типа $(1,1)$, $\dim H^1(C,R^1\pi_*\mathbb{Q})\leq 1$ и $\dim H^2(X,\mathbb{Q})\neq 2$. Тогда гипотеза $B^2(X)$ верна.*

Действительно, в рассматриваемом случае $H^1(C,R^1\pi_*\mathbb{Q})=0$ или $H^1(C,R^1\pi_*\mathbb{Q})$ является $\mathbb{Q}$-структурой Ходжа типа $(1,1)$. Согласно лемме 2.2, $H^0(C,R^2\pi_*\mathbb{Q})$ порождается алгебраическими классами. Следовательно, по теореме Лефшеца $H^2(X,\mathbb{Q})=H^0(C,R^2\pi_*\mathbb{Q})\oplus H^1(C,R^1\pi_*\mathbb{Q})\oplus H^2(C,\mathbb{Q})$ порождается алгебраическими классами. Мы видим, что $\wp(H^2(X,\mathbb{Q}))\in H^2(X,\mathbb{Q})\otimes H^2(X,\mathbb{Q})$ алгебраический. Поскольку $\dim H^2(X,\mathbb{Q})\neq 2$, то алгебраический класс $\wp(H^2(X,\mathbb{Q}))$ определяет алгебраический изоморфизм $H^{2n}(X,\mathbb{Q})\xrightarrow{\sim}H^2(X,\mathbb{Q})$ в силу леммы 1.7 в [4]. Следовательно, гипотеза $B^2(X)$ верна [4, 1.8]. Лемма доказана.

**2.8. Лемма.** *Класс Пуанкаре $\wp(H^2(C,\mathbb{Q}))$ определяет алгебраический изоморфизм*

$$H^0(C,R^{2n}\pi_*\mathbb{Q})\xrightarrow{\sim}H^2(C,\mathbb{Q}).$$

Случай $n=2$ разобран в [4, лемма 3.7]. Доказательство дословно переносится на случай $n\geq 3$.

**2.9. Лемма.** *Предположим, что $H^0(C',R^2\pi'_*\mathbb{Q})$ является $\mathbb{Q}$-структурой Ходжа типа $(1,1)$, $\dim H^1(C,R^1\pi_*\mathbb{Q})\geq 2$ и $\dim H^0(C,R^2\pi_*\mathbb{Q})\neq 2$. Тогда класс Пуанкаре $\wp(H^0(C,R^2\pi_*\mathbb{Q}))$ определяет алгебраический изоморфизм $H^2(C,R^{2n-2}\pi_*\mathbb{Q})\xrightarrow{\sim}H^0(C,R^2\pi_*\mathbb{Q})$.*

Случай $n=2$ разобран в [4, лемма 3.8]. Доказательство дословно переносится на случай $n\geq 3$.

**2.10. Лемма.** *Предположим, что $H^0(C',R^2\pi'_*\mathbb{Q})$ является $\mathbb{Q}$-структурой Ходжа типа $(1,1)$, $\dim H^1(C,R^1\pi_*\mathbb{Q})\geq 2$ и $\dim H^0(C,R^2\pi_*\mathbb{Q})\neq 2$. Тогда алгебраический класс*

$$w = u_{1111} + \sum_{\substack{p+q+l+m=4 \\ p+q\neq 2}} u_{pqlm} + \wp(H^0(C, R^2\pi_*\mathbb{Q})) + \wp(H^2(C,\mathbb{Q}))$$

*определяет алгебраический изоморфизм* $H^{2n}(X,\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^2(X,\mathbb{Q})$, *и гипотеза* $B^2(X)$ *верна.*

*Доказательство.* Прежде всего, $u_{1111}$ и $\wp(H^0(C, R^2\pi_*\mathbb{Q}))$ аннулируют $H^0(C, R^{2n}\pi_*\mathbb{Q}) \otimes H^0(C,\mathbb{Q})$. В силу лемм 2.3, 2.4 и 2.8 алгебраический класс $w$ определяет алгебраический изоморфизм $H^0(C, R^{2n}\pi_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^2(C,\mathbb{Q})$.

С другой стороны, $\wp(H^0(C, R^2\pi_*\mathbb{Q}))$ и $\wp(H^2(C,\mathbb{Q}))$ аннулируют $H^1(C, R^{2n-1}\pi_*\mathbb{Q}) \otimes H^0(C,\mathbb{Q})$. Из леммы 2.5 следует, что $w$ определяет алгебраический изоморфизм $H^1(C, R^{2n-1}\pi_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^1(C, R^1\pi_*\mathbb{Q})$.

Наконец, $u_{1111}$ и $\wp(H^2(C,\mathbb{Q}))$ аннулируют $H^2(C, R^{2n-2}\pi_*\mathbb{Q}) \otimes H^0(C,\mathbb{Q})$; в силу лемм 2.3, 2.4 и 2.9 элемент $w$ определяет алгебраический изоморфизм $H^2(C, R^{2n-2}\pi_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^0(C, R^2\pi_*\mathbb{Q})$. Остается использовать разложения (1.16) для $k \in \{2, 2n\}$, чтобы показать, что $w$ определяет алгебраический изоморфизм $H^{2n}(X,\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^2(X,\mathbb{Q})$. Следовательно, гипотеза $B^2(X)$ верна [4, 1.8]. Лемма доказана.

**2.11. Теорема.** *Пусть $X$ – гладкое комплексное проективное $(n+1)$-мерное многообразие, $\pi : X \to C$ – сюръективный морфизм на гладкую кривую $C$, любой геометрический слой морфизма $\pi$ является объединением гладких неприводимых компонент кратности 1 с нормальными пересечениями.*

*Предположим, что общий схемный слой $X_\eta$ морфизма $\pi$ является абелевым многообразием с главной поляризацией и тривиальным следом, причем выполняется хотя бы одно из следующих условий*:

(i) *общий геометрический слой $X_{\overline{\eta}}$ не имеет нетривиальных эндоморфизмов* (*другими словами,* $\mathrm{End}(X_{\overline{\eta}}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$);

(ii) $\mathrm{End}(X_\eta) \otimes \mathbb{Q} = \mathrm{End}(X_{\overline{\eta}}) \otimes \mathbb{Q}$ *и* $\mathrm{End}(X_{\overline{\eta}}) \otimes \mathbb{Q}$ – *мнимое квадратичное поле*;

(iii) $\pi : X \to C$ – *компактификация якобиевой схемы* $\pi' : \mathrm{Pic}^0(Y'/C') \to C'$, *ассоциированной с гладким семейством* $\tau' : Y' \to C'$ (*с сечением*) *кривых рода* $n$ *над аффинной кривой* $C' \hookrightarrow C$, *и общий схемный слой морфизма* $\pi'$ *имеет плохую редукцию чисто мультипликативного типа в некоторой точке* $\delta \in \Delta = C \setminus C'$.

*Если* $\dim H^0(C, R^2\pi_*\mathbb{Q}) \neq 2$ *и* $\dim H^2(X,\mathbb{Q}) \neq 2$, *то оператор* $\Lambda^{n-1} : H^{2n}(X,\mathbb{Q}) \to H^2(X,\mathbb{Q})$ *алгебраический.*

*Доказательство.* Предположим сначала, что выполнено условие (i) или (ii). Тогда $\mathrm{End}_{C'}(X') \otimes \mathbb{Q}$ содержится в мнимом квадратичном поле. Фиксируем точку $s \in C'$. Представление монодромии $\rho : \pi_1(C', s) \to \mathrm{GL}(H^1(X_s,\mathbb{Q}))$ полупросто [8, 4.2.6] и, следовательно, $\mathbb{Q}$-алгебра $H = \mathrm{End}(R^1\pi'_*\mathbb{Q})$ изоморфна прямой сумме матричных алгебр вида $M_{n_i}(D_i)$, где $D_i$ – некоторое тело. С другой стороны, центр $Z$ алгебры $H$ имеет тип Ходжа $(0,0)$ и, следовательно, содержится в подалгебре $\mathrm{End}_{C'}(X') \otimes \mathbb{Q}$ [8, 4.4.7]. Поэтому $H = M_n(D)$, где $D$ – некоторое тело, $Z = \mathrm{Cent}(D)$, $[Z : \mathbb{Q}] \leq 2$. Если $Z$ – мнимое квадратичное расширение поля $\mathbb{Q}$, то $\mathrm{End}_{C'}(X') \otimes \mathbb{Q} = \mathrm{End}(R^1\pi'_*\mathbb{Q})$ [8, предложение 4.4.11]. Если $Z = \mathbb{Q}$, то $D$ – центральная алгебра с делением над $\mathbb{Q}$ и, следовательно, $D \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ – матричная алгебра над $\mathbb{R}$ или матричная алгебра над телом $\mathbb{K}$ классических кватернионов. Следовательно, $\mathrm{End}_{C'}(X') \otimes \mathbb{Q} = \mathrm{End}(R^1\pi'_*\mathbb{Q})$ [8, предложение 4.4.11]. В любом из этих случаев имеем:

$$\mathrm{End}_{C'}(X') \otimes \mathbb{Q} = \mathrm{End}(R^1\pi'_*\mathbb{Q}). \tag{2.5}$$

Более того, $\mathrm{End}_{C'}(X') \otimes \mathbb{Q}$ является $\mathbb{Q}$-структурой Ходжа типа $(0,0)$ [8, 4.4.6]. С другой стороны, поляризация абелева многообразия $X_s$ ($s \in C'$) определяет изоморфизм $\mathbb{Q}$-структур Ходжа $H^1(X_s,\mathbb{Q})^\vee \xrightarrow{\sim} H^1(X_s,\mathbb{Q})(1)$ [8, 4.2.3]. Поэтому

$$\operatorname{End}(R^1\pi'_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \left[H^1(X_s,\mathbb{Q})^\vee \otimes H^1(X_s,\mathbb{Q})\right]^{\pi_1(C',s)} \xrightarrow{\sim} \left[H^1(X_s,\mathbb{Q}) \otimes H^1(X_s,\mathbb{Q})\right]^{\pi_1(C',s)} (1)$$

является $\mathbb{Q}$-структурой Ходжа типа $(0,0)$. Поскольку имеются канонические морфизмы $\mathbb{Q}$-структур Ходжа [16, гл. VIII, § 7, упражнение 11 (a)]

$$H^2(X_s,\mathbb{Q})^{\pi_1(C',s)} \xrightarrow{\sim} \left[\wedge^2 H^1(X_s,\mathbb{Q})\right]^{\pi_1(C',s)} \hookrightarrow \left[H^1(X_s,\mathbb{Q}) \otimes H^1(X_s,\mathbb{Q})\right]^{\pi_1(C',s)},$$

то мы видим, что $H^0(C', R^2\pi'_*\mathbb{Q}) = H^2(X_s,\mathbb{Q})^{\pi_1(C',s)}$ является $\mathbb{Q}$-структурой Ходжа типа $(1,1)$.

