Бирациональные отображения и специальные лагранжевы слоения

Н.А. Тюрин*

Алгебраические многообразия занимают исключительно важное место не только в математике, но и в теоретической физике. В то время как для алгебраической геометрии исследование алгебраических многообразий является главной задачей, эти же многообразия могут выступать в качестве базовых в физических теориях, как классических так и квантовых. До недавнего времени "классический" и "квантовый" подходы в геометрии многообразий были предметно разделены — первый возникал в рамках симплектической геометрии и прилагался к симплектическим или пуассоновым многообразиям, а второй в рамках комплексной геометрии. Однако алгебраическое многообразие обладает двумя сущностями — оно может рассматриваться и как симплектическое, и как комплексное многообразие. И обе эти сущности оказываются важными характеризующими.

Для классификации алгебраических многообразий могут быть рассмотрены производные объекты, вытекающие как из комплексной геометрии алгебраического многообразия (такие, как многообразия модулей стабильных расслоений или производные категории когерентных пучков), так и из симплектической (инварианты Громова – Виттена, категории Фукаи – Флоера). Квинтессенцией такой дихотомии явилась гипотеза Зеркальной Симметрии, утверждающая двойственность этих сущностей. Согласно этой гипотезе, у каждого алгебраического многообразия существует зеркальный партнер, такой что комплексная геометрия первого эквивалентна симплектической геометрии второго и наоборот. Именно в таком наиобщем виде Зеркальная Симметрия была представлена Ю.И. Маниным.

*ЛТФ им.Н.Н. Боголюбова ОИЯИ (Дубна) и МГУ ПС, e-mail: ntyurin@theor.jinr.ru

Исходным первым и наиболее изученным и популярным случаем является случай терхмерных многообразий Калаби – Яу. Имеется несколько подходов, приводящих к разумным ответам в конкретных случаях, главным из которых остается торический, для которого Батыревым была предложена конструкция зеркального партнера, а Стромингером, Яу и Засловым были представлены вычисления, покрывающие физическую составляющую. Однако с той же физической точки зрения общий случай Калаби – Яу оказывается очень трудным — для построения общей теории необходимо абстрактное суммирование по всем топологическим типам трехмерных многообразий Калаби – Яу, но до сих пор неизвестно, является ли это множество конечным. На сегодняшний день этот вопрос является открытым и наиболее часто задаваемым физиками алгебраическим геометрам. Возможно поэтому интерес физиков распространился дальше, на следующий более общий случай алгебраических многообразий — случай многообразий Фано.

Многообразия Фано были, есть и будут главной темой научной жизни замечательного русского математика Василия Алексеевича Исковских, открывшего этот класс многообразий и представившего классификацию основной серии таких многообразий (в частности, из классификации вытекает конечность типов, что очень важно для физики). Благодаря работам школы В. А. Исковских алгебро - геометрическая часть Зеркальной Симметрии для многообразий Фано "готова к употреблению", и дело за симплектической стороной, остающейся на сегодня областью белых пятен с малыми вкраплениями результатов, полученных по большей части для торических многообразий Фано. Спектр идей, развиваемых применительно к симплектической и лагранжевой геометриям многообразий Фано, был недавно дополнен Д. Уру, [1], перенесшим на случай многообразий Фано понятия специального лагранжева слоения, играющего центральную роль в Зеркальной Симметрии многообразий Калаби – Яу. Для многообразия Фано X выбирается произвольный элемент из антиканонической линейной системы $D \in |K_X^{-1}|$ и ищется лагранжево слоение $X - D \to B$, обладающее специальным свойством относительно старшей голоморфной формы с полюсом на D. Модули плоских абелевых связностей над слоями такого специального лагранжева слоения доставляют зеркального партнера для исходного многообразия X. Конструкция не должна зависеть от выбора элемента в антиканонической системе, из чего проистекает гипотеза о существовании специальных лагранжевых слоений для всех элементов антиканонической системы. В [1] представ-

лен пример специального лагранжева слоения на $\mathbb{CP}^2$ относительно антиканонического дивизора $D = Q_2 \cup l$ (коника и прямая) с одним вырожденным слоем (этот пример очень важен и с точки зрения изучения лагранжевой геометрии проективной плоскости).

Таким образом, встает задача построения специальных лагранжевых слоений многообразия Фано с вырождениями на элементе антиканонического класса. Пример, построенный Уру, показывает, насколько эффективна алгебраическая геометрия в решении задач геометрии лагранжевой. Ниже мы приводим простой пример, в котором бирациональное отображение переводит специальное лагранжево слоение в специальное лагранжево слоение. То есть в дальнейшем можно пытаться строить специальные лагранжевы слоения многообразий Фано, используя старое испытанное оружие алгебраической геометрии.

Рассмотрим квадрику $Q \subset \mathbb{CP}^3$, выберем произвольную точку $p \subset Q$ и плоскость $\pi \subset \mathbb{CP}^3$. Спроектируем квадрику Q на π из точки p, получив бирациональное отображение $\phi : Q \to \pi$ (см, напр., [GH]). На Q можно построить специальное лагранжево слоение следующим образом: так как $Q = \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$, то выберем специальные лагранжевы слоения проективных прямых так, чтобы p была вершиной регулярного вырождения. Тогда конфигурация вырождения этого слоения на Q будет состоять из четырех прямых $\{l_i^{\pm}, i = 1, 2\}$, по две из каждого семейства, две из которых, скажем, $l_1^{\pm}$, сходятся в p. Таким образом, дополнение $Q - \{l_i^{\pm}\}$ расслоено на лагранжевы торы, специальные по Уру. На проективной плоскости π имеется выделенная пара точек $a_{\pm} = l_1^{\pm} \cap \pi \subset \mathbb{CP}^3$, и проходящая через них прямая $l_a \subset \pi$ в общей своей точке не имеет прообраза в Q относительно ϕ. Образами прямых $l_2^{\pm}$ будут прямые $l^{\pm} \subset \pi$. Дополнение $\pi - \{l_a, l^{\pm}\}$ расслоено на гладкие торы, поскольку $\phi' : Q - \{l_i^{\pm}\} \to \pi - \{l_a, l^{\pm}$ является изоморфизмом. Нетрудно видеть, что эти торы *лагражевы* . Более того, эти торы *специальные лагранжевы* относительно элемента из антиканонической системы $D = l_a + l^+ + l^-$. Конечно, это просто стандартное клиффордово слоение.

Однако с помощью отображения ϕ можно построить и новое лагранжево слоение на квадрике Q. А именно, рассмотрим специальное лагранжево слоение, построенное в [1], так чтобы дивизор вырождения на π состоял бы из прямой l_a и коники, являющейся пересечением $Q \cap \pi$ и проходящей через точки $a_{\pm}$. Тогда нетрудно видеть, что специальное лагранжево слоение Уру допускает подъем до лагранжева слоения на квадрике Q с антиканоническим дивизором $D = Q \cap \pi + l_+ + l_-$. Как и

исходное слоение, оно будет специальным лагранжевым на Q.

References

[1] D. Auroux, "Mirror symmetry and T - duality in the complement of an anticanonical divisor", J. Gokova Geom. Topol. 1 (2007), pp. 51 - 91; arXiv: 0706.3207.

[2] P. Griffits, J. Harris, "Principles of algebraic geometry", NY Wiley 1978.