Наконец, предположим, что выполнено условие (iii). Пусть $X' = \operatorname{Pic}^0(Y'/C')$,

$$\begin{array}{ccc} Y' & \hookrightarrow & Y \\ \downarrow^{\tau'} & & \downarrow^{\tau} \\ C' & \hookrightarrow & C \end{array}$$

– диаграмма расслоенного произведения, определенная компактификацией, $Y$ – гладкая проективная поверхность, $\mathcal{J} \to C$ – минимальная модель Нерона общего схемного слоя канонического морфизма $\pi' : X' \to C'$.

Используя хорошо известные результаты Делиня и Мамфорда о вырождениях кривых и якобианов [17, § 2], можно легко показать, что следующие условия эквивалентны:

(a) геометрический слой морфизма $\tau : Y \to C$ над $\delta$ является объединением рациональных кривых кратности 1 с нормальными пересечениями;

(b) геометрический слой морфизма $\mathcal{J} \to C$ над $\delta$ является расширением линейного тора с помощью конечной группы;

(c) общий схемный слой морфизма $\pi' : X' \to C'$ имеет плохую редукцию чисто мультипликативного типа в точке $\delta$.

Используя (если необходимо) моноидальное преобразование $\widetilde{Y} \to Y$ поверхности $Y$ вдоль множества всех особых точек неприводимых компонент слоя $Y_\delta$, мы можем считать, что $Y_\delta$ является объединением *гладких* рациональных кривых кратности 1 с нормальными пересечениями.

Если $t$ – локальная голоморфная координата в окрестности точки $\delta \in C$ (так что $\delta$ определена уравнением $t = 0$), то можно считать, что $\tau : Y \to C$ локально задается равенством $t = z_i$ или $t = z_1 z_2$, где $z_1, z_2$ – локальные голоморфные координаты на $Y$.

Фиксируем особую точку $y_0 \in \operatorname{Sing}(Y \times_C Y)$. Тогда $y_0 = y_{12} \times y_{34}$, где $y_{12}, y_{34} \in Y_\delta$, $y_{12} \in F_1 \cap F_2$ для подходящих гладких рациональных кривых $F_i \hookrightarrow Y_\delta$, $F_1 \neq F_2$, $F_i$ локально определяется уравнением $z_i = 0$ на первой копии $Y$, $y_{34} \in F_3 \cap F_4$ для подходящих гладких рациональных кривых $F_j \hookrightarrow Y_\delta$, $F_3 \neq F_4$, $F_j$ локально определяется уравнением $z_j = 0$ на второй копии $Y$. Ограничение канонического вложения $Y \times_C Y \hookrightarrow Y \times Y$ на малую окрестность точки $y_0$ аналитически эквивалентно вложению аффинного конуса $W = \{z_1 z_2 = z_3 z_4\} \hookrightarrow \mathbb{C}^4$.

Легко видеть, что моноидальное преобразование $\mathbb{C}^4$ вдоль плоскости $\{z_1 = z_3 = 0\}$ дает разрешение особенности $W_{\text{strict}} \to W$ конуса $W$. Следовательно, моноидальное преобразование вложенного подмногообразия $Y \times_C Y \hookrightarrow Y \times Y$ вдоль $F_1 \times F_3$ дает разрешение особенности $Y \times_C Y$ в точке $y_0$. Поэтому последовательность моноидальных преобразований вложенного подмногообразия $Y \times_C Y \hookrightarrow Y \times Y$ вдоль подходящих точных образов неприводимых компонент $Y_\delta \times Y_\delta$ дает разрешение особенностей $Y \times_C Y$ над некоторой окрестностью точки $\delta \in C$. Пусть $\sigma : V \to Y \times_C Y$ – рассматриваемое разрешение особенностей. По построению, геометрический слой $V_\delta$ является объединением гладких рациональных поверхностей кратности 1 с нормальными пересечениями. Можно считать, что все слои канонического морфизма $V \to C$ являются дивизорами с нормальными пересечениями.

Пусть $\tau' \times_{C'} \tau' : Y' \times_{C'} Y' \to C'$ – структурный морфизм. Поскольку $V$ – гладкая компактификация $Y' \times_{C'} Y'$, то из результатов Делиня следует, что каноническое отображение

$$H^2(V, \mathbb{Q}) \to H^0(C', R^2(\tau' \times_{C'} \tau')_*\mathbb{Q}) = H^2(Y'_s \times Y'_s, \mathbb{Q})^{\pi_1(C',s)}$$

является сюръективным морфизмом $\mathbb{Q}$-структур Ходжа [8, следствие 4.1.2]. С другой стороны, $H^2(V, \mathcal{O}_V)$ совпадает с компонентой типа $(0,2)$ разложения Ходжа пространства $H^2(V, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{C}$.

Мы утверждаем, что

$$\forall \alpha \in H^2(V, \mathcal{O}_V) \qquad \forall s \in C' \qquad \alpha_s \stackrel{\text{def}}{=} \alpha|_{V_s} = 0. \tag{2.6}$$

Действительно, в силу классической теории Ходжа $\alpha = \overline{\beta}$ для голоморфной 2-формы $\beta \in H^0(V, \Omega^2_V)$. Если $z_1, z_2$ – локальные голоморфные координаты на $V_s$, то мы имеем:

$$\beta_s \stackrel{\text{def}}{=} \beta|_{V_s} = b(z_1, z_2)\, dz_1 \wedge dz_2,$$
$$\beta_s \wedge \overline{\beta_s} = |b(z_1, z_2)|^2 dz_1 \wedge dz_2 \wedge d\overline{z_1} \wedge d\overline{z_2}.$$

Поэтому

$$\int_{V_s} \beta_s \wedge \overline{\beta_s} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \beta_s = 0. \tag{2.7}$$

Так как

$$\int_{V_s} \beta_s \wedge \overline{\beta_s} = \int_{V_s} \beta \wedge \overline{\beta},$$

то (2.7) принимает вид

$$\int_{V_s} \beta \wedge \overline{\beta} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \beta_s = 0. \tag{2.8}$$

Любая неприводимая компонента геометрического слоя $V_\delta = \bigcup_{i=1}^n E_i$ является гладкой рациональной поверхностью. Следовательно, $H^0(E_i, \Omega^2_{E_i}) = 0$ и $\beta|_{E_i} = 0$ для всех $i$,

$$\int_{V_\delta} \beta \wedge \overline{\beta} = \sum_{i=1}^n \int_{E_i} \beta \wedge \overline{\beta} = \sum_{i=1}^n \int_{E_i} \beta|_{E_i} \wedge \overline{\beta|_{E_i}} = 0. \tag{2.9}$$

Поскольку $V_\delta$ гомологичен $V_s$ на $V$, и $\beta \wedge \overline{\beta}$ является $d$-замкнутой формой, то мы имеем по теореме Стокса:

$$\int_{V_\delta} \beta \wedge \overline{\beta} = \int_{V_s} \beta \wedge \overline{\beta}.$$

Поэтому (2.8) - (2.9) дают $\alpha_s = \overline{\beta}_s = 0$. Утверждение (2.6) доказано.

Из (2.6) следует, что $H^2(Y'_s \times Y'_s, \mathbb{Q})^{\pi_1(C',s)}$ является $\mathbb{Q}$-структурой Ходжа типа $(1,1)$. В силу формулы Кюннета имеем:

$$[H^1(Y'_s, \mathbb{Q}) \otimes H^1(Y'_s, \mathbb{Q})]^{\pi_1(C',s)} = [H^1(\mathrm{Pic}^0(Y'_s), \mathbb{Q}) \otimes H^1(\mathrm{Pic}^0(Y'_s), \mathbb{Q})]^{\pi_1(C',s)}$$
$$\text{является } \mathbb{Q} - \text{структурой Ходжа типа } (1,1). \tag{2.10}$$

Поскольку имеются канонические морфизмы $\mathbb{Q}$-структур Ходжа [16, гл. VIII, § 7, упражнение 11 (a)]

$$H^2(X_s, \mathbb{Q})^{\pi_1(C',s)} \xrightarrow{\sim} \left[\wedge^2 H^1(\mathrm{Pic}(Y'_s), \mathbb{Q})\right]^{\pi_1(C',s)} \hookrightarrow$$
$$\left[H^1(\mathrm{Pic}^0(Y'_s), \mathbb{Q}) \otimes H^1(\mathrm{Pic}^0(Y'_s), \mathbb{Q})\right]^{\pi_1(C',s)},$$

то мы видим, что $H^0(C', R^2\pi'_*\mathbb{Q}) = H^2(X_s, \mathbb{Q})^{\pi_1(C',s)}$ является $\mathbb{Q}$-структурой Ходжа типа $(1,1)$.

Следовательно, если выполнено хотя бы одно из условий (i) – (iii), то $H^0(C', R^2\pi'_*\mathbb{Q})$ является $\mathbb{Q}$-структурой Ходжа типа $(1,1)$.

Если $\dim H^0(C, R^2\pi_*\mathbb{Q}) \neq 2$ и $\dim H^2(X, \mathbb{Q}) \neq 2$, то оператор $\Lambda^{n-1} : H^{2n}(X, \mathbb{Q}) \to H^2(X, \mathbb{Q})$ алгебраический в силу лемм 2.7 и 2.10. Теорема доказана.

## § 3. О $\boldsymbol{B(X)}$ для компактификации якобиевой схемы относительной размерности 3 над аффинной кривой с плохими редукциями чисто мультипликативного типа

**3.1. Лемма.** *Пусть $\tau : Y \to C$ – морфизм гладкой проективной поверхности $Y$ на гладкую кривую $C$. Предположим, что все особые слои являются объединениями гладких рациональных кривых кратности 1 с нормальными пересечениями. Тогда имеется такое разрешение особенностей $\sigma : [Y \times_C Y \times_C Y]^{\mathrm{smooth}} \to Y \times_C Y \times_C Y$, что все особые слои композиции*

$$[Y \times_C Y \times_C Y]^{\mathrm{smooth}} \xrightarrow{\sigma} Y \times_C Y \times_C Y \to C$$

*являются объединениями гладких неприводимых компонент $E'_i$ кратности 1 с нормальными пересечениями, и $E'_i$ получается из $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ композицией раздутий точек и гладких рациональных кривых. В частности, $H^3(E'_i, \mathbb{Q}) = 0$.*

*Доказательство.* Если $t$ – локальная голоморфная координата в окрестности точки $\delta \in C$ (так что $\delta$ определяется уравнением $t = 0$), то можно считать, что $\tau : Y \to C$ локально задается формулами $t = z_i$ или $t = z_1 z_2$, где $z_1, z_2$ – локальные голоморфные координаты на $Y$.

Пусть $z_1, \ldots, z_6$ – локальные голоморфные координаты на $X \overset{\mathrm{def}}{=} Y \times Y \times Y$. Можно считать, что подмногообразие $V \overset{\mathrm{def}}{=} Y \times_C Y \times_C Y \hookrightarrow Y \times Y \times Y = X$ локально определяется одной из следующих систем уравнений:

$$z_1z_2 = z_3z_4 = z_5z_6; \tag{3.1}$$
$$z_1 = z_3z_4 = z_5z_6; \tag{3.2}$$
$$z_1 = z_3 = z_5z_6; \tag{3.3}$$
$$z_1 = z_3 = z_5. \tag{3.4}$$

Пусть $D \hookrightarrow \mathbb{C}^6$ – полидиск с координатами $z_1, \dots, z_6$, $\quad W = V \cap D$ – открытое подмножество в $V^{\mathrm{an}}$.

Мы утверждаем, что

$$\dim \operatorname{Sing}(W) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad W = \{z_1z_2 = z_3z_4 = z_5z_6\}; \\ 1, & \text{если} \quad W = \{z_1 = z_3z_4 = z_5z_6\}; \\ -1, & \text{если} \quad W = \{z_1 = z_3 = z_5z_6\}; \\ -1, & \text{если} \quad W = \{z_1 = z_3 = z_5\}. \end{cases} \tag{3.5}$$

Действительно, предположим сначала, что $W = \{z_1z_2 = z_3z_4 = z_5z_6\}$. Поскольку $W$ – множество нулей голоморфных функций $f_1 = z_1z_2 - z_3z_4$, $\quad f_2 = z_1z_2 - z_5z_6$, то мы имеем в силу [18, гл. 0, § 2]:

$$\operatorname{Sing}(W) = \{(z_1, \dots, z_6) \in W \mid \operatorname{rank} \mathcal{J}(f_1, f_2) < 2\},$$

где $\mathcal{J} = \mathcal{J}(f_1, f_2)$ – матрица Якоби

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \frac{\partial f_1}{\partial z_2} & \frac{\partial f_1}{\partial z_3} & \frac{\partial f_1}{\partial z_4} & \frac{\partial f_1}{\partial z_5} & \frac{\partial f_1}{\partial z_6} \\ \frac{\partial f_2}{\partial z_1} & \frac{\partial f_2}{\partial z_2} & \frac{\partial f_2}{\partial z_3} & \frac{\partial f_2}{\partial z_4} & \frac{\partial f_2}{\partial z_5} & \frac{\partial f_2}{\partial z_6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 & z_1 & -z_4 & -z_3 & 0 & 0 \\ z_2 & z_1 & 0 & 0 & -z_6 & -z_5 \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$\begin{gathered} \operatorname{Sing}(W) = \{(z_1, \dots, z_6) \in W \mid z_1z_3 = z_1z_4 = z_1z_5 = z_1z_6 = \\ z_2z_3 = z_2z_4 = z_2z_5 = z_2z_6 = z_3z_5 = z_3z_6 = z_4z_5 = z_4z_6 = 0\}; \\ \operatorname{Sing}(W) = \{(z_1, \dots, z_6) \in D \mid z_2 = z_3 = z_4 = z_5 = z_6 = 0\} \cup \\ \{(z_1, \dots, z_6) \in D \mid z_1 = z_3 = z_4 = z_5 = z_6 = 0\} \cup \dots \cup \\ \{(z_1, \dots, z_6) \in D \mid z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = z_5 = 0\}; \\ \dim \operatorname{Sing}(W) = 1. \end{gathered} \tag{3.6}$$

Аналогично для $W = \{z_1 = z_3z_4 = z_5z_6\}$ имеем:

$$\begin{gathered} \mathcal{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -z_4 & -z_3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -z_6 & -z_5 \end{pmatrix}, \\ \operatorname{Sing}(W) = \{(z_1, \dots, z_6) \in W \mid z_3 = z_4 = z_5 = z_6 = 0\} = \\ \{(z_1, \dots, z_6) \in D \mid z_1 = z_3 = z_4 = z_5 = z_6 = 0\}; \\ \dim \operatorname{Sing}(W) = 1. \end{gathered} \tag{3.7}$$

Наконец, для $W = \{z_1 = z_3 = z_5z_6\}$ имеем:

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -z_6 & -z_5 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{rank} \mathcal{J} = 2,$$

поэтому $W$ не имеет особенностей. Это же верно для $W = \{z_1 = z_3 = z_5\}$. Утверждение (3.5) доказано.

Из (3.5) – (3.7) следует, что

$$\operatorname{Sing}(Y \times_C Y \times_C Y) = \bigcup_{\substack{\delta\in\Delta,\quad F\hookrightarrow Y_\delta\\ a,b\in\operatorname{Sing}(Y_\delta)}} [F \times a \times b] \cup [a \times F \times b] \cup [a \times b \times F] \tag{3.8}$$

– объединение гладких рациональных кривых, где $F$ пробегает неприводимые компоненты $Y_\delta$ (являющиеся гладкими рациональными кривыми), и $a, b$ пробегают особые точки слоя $Y_\delta$.

Рассмотрим моноидальное преобразование $f : X' \to X$ вдоль гладкой рациональной компоненты $E_i \hookrightarrow V_\delta$. Очевидно, что $E_i \widetilde{\to} \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. По формуле Кюннета имеем:

$$H^3(E_i, \mathbb{Q}) = 0. \tag{3.9}$$

Канонический морфизм $\varphi : V_{\text{strict}} \to V$ точного образа подмногообразия $V \hookrightarrow X$ при моноидальном преобразовании $f$ является моноидальным преобразованием многообразия $V$ вдоль $E_i$ [19, гл. 0, § 2]. По той же причине канонический морфизм $\varphi_{E_j} : (E_j)_{\text{strict}} \to E_j$ является моноидальным преобразованием $E_j$ вдоль $E_i \cap E_j \quad (j \neq i)$. Поскольку $E_i, E_j$ – произведения гладких рациональных кривых, то легко видеть, что возможны следующие случаи:

$$E_i \cap E_j = \begin{cases} \text{конечное множество точек;} \\ \text{несвязное объединение гладких рациональных кривых;} \\ \text{несвязное объединение произведений гладких рациональных кривых} \end{cases} \tag{3.10}$$

(в последнем случае $\varphi_{E_j}$ – изоморфизм).

Во всех случаях любая неприводимая компонента $E' \hookrightarrow (V_{\text{strict}})_\delta$ гладкая. Более того, мы имеем:

$$H^3(E', \mathbb{Q}) = 0. \tag{3.11}$$

Действительно, пусть

$$\begin{array}{ccc} B' & \overset{j}{\hookrightarrow} & E' \\ \downarrow^{g} & & \downarrow^{\varphi_E} \\ B & \overset{i}{\hookrightarrow} & E \end{array}$$

– каноническая диаграмма моноидального преобразования $\varphi_E : E' \to E$ гладкого рационального трехмерного многообразия $E$ вдоль замкнутого гладкого рационального центра $B$ коразмерности $r \geq 2$, $\quad N$ – конормальный пучок на $B$ [20, 13.3]. Тогда имеется каноническое разложение $\mathbb{Q}$-структур Ходжа

$$H^3(E', \mathbb{Q}) = \varphi_E^* H^3(E, \mathbb{Q}) \bigoplus \left[ \bigoplus_{p=0}^{r-2} j_*[g^* H^{3-2p-2}(B, \mathbb{Q}) \cup \mathrm{c}_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(N)}(1))^{\cup p}] \right] \tag{3.12}$$

[21, предложение 13.1]. Поскольку $H^1(B, \mathbb{Q}) = 0$, то (3.12) принимает вид

$$H^3(E', \mathbb{Q}) = \varphi_E^* H^3(E, \mathbb{Q}),$$

поэтому (3.11) следует из (3.9).

Можно считать, что неприводимая компонента $E_i$ особого слоя $V_\delta$ локально определяется как $\{z_1 = z_3 = z_5 = 0\}$. Хорошо известно, что моноидальное преобразование полидиска $D$ с координатами $z_1, \ldots, z_6$ вдоль трехмерного многообразия $\{z_1 = z_3 = z_5 = 0\}$ является канонической проекцией подмножества

$$\widetilde{D} = \{(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) \times (w_0 : w_1 : w_2) \mid$$
$$z_1 w_1 = z_3 w_0; \quad z_1 w_2 = z_5 w_0; \quad z_3 w_2 = z_5 w_1\} \hookrightarrow D \times \mathbb{P}^2$$

на $D$. Пусть $D_+(w_i) = \{(w_0 : w_1 : w_2) \in \mathbb{P}^2 \mid w_i \neq 0\}$, $u_1 = w_1/w_0$, $u_2 = w_2/w_0$ – локальные координаты на $D_+(w_0)$, $u_3 = w_0/w_1$, $u_4 = w_2/w_1$ – локальные координаты на $D_+(w_1)$, $u_5 = w_0/w_2$, $u_6 = w_1/w_2$ – локальные координаты на $D_+(w_2)$.

Предположим сначала, что $W$ определяется системой уравнений $z_1 = z_3 z_4 = z_5 z_6$ типа (3.2). Поскольку $\widetilde{D}$ задается в открытом множестве $U_0 = D \times D_+(w_0)$ как $\widetilde{D} \cap U_0 = \{z_3 = z_1 u_1; \quad z_5 = z_1 u_2\}$, то точный образ $W_{\text{strict}}$ многообразия $W$ определяется в локальных координатах $z_1, z_2, z_4, z_6, u_1, u_2$ на $\widetilde{D} \cap U_0$ уравнениями $1 = u_1 z_4 = u_2 z_6$. Ранг соответствующей матрицы Якоби

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -u_1 & 0 & -z_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -u_2 & 0 & -z_6 \end{pmatrix}$$

равен 2, потому что $u_1 u_2 \neq 0$ на $W_{\text{strict}}$. Следовательно, $W_{\text{strict}}$ не имеет особых точек на $\widetilde{D} \cap U_0$. С другой стороны, $\widetilde{D}$ задается в открытом подмножестве $U_1 = D \times D_+(w_1)$ как $\widetilde{D} \cap U_1 = \{z_1 = z_3 u_3; \quad z_5 = z_3 u_4\}$, следовательно, $W_{\text{strict}}$ определяется в локальных координатах $z_2, z_3, z_4, z_6, u_3, u_4$ на $\widetilde{D} \cap U_1$ уравнениями $u_3 = z_4 = u_4 z_6$,

$$\operatorname{rank} \mathcal{J} = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -u_4 & 1 & -z_6 \end{pmatrix} = 2,$$

и $W_{\text{strict}}$ не имеет особых точек в $\widetilde{D} \cap U_1$. Наконец, $\widetilde{D}$ задается в открытом подмножестве $U_2 = D \times D_+(w_2)$ как $\widetilde{D} \cap U_2 = \{z_1 = z_5 u_5; \quad z_3 = z_5 u_6\}$, следовательно, $W_{\text{strict}}$ определяется в локальных координатах $z_2, z_4, z_5, z_6, u_5, u_6$ на $\widetilde{D} \cap U_2$ уравнениями $u_5 = u_6 z_4 = z_6$,

$$\operatorname{rank} \mathcal{J} = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} 0 & -u_6 & 0 & 0 & 1 & -z_4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2,$$

и $W_{\text{strict}}$ не имеет особых точек на $\widetilde{D} \cap U_2$.

Предположим теперь, что $W$ определяется системой уравнений $z_1 z_2 = z_3 z_4 = z_5 z_6$ типа (3.1). Поскольку $\widetilde{D}$ задается в открытом подмножестве $U_0 = D \times D_+(w_0)$ как $\widetilde{D} \cap U_0 = \{z_3 = z_1 u_1; \quad z_5 = z_1 u_2\}$, то точный образ $W_{\text{strict}}$ многообразия $W$ определяется в локальных координатах $z_1, z_2, z_4, z_6, u_1, u_2$ на $\widetilde{D} \cap U_0$ системой уравнений $z_2 = u_1 z_4 = u_2 z_6$ типа (3.2). Из приведенных выше вычислений следует, что моноидальное преобразование $W_{\text{strict}} \cap [\widetilde{D} \cap U_0]$ вдоль $\{z_2 = z_4 = z_6 = 0\}$ дает разрешение особенностей $W_{\text{strict}} \cap [\widetilde{D} \cap U_0]$. С другой стороны, $\widetilde{D}$ задается в открытом подмножестве $U_1 = D \times D_+(w_1)$ как $\widetilde{D} \cap U_1 = \{z_1 = z_3 u_3; \quad z_5 = z_3 u_4\}$, следовательно, $W_{\text{strict}}$ определяется в локальных координатах $z_2, z_3, z_4, z_6, u_3, u_4$ на $\widetilde{D} \cap U_1$ системой уравнений $u_3 z_2 = z_4 = u_4 z_6$ типа (3.2). Поэтому моноидальное преобразование $W_{\text{strict}} \cap [\widetilde{D} \cap U_1]$ вдоль $\{z_2 = z_4 = z_6 = 0\}$ дает рарешение особенностей $W_{\text{strict}} \cap [\widetilde{D} \cap U_1]$. Наконец, $\widetilde{D}$ задается в открытом подмножестве $U_2 = D \times D_+(w_2)$ как $\widetilde{D} \cap U_2 = \{z_1 = z_5 u_5; \quad z_3 = z_5 u_6\}$, поэтому $W_{\text{strict}}$ определяется в локальных координатах $z_2, z_4, z_5, z_6, u_5, u_6$ на $\widetilde{D} \cap U_2$ системой уравнений $u_5 z_2 = u_6 z_4 = z_6$ типа (3.2), и моноидальное преобразование $W_{\text{strict}} \cap [\widetilde{D} \cap U_2]$ вдоль $\{z_2 = z_4 = z_6 = 0\}$ дает разрешение особенностей $W_{\text{strict}} \cap [\widetilde{D} \cap U_2]$.

Пусть $E_1, E_2, \dots, E_m$ – все неприводимые компоненты особых слоев канонического морфизма $V = Y \times_C Y \times_C Y \to C$. Легко видеть из приведенных выше вычислений и (3.11), что последовательность моноидальных преобразований $X = Y \times Y \times Y$ вдоль точных образов гладких рациональных трехмерных многообразий $E_i \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ позволяет нам построить разрешение особенностей вложенного подмногообразия $Y \times_C Y \times_C Y \hookrightarrow Y \times Y \times Y$, удовлетворяющее заключениям леммы 3.1.

**3.2. Лемма.** *Пусть* $\tau : Y \to C$ *удовлетворяет условиям леммы* 3.1, *и* $\mu : V \stackrel{\text{def}}{=} [Y \times_C Y \times_C Y]^{\text{smooth}} \to C$ *– канонический структурный морфизм. Если существует хотя бы один особый слой морфизма* $\tau$, $\operatorname{End}(\operatorname{Pic}^0(Y_{\overline{\eta}})) = \mathbb{Z}$ *для общего геометрического слоя* $Y_{\overline{\eta}}$ *морфизма* $\tau$, *и род* $Y_{\overline{\eta}}$ *равен* 3, *то*

$$H^5(V, \mathbb{Q}) = H^1(C, R^4\mu_*\mathbb{Q});$$
$$H^3(V, \mathbb{Q}) = H^1(C, R^2\mu_*\mathbb{Q}).$$

*Доказательство.* Можно считать, что $\tau$ гладкий над непустым открытым аффинным подмножеством $C' \stackrel{\text{def}}{=} C \setminus \Delta \hookrightarrow C$. Рассмотрим диаграмму расслоенного произведения

$$\begin{array}{ccc} Y' & \hookrightarrow & Y \\ \downarrow^{\tau'} & & \downarrow^{\tau} \\ C' & \hookrightarrow & C. \end{array}$$

Пусть $V' = \mu^{-1}(C')$. Тогда $\mu' = \mu|_{\mu^{-1}(C')} : V' \to C'$ гладкий. По лемме 3.1 можно считать, что $V_\delta$ $(\delta \in \Delta)$ является объединением гладких рациональных трехмерных многообразий $E'_i$ кратности 1 с нормальными пересечениями, и $H^3(E'_i, \mathbb{Q}) = 0$.

Используя аргументы доказательства (1.16), получим каноническое разложение $\mathbb{Q}$-структур Ходжа

$$H^m(V, \mathbb{Q}) = H^0(C, R^m\mu_*\mathbb{Q}) \oplus H^1(C, R^{m-1}\mu_*\mathbb{Q}) \oplus H^2(C, R^{m-2}\mu_*\mathbb{Q}). \tag{3.13}$$

Пусть

$$f : Z \to \mu^{-1}(\Delta)$$

– нормализация дивизора $\mu^{-1}(\Delta)$. Тогда $Z$ – несвязное объединение гладких неприводимых компонент дивизора $\mu^{-1}(\Delta)$. Поскольку $f$ – разрешение особенностей замкнутой подсхемы $i_\Delta : \mu^{-1}(\Delta) \hookrightarrow V$, то имеется точная последовательность смешанных $\mathbb{Q}$-структур Ходжа [22, следствие (8.2.8)]:

$$H^3(Z, \mathbb{Q}(-1)) \xrightarrow{(i_\Delta f)_*} H^5(V, \mathbb{Q}) \to H^5(V', \mathbb{Q}).$$

Поэтому

$$(i_\Delta f)_* H^3(Z, \mathbb{Q}(-1)) = \operatorname{Ker}\left[H^5(V, \mathbb{Q}) \to H^5(V', \mathbb{Q})\right]. \tag{3.14}$$

С другой стороны, любая неприводимая компонента $E \hookrightarrow Z$ является гладким рациональным трехмерным многообразием с $H^3(E, \mathbb{Q}) = 0$. Из (3.14) следует, что имеется каноническое вложение $H^5(V, \mathbb{Q}) \hookrightarrow H^5(V', \mathbb{Q})$. Заметим, что канонический сюръективный морфизм $\mathbb{Q}$-структур Ходжа $H^5(V, \mathbb{Q}) \to H^0(C', R^5\mu'_*\mathbb{Q})$ [8, теорема 4.1.1] является частью коммутативной диаграммы (с точными строками и столбцами) морфизмов смешанных $\mathbb{Q}$-структур Ходжа [8, следствие 3.2.18, доказательство теоремы 4.1.1]

$$\begin{array}{ccccc}
H^5(V,\mathbb{Q}) & \hookrightarrow & H^5(V',\mathbb{Q}) & & \\
\downarrow & \searrow & \downarrow & & \\
H^0(C,R^5\mu_*\mathbb{Q}) & \to & H^0(C',R^5\mu'_*\mathbb{Q}) & \to & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
0 & & 0. & &
\end{array}$$

Поляризация позволяет нам отождествить $H^0(C',R^5\mu'_*\mathbb{Q})$ с $\mathbb{Q}$-подструктурой Ходжа в $H^0(C,R^5\mu_*\mathbb{Q}) \hookrightarrow H^5(V,\mathbb{Q})$. Следовательно, каноническое разложение (3.13) для $m = 5$ дает отождествление $H^0(C,R^5\mu_*\mathbb{Q}) = H^0(C',R^5\mu'_*\mathbb{Q})$. С другой стороны, $H^0(C',R^5\mu'_*\mathbb{Q}) = H^5(V'_s,\mathbb{Q})^{\pi_1(C',s)}$ для точки $s \in C'$. По теореме двойственности Пуанкаре $H^5(V'_s,\mathbb{Q})$ двойственно $H^1(V'_s,\mathbb{Q})$. Следовательно, $H^0(C,R^5\mu_*\mathbb{Q})$ двойственно

$$H^1(V'_s,\mathbb{Q})^{\pi_1(C',s)} = H^1(Y'_s \times Y'_s \times Y'_s,\mathbb{Q})^{\pi_1(C',s)}. \tag{3.15}$$

Очевидно, что след абелевой схемы $\mathrm{Pic}^0(Y'/C') \to C'$ тривиален (так как специальный слой минимальной модели Нерона схемы $\mathrm{Pic}^0(Y'/C') \to C'$ над бесконечно удаленной точкой $\delta \in \Delta$ является расширением конечной группы с помощью тора, и хорошо известно, что это свойство стабильно относительно замены базы), поэтому

$$H^1(Y'_s,\mathbb{Q})^{\pi_1(C',s)} = 0. \tag{3.16}$$

Действительно, это равенство доказано в [7, лемма 2.6 и замечание 2.7] для абелевых схем над полными кривыми, и доказательство дословно переносится на рассматриваемый случай. Поэтому (3.15) – (3.16) и формула Кюннета дают

$$H^0(C,R^5\mu_*\mathbb{Q}) = 0. \tag{3.17}$$

Мы утверждаем, что

$$H^2(C,R^3\mu_*\mathbb{Q}) = 0. \tag{3.18}$$

Действительно, имеется следующий аналог (1.13):

$$H^i(C,R^p\mu_*\mathbb{Q}) \cup H^j(C,R^q\mu_*\mathbb{Q}) \hookrightarrow H^{i+j}(C,R^{p+q}\mu_*\mathbb{Q}). \tag{3.19}$$

Каноническое спаривание $H^5(V,\mathbb{Q}) \times H^3(V,\mathbb{Q}) \xrightarrow{x\times y\mapsto x\cup y} H^8(V,\mathbb{Q})$ невырождено по теореме двойственности Пуанкаре и, в силу (3.19), имеем:

$$H^2(C,R^3\mu_*\mathbb{Q}) \cup H^1(C,R^2\mu_*\mathbb{Q}) \hookrightarrow H^3(C,R^5\pi_*\mathbb{Q}) = 0,$$
$$H^2(C,R^3\mu_*\mathbb{Q}) \cup H^2(C,R^1\mu_*\mathbb{Q}) \hookrightarrow H^4(C,R^4\mu_*\mathbb{Q}) = 0.$$

Поэтому каноническое спаривание

$$H^2(C,R^3\mu_*\mathbb{Q}) \times H^0(C,R^3\mu_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{x\times y\mapsto x\cup y} H^2(C,R^6\mu_*\mathbb{Q}) = H^8(V,\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}$$

невырождено. В частности,

$$\dim H^2(C,R^3\mu_*\mathbb{Q}) = \dim H^0(C,R^3\mu_*\mathbb{Q}). \tag{3.20}$$

Используя аргументы доказательства (3.14), получаем:

$$(i_{\Delta} f)_* H^1(Z, \mathbb{Q}(-1)) = \operatorname{Ker}\left[H^3(V, \mathbb{Q}) \to H^3(V', \mathbb{Q})\right]. \tag{3.21}$$

С другой стороны, каждая неприводимая компонента $E \hookrightarrow Z$ является гладким рациональным трехмерным многообразием. Следовательно, $H^1(E, \mathbb{Q}) = 0$, потому что $2 \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Alb}(E) = \dim H^1(E, \mathbb{Q})$ и любой морфизм рационального многообразия $E$ в его многообразие Альбанезе постоянный. Из (3.21) следует, что имеется каноническое вложение $H^3(V, \mathbb{Q}) \hookrightarrow H^3(V', \mathbb{Q})$, индуцирующее отождествления

$$H^0(C, R^3\mu_*\mathbb{Q}) = H^0(C', R^3\mu'_*\mathbb{Q}) = H^3(V'_s, \mathbb{Q})^{\pi_1(C',s)} = H^3(Y'_s \times Y'_s \times Y'_s, \mathbb{Q})^{\pi_1(C',s)}$$

для точки $s \in C'$. В силу (3.16) имеем:

$$[H^2(Y'_s, \mathbb{Q}) \otimes H^1(Y'_s, \mathbb{Q})]^{\pi_1(C',s)} \widetilde{\to} H^1(Y'_s, \mathbb{Q})^{\pi_1(C',s)} = 0.$$

Чтобы доказать (3.18), остается проверить, что

$$[H^1(Y'_s, \mathbb{Q}) \otimes H^1(Y'_s, \mathbb{Q}) \otimes H^1(Y'_s, \mathbb{Q})]^{\pi_1(C',s)} = 0.$$

Заметим, что

$$\begin{gathered}[H^1(Y'_s, \mathbb{Q}) \otimes H^1(Y'_s, \mathbb{Q}) \otimes H^1(Y'_s, \mathbb{Q})]^{\pi_1(C',s)} = \\ \operatorname{Hom}_{\pi_1(C',s)}(H^1(Y'_s, \mathbb{Q}), H^1(Y'_s, \mathbb{Q}) \otimes H^1(Y'_s, \mathbb{Q})).\end{gathered} \tag{3.22}$$

Поскольку $\operatorname{End}(\operatorname{Pic}^0(Y_{\overline{\eta}})) = \mathbb{Z}$ по предположению леммы, то для общей точки $s \in C'$ (в смысле А.Вейля) $\operatorname{Hg}(H^1(Y'_s, \mathbb{Q})) = \operatorname{Hg}(H^1(\operatorname{Pic}^0(Y'_s), \mathbb{Q}))$ является простой алгебраической $\mathbb{Q}$-группой типа $C_3$ [23].

Для замкнутой точки $u \in C'$ обозначим через $\rho_u : \pi_1(C', u) \to \operatorname{GL}(H^1(Y'_u, \mathbb{Q}))$ каноническое представление монодромии. По теореме Делиня существует такое счетное подмножество $\Delta'_\infty \hookrightarrow C'$, что для всех $v \in C' \backslash \Delta'_\infty$ замыкание $\rho_v(\pi_1(C', v))$ в топологии Зариского группы $\operatorname{GL}(H^1(Y'_v, \mathbb{Q}))$ является полупростой алгебраической $\mathbb{Q}$-группой $G$, и связная компонента единицы $G^0$ группы $G$ является нормальной подгруппой в $\operatorname{Hg}(H^1(Y'_v, \mathbb{Q}))$ [24, теорема 7.3]. В частности, $G^0 = 1$ или $G^0$ – простая алгебраическая $\mathbb{Q}$-группа типа $C_3$.

Если $G^0 = 1$, то $\operatorname{Pic}^0(Y'/C') \to C'$ – изотривиальная абелева схема [8, (4.1.3.3), 4.4.3], что противоречит тривиальности следа этой абелевой схемы. Поэтому $G^0$ – простая алгебраическая $\mathbb{Q}$-группа типа $C_3$.

В силу (3.22) достаточно показать, что

$$\operatorname{Hom}_{G^0}(H^1(Y'_s, \mathbb{Q}), H^1(Y'_s, \mathbb{Q}) \otimes H^1(Y'_s, \mathbb{Q})) = 0.$$

Поскольку $H^1(Y'_s, \mathbb{C}) = E(\omega_1)$ – стандартное представление комплексной простой алгебры Ли $g$ типа $C_3$ со старшим весом $\omega_1$, то остается показать, что

$$\operatorname{Hom}_g(E(\omega_1), E(\omega_1) \otimes E(\omega_1)) = 0. \tag{3.23}$$

Заметим, что $E(\omega_1) \otimes E(\omega_1) = \operatorname{Sym}^2 E(\omega_1) \oplus \wedge^2 E(\omega_1)$ – представление степени 36, содержащее неприводимое подпредставление $E(2\omega_1)$ [16, гл. VIII, § 7, упражнение 17] степени 21 в силу формулы Г.Вейля [25, 2.7]. Напомним, что $\wedge^2 E(\omega_1) = E(\omega_2) \oplus E(0)$ [16, гл. VIII, 13.3, лемма 2], $\dim E(\omega_2) = 14$. Поэтому имеется каноническое разложение $g$-модулей $E(\omega_1) \otimes E(\omega_1) = E(2\omega_1) \oplus E(\omega_2) \oplus E(0)$. Следовательно, лемма Шура дает (3.23). Мы видим, что верно (3.18).

Из (3.18) и (3.20) следует, что

$$H^0(C, R^3\mu_*\mathbb{Q}) = 0. \tag{3.24}$$

С другой стороны, (3.13) для $m = 5$ и (3.17) – (3.18) дают

$$H^5(V, \mathbb{Q}) = H^1(C, R^4\mu_*\mathbb{Q}). \tag{3.25}$$

Каноническое спаривание $H^5(V,\mathbb{Q}) \times H^3(V,\mathbb{Q}) \xrightarrow{x\times y \mapsto x\cup y} H^8(V,\mathbb{Q})$ невырождено по теореме двойственности Пуанкаре и, согласно (3.19), имеем: $H^1(C, R^4\mu_*\mathbb{Q}) \cup H^2(C, R^1\mu_*\mathbb{Q}) \hookrightarrow H^3(C, R^5\mu_*\mathbb{Q}) = 0$. Поэтому (3.25) дает $H^2(C, R^1\mu_*\mathbb{Q}) = 0$ и, в силу (3.13) для $m = 3$ и (3.24), имеем: $H^3(V, \mathbb{Q}) = H^1(C, R^2\mu_*\mathbb{Q})$. Лемма доказана.

**3.3. Лемма.** *Пусть $Y_s$ – гладкая проективная кривая рода 3, и $V_s = Y_s \times Y_s \times Y_s$. Тогда имеется такой канонически определенный алгебраический класс $\omega_s \in H^1(V_s,\mathbb{Q}) \otimes H^1(V_s,\mathbb{Q})$, что алгебраическое соответствие $\omega_s^{\cup 2}$ дает алгебраический изоморфизм $H^4(V_s,\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^2(V_s,\mathbb{Q})$.*

*Доказательство.* Каноническое спаривание

$$\Phi : H^1(Y_s,\mathbb{Q}) \times H^1(Y_s,\mathbb{Q}) \xrightarrow{x\times y\mapsto x\cup y} H^2(Y_s,\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}$$

кососимметрично и невырождено. Напомним, что матрица $\Phi$ относительно базиса Витта $e_1, e_2, e_3, e_{-3}, e_{-2}, e_{-1}$ пространства $H^1(Y_s,\mathbb{Q})$ равна $\begin{pmatrix} 0 & s \\ -s & 0 \end{pmatrix}$, где $s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ [16, гл. VIII, § 13, n$^0$ 3]. Фиксируем точку $p \in Y_s$. Тогда

$$e_i \cup e_j = \begin{cases} \mathrm{cl}_{Y_s}(p) & \text{для } i = -j = 1, 2, 3; \\ -\,\mathrm{cl}_{Y_s}(p) & \text{для } i = -j = -1, -2, -3; \\ 0 & \text{для } i \neq -j. \end{cases} \tag{3.26}$$

Можно отождествить алгебру Ли $\mathrm{sp}(\Phi)$ с алгеброй Ли матриц вида $a = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -s\,{}^tA\,s \end{pmatrix}$, где $A, B, C$ – матрицы типа $3\times 3$, и $B$, $C$ – симметрические матрицы относительно побочной диагонали [16, гл. VIII, § 13, n$^0$ 3]. Легко доказать прямыми вычислениями, что 1-мерное пространство $[H^1(Y_s,\mathbb{Q}) \otimes H^1(Y_s,\mathbb{Q})]^{\mathrm{Sp}(\Phi)}$ порождается классом Пуанкаре

$$\wp(H^1(Y_s,\mathbb{Q})) = e_1\otimes e_{-1} + e_2\otimes e_{-2} + e_3\otimes e_{-3} - e_{-3}\otimes e_3 - e_{-2}\otimes e_2 - e_{-1}\otimes e_1. \tag{3.27}$$

Поскольку $\wp(H^1(Y_s,\mathbb{Q}))$ – цикл Ходжа [4, 1.5], то он алгебраический по теореме Лефшеца.

Рассмотрим алгебраический класс

$$\begin{gathered}\omega_s = \wp(H^1(Y_s^{(1)},\mathbb{Q})) + \wp(H^1(Y_s^{(2)},\mathbb{Q})) + \wp(H^1(Y_s^{(3)},\mathbb{Q})) = \\ e_1^{(1)}\otimes e_{-1}^{(1)} + e_2^{(1)}\otimes e_{-2}^{(1)} + e_3^{(1)}\otimes e_{-3}^{(1)} - e_{-3}^{(1)}\otimes e_3^{(1)} - e_{-2}^{(1)}\otimes e_2^{(1)} - e_{-1}^{(1)}\otimes e_1^{(1)} + \\ e_1^{(2)}\otimes e_{-1}^{(2)} + e_2^{(2)}\otimes e_{-2}^{(2)} + e_3^{(2)}\otimes e_{-3}^{(2)} - e_{-3}^{(2)}\otimes e_3^{(2)} - e_{-2}^{(2)}\otimes e_2^{(2)} - e_{-1}^{(2)}\otimes e_1^{(2)} + \\ e_1^{(3)}\otimes e_{-1}^{(3)} + e_2^{(3)}\otimes e_{-2}^{(3)} + e_3^{(3)}\otimes e_{-3}^{(3)} - e_{-3}^{(3)}\otimes e_3^{(3)} - e_{-2}^{(3)}\otimes e_2^{(3)} - e_{-1}^{(3)}\otimes e_1^{(3)},\end{gathered}$$

где $e_1^{(k)}, e_2^{(k)}, e_3^{(k)}, e_{-3}^{(k)}, e_{-2}^{(k)}, e_{-1}^{(k)}$ – базис Витта $k$-й копии $H^1(Y_s^{(k)},\mathbb{Q})$ пространства $H^1(Y_s,\mathbb{Q})$ в разложении Кюннета

$$H^1(V_s,\mathbb{Q}) = H^1(Y_s\times Y_s\times Y_s,\mathbb{Q}) = H^1(Y_s^{(1)},\mathbb{Q})\oplus H^1(Y_s^{(2)},\mathbb{Q})\oplus H^1(Y_s^{(3)},\mathbb{Q}).$$

Хорошо известно, что алгебраическое соответствие $\wp(H^1(Y_s^{(k)},\mathbb{Q}))$ на $Y_s^{(k)}\times Y_s^{(k)}$ определяет канонический изоморфизм

$$H^1(Y_s^{(k)},\mathbb{Q})\xrightarrow[\sim]{[\wp(H^1(Y_s^{(k)},\mathbb{Q}))]_*}H^1(Y_s^{(k)},\mathbb{Q}),$$

где

$$[\wp(H^1(Y_s^{(k)},\mathbb{Q}))]_*(\alpha) = \mathrm{pr}_{2s*}^{(k)}([\alpha\otimes \mathrm{cl}_{Y_s^{(k)}}(Y_s^{(k)})]\cup \wp(H^1(Y_s^{(k)},\mathbb{Q})))$$

для $\alpha\in H^1(Y_s^{(k)},\mathbb{Q})$, и $\mathrm{pr}_{2s}^{(k)}: Y_s^{(k)}\times Y_s^{(k)}\to Y_s^{(k)}$ – каноническая проекция [4, лемма 1.7]. С другой стороны, из (3.26) - (3.27) следует, что

$$\begin{gathered}[\wp(H^1(Y_s^{(k)},\mathbb{Q}))]_*(e_j^{(k)}) = \mathrm{pr}_{2s*}^{(k)}([e_j^{(k)}\otimes \mathrm{cl}_{Y_s^{(k)}}(Y_s^{(k)})]\cup\\ [e_1^{(k)}\otimes e_{-1}^{(k)} + e_2^{(k)}\otimes e_{-2}^{(k)} + e_3^{(k)}\otimes e_{-3}^{(k)} - e_{-3}^{(k)}\otimes e_3^{(k)} - e_{-2}^{(k)}\otimes e_2^{(k)} - e_{-1}^{(k)}\otimes e_1^{(k)}]) =\\ \mathrm{pr}_{2s*}^{(k)}([-\mathrm{cl}_{Y_s^{(k)}}(p)\otimes e_j^{(k)}]) = -e_j^{(k)}; \qquad (3.28)\\ [\wp(H^1(Y_s^{(k)},\mathbb{Q}))]^{\cup 2} = -6\,\mathrm{cl}_{Y_s^{(k)}}(p)\otimes \mathrm{cl}_{Y_s^{(k)}}(p). \qquad (3.29)\end{gathered}$$

Прежде всего, алгебраическое соответствие

$$\begin{gathered}\omega_s^{\cup 2} = -6\,\mathrm{cl}_{Y_s^{(1)}}(p)\otimes \mathrm{cl}_{Y_s^{(1)}}(p) - 6\,\mathrm{cl}_{Y_s^{(2)}}(p)\otimes \mathrm{cl}_{Y_s^{(2)}}(p) - 6\,\mathrm{cl}_{Y_s^{(3)}}(p)\otimes \mathrm{cl}_{Y_s^{(3)}}(p)\\ -2e_1^{(1)}\cup e_1^{(2)}\otimes e_{-1}^{(1)}\cup e_{-1}^{(2)} - \cdots + 2e_1^{(1)}\cup e_{-3}^{(2)}\otimes e_{-1}^{(1)}\cup e_3^{(2)} + \cdots - 2e_{-1}^{(2)}\cup e_{-1}^{(3)}\otimes e_1^{(2)}\cup e_1^{(3)}\end{gathered}$$

индуцирует канонический изоморфизм

$$H^2(Y_s^{(1)},\mathbb{Q})\otimes H^2(Y_s^{(2)},\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^2(Y_s^{(3)},\mathbb{Q}). \qquad (3.30)$$

Действительно, в силу (3.26) - (3.29), $\mathbb{Q}$-пространство $H^2(Y_s^{(1)},\mathbb{Q})\otimes H^2(Y_s^{(2)},\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}\ e_1^{(1)}\cup e_{-1}^{(1)}\otimes e_1^{(2)}\cup e_{-1}^{(2)}$ аннулируется (относительно $\cup$-произведения) всеми слагаемыми в $\omega_s^{\cup 2}$, кроме $-6\,\mathrm{cl}_{Y_s^{(3)}}(p)\otimes \mathrm{cl}_{Y_s^{(3)}}(p)$; с другой стороны, обозначая через $\mathrm{pr}_{2s}: V_s\times V_s\to V_s$ каноническую проекцию, мы видим, что $\mathrm{cl}_{Y_s^{(3)}}(p)\otimes \mathrm{cl}_{Y_s^{(3)}}(p)$ определяет изоморфизм (3.30), потому что

$$\begin{gathered}\mathrm{pr}_{2s*}([H^2(Y_s^{(1)},\mathbb{Q})\otimes H^2(Y_s^{(2)},\mathbb{Q})\otimes \mathrm{cl}_{V_s}(V_s)]\cup \omega_s^{\cup 2}) =\\ \mathrm{pr}_{2s*}(\mathbb{Q}\ [\mathrm{cl}_{Y_s^{(1)}}(p)\cup \mathrm{cl}_{Y_s^{(2)}}(p)\cup \mathrm{cl}_{Y_s^{(3)}}(p)]\otimes \mathrm{cl}_{Y_s^{(3)}}(p)) =\\ \mathrm{pr}_{2s*}(\mathbb{Q}\ \ \mathrm{cl}_{V_s}(p\times p\times p)\otimes \mathrm{cl}_{Y_s^{(3)}}(p)) = \mathbb{Q}\ \ \mathrm{cl}_{Y_s^{(3)}}(p) = H^2(Y_s^{(3)},\mathbb{Q}).\end{gathered}$$

Наконец, пусть

$$[\omega_s^{\cup 2}]_{\hat{3}} = [\wp(H^1(Y_s^{(1)},\mathbb{Q}))]^{\cup 2} + 2\ \wp(H^1(Y_s^{(1)},\mathbb{Q}))\cup \wp(H^1(Y_s^{(2)},\mathbb{Q})) + [\wp(H^1(Y_s^{(2)},\mathbb{Q}))]^{\cup 2}$$

– сумма всех слагаемых в $\omega_s^{\cup 2}$, не содержащих множителей типа $e_j^{(3)}$. Поскольку $e_j^{(3)}$ аннулирует $H^2(Y_s^{(3)},\mathbb{Q})$, то из (3.28) можно вывести, что $[\omega_s^{\cup 2}]_{\hat{3}}$ и $\omega_s^{\cup 2}$ индуцируют алгебраический изоморфизм

$$H^1(Y_s^{(1)},\mathbb{Q})\otimes H^1(Y_s^{(2)},\mathbb{Q})\otimes H^2(Y_s^{(3)},\mathbb{Q})\xrightarrow{\sim} H^1(Y_s^{(1)},\mathbb{Q})\otimes H^1(Y_s^{(2)},\mathbb{Q}).$$

Остается применить формулу Кюннета. Лемма доказана.

**3.4. Теорема.** *Пусть $\tau : Y \to C$ – морфизм (с сечением) гладкой проективной поверхности $Y$ на гладкую кривую $C$. Предположим, что общий слой является гладкой кривой рода 3 и все особые слои являются объединениями рациональных кривых кратности 1 с нормальными пересечениями.*

*Если существует хотя бы один особый слой морфизма $\tau$ и $\mathrm{End}(\mathrm{Pic}^0(Y_{\overline{\eta}}))=\mathbb{Z}$ для общего геометрического слоя $Y_{\overline{\eta}}$ морфизма $\tau$, то стандартная гипотеза $B(X)$ типа Лефшеца верна для компактификации $X$ полуабелевой схемы $\mathrm{Pic}^0(Y/C)\to C$.*

*Доказательство.* Используя (если необходимо) моноидальное преобразование $\widetilde{Y}\to Y$ поверхности $Y$ вдоль множества всех особых точек неприводимых компонент особых слоев $Y_\delta$ $(\delta\in\Delta)$, можно считать, что все особые слои $Y_\delta$ – объединения *гладких* рациональных кривых кратности 1 с нормальными пересечениями. Действительно, поскольку $B(S)$ верна для гладких проективных кривых и поверхностей, то для любого гладкого проективного четырехмерного многообразия $\widetilde{X}$, бирационально изоморфного $X$, гипотезы $B(\widetilde{X})$ и $B(X)$ эквивалентны в силу результатов Хиронаки ([19], [26]), теоремы 1.6 в [7] и совместимости стандартной гипотезы типа Лефшеца с моноидальными преобразованиями [27, теорема 4.3].

Очевидно, что класс когомологий $\mathrm{cl}_{V\times V}(\Delta_V)\in H^8(V\times V,\mathbb{Q})$ диагонали определяет алгебраический изоморфизм $H^4(V,\mathbb{Q})\xrightarrow{\sim} H^4(V,\mathbb{Q})$. В частности, $B^4(V)$ верна [4, 1.8].

По лемме 3.3, для любой точки $s\in C'$ имеются канонические изоморфизмы

$$H^4(V_s,\mathbb{Q})\xrightarrow[\sim]{\mathrm{pr}_{1s}^*}H^4(V_s,\mathbb{Q})\otimes H^0(V_s,\mathbb{Q})\xrightarrow[\sim]{x\mapsto x\,\cup\,\omega_s^{\cup 2}}$$
$$H^6(V_s,\mathbb{Q})\otimes H^2(V_s,\mathbb{Q})\xrightarrow[\sim]{\mathrm{pr}_{2s*}}H^2(V_s,\mathbb{Q}).$$

Семейство $(\omega_s)_{s\in C'}$ дает канонически определенный элемент $\omega'\in H^0(C',R^1\mu'_*\mathbb{Q}\otimes R^1\mu'_*\mathbb{Q})\hookrightarrow H^0(C',R^2(\mu'\times_{C'}\mu')_*\mathbb{Q})$ типа Ходжа $(1,1)$, который в свою очередь определяет композицию изоморфизмов

$$R^4\mu'_*\mathbb{Q}\xrightarrow[\sim]{p_1'^*}R^4\mu'_*\mathbb{Q}\otimes R^0\mu'_*\mathbb{Q}\xrightarrow[\sim]{x\mapsto x\cup[\omega']^2}R^6\mu'_*\mathbb{Q}\otimes R^2\mu'_*\mathbb{Q}\xrightarrow[\sim]{p'_{2*}}R^2\mu'_*\mathbb{Q}, \tag{3.31}$$

где $p'_i : V'\times_{C'}V'\to V'$ – каноническая проекция.

Имеется такое разрешение $\sigma:[V\times_C V]^{\mathrm{smooth}}\to V\times_C V$ особенностей подмногообразия $\iota: V\times_C V\hookrightarrow V\times V$, что любой геометрический слой $[V\times_C V]^{\mathrm{smooth}}_{\delta}$ $(\delta\in\Delta)$ является объединением (с некоторыми положительными кратностями) гладких неприводимых компонент с нормальными пересечениями и $\sigma$ – изоморфизм над $C'$. По теореме Делиня каноническое отображение $H^2([V\times_C V]^{\mathrm{smooth}},\mathbb{Q})\to H^0(C',R^2(\mu'\times_{C'}\mu')_*\mathbb{Q})$ является сюръективным морфизмом $\mathbb{Q}$-структур Ходжа [8, теорема 4.1.1, доказательство следствия 4.1.2]. В частности, существует дивизор $\mathcal{D}_{\omega'}$ на $[V\times_C V]^{\mathrm{smooth}}$ (с коэффициентами из $\mathbb{Q}$), индуцирующий $\omega'$.

Используя алгоритм доказательства теоремы 1.5, можно легко вывести из (3.31), что алгебраический класс $(\iota\sigma)_*\,\mathrm{cl}_{[V\times_C V]^{\mathrm{smooth}}}(\mathcal{D}_{\omega'})^{\cup 2}\in H^6_{\mathrm{alg}}(V\times V,\mathbb{Q})$ определяет алгебраический изоморфизм

$$H^1(C,R^4\mu_*\mathbb{Q})\xrightarrow{\sim} H^1(C,R^2\mu_*\mathbb{Q}).$$

По лемме 3.2 алгебраический класс $(\iota\sigma)_*\,\mathrm{cl}_{[V\times_C V]^{\mathrm{smooth}}}(\mathcal{D}_{\omega'})^{\cup 2}$ определяет алгебраический изоморфизм $H^5(V,\mathbb{Q})\xrightarrow{\sim} H^3(V,\mathbb{Q})$. Следовательно, $B^3(V)$ верна [4, 1.8].

Легко вывести из (3.26), (3.28) - (3.29) и формулы Кюннета, что для любой точки $s \in C'$ имеются канонические изоморфизмы

$$H^5(V_s,\mathbb{Q})\xrightarrow[\sim]{\mathrm{pr}_{1s}^*}H^5(V_s,\mathbb{Q})\otimes H^0(V_s,\mathbb{Q})\xrightarrow[\sim]{x\mapsto x\cup\omega_s}$$
$$H^6(V_s,\mathbb{Q})\otimes H^1(V_s,\mathbb{Q})\xrightarrow[\sim]{\mathrm{pr}_{2s*}}H^1(V_s,\mathbb{Q}).$$

Следовательно, имеются изоморфизмы

$$R^5\mu'_*\mathbb{Q}\xrightarrow[\sim]{p_1'^*}R^5\mu'_*\mathbb{Q}\otimes R^0\mu'_*\mathbb{Q}\xrightarrow[\sim]{x\mapsto x\cup\omega'}R^6\mu'_*\mathbb{Q}\otimes R^1\mu'_*\mathbb{Q}\xrightarrow[\sim]{p'_{2*}}R^1\mu'_*\mathbb{Q}. \tag{3.32}$$

Используя алгоритм доказательства теоремы 1.5, легко вывести из (3.32), что алгебраический класс $(\iota\sigma)_*\,\mathrm{cl}_{[V\times_C V]^{\mathrm{smooth}}}(\mathcal{D}_{\omega'})\in H^4_{\mathrm{alg}}(V\times V,\mathbb{Q})$ определяет алгебраический изоморфизм

$$H^1(C,R^5\mu_*\mathbb{Q})\xrightarrow{\sim} H^1(C,R^1\mu_*\mathbb{Q}). \tag{3.33}$$

Имеется точная последовательность смешанных $\mathbb{Q}$-структур Ходжа [22, следствие (8.2.8)]

$$H^0(Z,\mathbb{Q}(-1))\xrightarrow{(i_\Delta f)_*}H^2(V,\mathbb{Q})\to H^2(V',\mathbb{Q}).$$

Поэтому

$$\mathrm{Ker}\left[H^2(V,\mathbb{Q})\to H^2(V',\mathbb{Q})\right]\quad\text{является } \mathbb{Q}-\text{структурой Ходжа типа } (1,1). \tag{3.34}$$

Канонический сюръективный морфизм $\mathbb{Q}$-структур Ходжа $H^2(V,\mathbb{Q})\to H^0(C',R^2\mu'_*\mathbb{Q})$ [8, теорема 4.1.1] является частью коммутативной диаграммы (с точными столбцами и строками) морфизмов смешанных $\mathbb{Q}$-структур Ходжа [8, следствие 3.2.18, доказательство теоремы 4.1.1]

$$\begin{array}{ccccc}
H^2(V,\mathbb{Q}) & \to & H^2(V',\mathbb{Q}) & & \\
\downarrow & \searrow & \downarrow & & \\
H^0(C,R^2\mu_*\mathbb{Q}) & \to & H^0(C',R^2\mu'_*\mathbb{Q}) & \to & 0\\
\downarrow & & \downarrow & & \\
0 & & 0. & &
\end{array}$$

Поляризация позволяет отождествить $H^0(C',R^2\mu'_*\mathbb{Q})$ с $\mathbb{Q}$-подструктурой Ходжа $H^0(C,R^2\mu_*\mathbb{Q})\hookrightarrow H^2(V,\mathbb{Q})$. Следовательно, существует коммутативная диаграмма (с точными строками) канонических морфизмов смешанных $\mathbb{Q}$-структур Ходжа

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Ker}\,[H^2(V,\mathbb{Q})\to H^2(V',\mathbb{Q})] & \to & H^2(V,\mathbb{Q}) & \to & H^2(V',\mathbb{Q})\\
\bigcup & & \bigcup & & \bigcup\\
K & \to & H^0(C,R^2\mu_*\mathbb{Q}) & \rightleftarrows & H^0(C',R^2\mu'_*\mathbb{Q})\to 0,
\end{array} \tag{3.35}$$

где $K=\mathrm{Ker}\,[H^0(C,R^2\mu_*\mathbb{Q})\to H^0(C',R^2\mu'_*\mathbb{Q})]$.

Мы утверждаем, что

$$H^0(C',R^2\mu'_*\mathbb{Q})\quad\text{является } \mathbb{Q}-\text{структурой Ходжа типа } (1,1). \tag{3.36}$$

Действительно, $H^0(C',R^2\mu'_*\mathbb{Q})=H^2(V'_s,\mathbb{Q})^{\pi_1(C',s)}$ для точки $s\in C'$. Поскольку

$$H^2(V'_s, \mathbb{Q})^{\pi_1(C',s)} = H^2(Y'_s \times Y'_s \times Y'_s, \mathbb{Q})^{\pi_1(C',s)},$$

то остается применить формулу Кюннета и (2.10).

С другой стороны, формула Кюннета дает

$$\dim H^0(C', R^2\mu'_*\mathbb{Q}) \geq 3. \tag{3.37}$$

Из (3.34) – (3.37) следует, что

$$H^0(C, R^2\mu_*\mathbb{Q}) \quad \text{является } \mathbb{Q}-\text{структурой Ходжа типа } (1,1); \tag{3.38}$$

$$\dim H^0(C, R^2\mu_*\mathbb{Q}) \geq 3. \tag{3.39}$$

Следовательно (3.33), (3.37) - (3.39), и алгоритм, описанный в пунктах 2.1 – 2.10, позволяют построить алгебраический изоморфизм $H^6(V, \mathbb{Q}) \widetilde{\to} H^2(V, \mathbb{Q})$. В частности, $B^2(V)$ верна. Поскольку $B^0(V)$ тривиально выполняется и $B^1(V)$ хорошо известна [4, следствие 1.10], то мы видим, что $B(V)$ верна в силу предложения 2.3 в [3].

Пусть $e : C \to Y$ – сечение морфизма $\tau : Y \to C$. Хорошо известно, что существует доминантное рациональное отображение $V - \to X$, индуцирующее сюръективный морфизм

$$\begin{gathered} Y_s \times Y_s \times Y_s \to \mathrm{Pic}^0(Y_s) = X_s \\ y_s^{(1)} \times y_s^{(2)} \times y_s^{(3)} \mapsto \mathcal{O}_{Y_s}(y_s^{(1)} + y_s^{(2)} + y_s^{(3)} - 3e(s)) \end{gathered}$$

для любой точки $s \in C'$. Поскольку $B(S)$ верна для гладких проективных кривых и поверхностей, то мы видим, что $B(X)$ следует из $B(V)$, из существования разрешения неопределенностей рационального отображения $V - \to X$ по Хиронаке ([19], [26]), теоремы 1.6 в [7] и совместимости стандартной гипотезы типа Лефшеца с моноидальными преобразованиями ([27, теорема 4.3]. Теорема доказана.

## Список литературы


[1] *Grothendieck A.* Standard conjectures on algebraic cycles // Algebr. Geom., Oxford Univ. Press, London, 1969. P. 193-199.

[2] *Чжэнь Шэн-шэнь.* Комплексные многообразия. М.: Изд-во иностр. лит., 1961.

[3] *Kleiman S.L.* Algebraic cycles and the Weil conjectures // Dix exposés sur la cohomologie des schémas. Amsterdam: North-Holland, 1968. P. 359-386.

[4] *Танкеев С.Г.* О стандартной гипотезе типа Лефшеца для комплексных проективных трехмерных многообразий // Изв. РАН. Сер. матем. (в печати).

[5] *Faltings G. and Chai Ch.-L.* Degeneration of Abelian varieties. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), vol. 22. Berlin: Springer-Verlag, 1990.

[6] *Deligne P.* Théorème de Lefschetz et critères de dégénérescence des suites spectrales // Publ. Math. IHES. 1968. V. 35. P. 259-278.

[7] *Танкеев С.Г.* О стандартной гипотезе для комплексных абелевых схем над гладкими проективными кривыми // Изв. РАН. Сер. матем. 2003. Т. 67. N 3. С. 183-224.

[8] *Делинь П.* Теория Ходжа. II // Математика (сб. перев.). 1973. Т. 17. N 5. С. 3-56.

[9] *Zucker S.* Hodge theory with degenerating coefficients : $L_2$ cohomology in the Poincaré metric // Ann. Math. 1979. V. 109. P. 415-476.

[10] *Годеман Р.* Алгебраическая топология и теория пучков. М.: Изд-во иностр. лит., 1961.

[11] *Deligne P.* La conjecture de Weil. I // Publ. Math. IHES. 1974. V. 43. P. 273-307.

[12] *Хирцебрух Ф.* Топологические методы в алгебраической геометрии. М.: Мир, 1973.

[13] *Borel A., Haefliger A.* La classe d'homologie fondamentale d'un espace analytique // Bull. Soc. math. France. 1961. V. 89. P. 461-513.

[14] *Милн Дж.* Этальные когомологии. М.: Мир, 1983.

[15] *Bredon G.* Sheaf theory. New York: McGraw-Hill, 1967.

[16] *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. М.: Мир, 1976. Гл. 1-3; 1972. Гл. 4-6; 1978. Гл. 7-8.

[17] *Делинь П. и Мамфорд Д.* Неприводимость многообразия кривых заданного рода // Математика (сб. перев.). 1972. Т. 16. N 3. С. 13-53.

[18] *Гриффитс Ф., Харрис Дж.* Принципы алгебраической геометрии. М.: Мир, 1982.

[19] *Hironaka H.* Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero: I, II // Ann. Math. (2). 1964. V. 79. P. 109-326.

[20] *Манин Ю.И.* Лекции о $K$-функторе в алгебраической геометрии // УМН. 1969. Т. 24. N 5. С. 3-86.

[21] *Lewis J.D.* A survey of the Hodge conjecture. 2nd ed., CRM Monograph Series. V. 10. Montréal: CRM, 1999.

[22] *Deligne P.* Théorie de Hodge. III // Publ. Math. IHES. 1974. V. 44. P. 5-77.

[23] *Танкеев С.Г.* Циклы на простых абелевых многообразиях простой размерности // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1982. Т. 46. N 1. С. 155-170.

[24] *Зархин Ю.Г.* Веса простых алгебр Ли в когомологиях алгебраических многообразий // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1984. Т. 48. N 2. С. 264-304.

[25] *Танкеев С.Г.* Алгебраические циклы на абелевом многообразии без комплексного умножения // Изв. РАН СССР. Сер. матем. 1994. Т. 58. N 3. С. 103-126.

[26] *Bierstone E. and Milman P.D.* Canonical desingularization in characteristic zero by blowing up the maximum strata of a local invariant // Invent. math. 1997. V. 128. P. 207-302.

[27] *Танкеев С.Г.* Моноидальные преобразования и гипотезы об алгебраических циклах // Изв. РАН. Сер. матем. 2007. Т. 71. N 3. С. 197-224.

Владимирский государственный университет
*E-mail address*: `tankeev@vpti.vladimir.ru`