ПРОИЗВОДНЫЕ КАТЕГОРИИ КОГЕРЕНТНЫХ ПУЧКОВ НА АБЕЛЕВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ И ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ МЕЖДУ НИМИ

ДМИТРИЙ ОРЛОВ

Введение.

С любым алгебраическим многообразием X можно связать абелеву категорию $coh(X)$ когерентных пучков на нем. Морфизмы между многообразиями индуцируют функторы обратного образа между абелевыми категориями когерентых пучков. Если, кроме того, морфизм собственный, то можно определить и функтор прямого образа. Эти функторы не являются точными и имеют соответственно левые и правые производные функторы. Для того, чтобы учитывать все производные функторы необходимо перейти от абелевых категорий к производным категориям от них. Например с любым гладким проективным многообразием мы можем связать так называемую ограниченную производную категорию когерентных пучков $D^b(X)$, а с любым морфизмом между такими многообразиями можно связать производные функторы прямого и обратного образа между производными категориями когерентных пучков.

Вопрос, который возникает при переходе от многообразий к производным категориям когерентных пучков, - это как много информации мы теряем. На самом деле, как выясняется, этот переход сохраняет почти всю информацию. Например в некоторых случаях мы можем востановить многообразие по производной категории (см [2], или Теорему 1.2 этой статьи). Тем не менее для некоторых типов многообразий находятся примеры, когда два разных многообразия имеют эквивалентные производные категории когерентных пучков.

В данной статье исследуется случай абелевых многообразий.

Пусть A – абелево многообразие и $\widehat{A}$ – двойственное абелево многообразие. В работе [9] было доказано, что производные категории когерентных пучков $D^b(A)$ и $D^b(\widehat{A})$ эквивалентны, и эквивалентность, которая называется преобразованием Фурье-Мукаи, может быть задана с помощью линейного расслоения Пуанкаре P_A на произведении $A\times\widehat{A}$ по следующему правилу

$$F\mapsto \mathbf{R}^{\cdot} p_{2*}(P_A\otimes p_1^*(F)).$$

Эта конструкция Мукаи была обобщена в статье [13] следующим образом.

Рассмотрим два абелевых многообразия A и B , и изоморфизм f между абелевыми многообразиями $A\times\widehat{A}$ и $B\times\widehat{B}$. Запишем f в матричном виде

$$\begin{pmatrix} x & y\\ z & w\end{pmatrix},$$

Работа выполнена при частичной поддержке гранта RFFI 99-01-01144, гранта поддержки Ведущих Научных Школ є 00-15-96085 и гранта INTAS-OPEN-2000-269. Исследования, описанные в данной публикации стали возможны при частичной поддержке гранта є RM1-2089 Американского Фонда Гражданских Исследований и Развития для стран СНГ. .

где x – гомоморфизм из A в B , y – из $\widehat{A}$ в B , и так далее. Мы назовем его изометричным, если обратный к f имеет следующий вид:

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} \widehat{w} & -\widehat{y} \\ -\widehat{z} & \widehat{x} \end{pmatrix}$$

В статье [13] доказывается, что, если для двух абелевых многообразий над алгебраически замкнутым полем A и B существует изометричный изоморфизм между $A \times \widehat{A}$ и $B \times \widehat{B}$, то производные категории когерентных пучков $D^b(A)$ и $D^b(B)$ эквивалентны.

В этой статье мы доказываем равносильность этих условий над алгебраически замкнутым полем характеристики 0 , то есть, производные категории $D^b(A)$ и $D^b(B)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда существует изометричный изоморфизм из $A \times \widehat{A}$ в $B \times \widehat{B}$. На самом деле, в одну сторону это утверждение верно над произвольным полем (Теорема 2.19). Как следствие этой теоремы получаем, что существует только конечное число неизоморфных абелевых многообразий, производные категории которых эквивалентны $D^b(A)$ для заданного абелева многообразия A (Следствие 2.20). Доказательство существенно опирается на утверждение из [12], которое говорит, что любая точная эквивалентность между производными категориями когерентных пучков гладких проективных многообразий может быть представлена объектом на произведении.

Представляя эквивалентности объектами на произведении, мы строим отображение из множества всех точных эквивалентностей между $D^b(A)$ и $D^b(B)$ в множество изометричных изоморфизмов из $A \times \widehat{A}$ в $B \times \widehat{B}$. Далее мы показываем, что это отображение функториально (Предложение 2.15). В частности, получаем гомоморфизм из группы точных автоэквивалентностей категории $D^b(A)$ в группу $U(A \times \widehat{A})$ изометричных автоморфизмов многообразия $A \times \widehat{A}$.

В параграфе 3 мы описываем ядро этого гомоморфизма, которое оказывается изоморфно прямой сумме $\mathbb{Z}$ и группы k-точек многообразия $A \times \widehat{A}$ (Предложение 3.3). Технически это описание опирается на тот факт, что объект на произведении абелевых многообразий, задающий эквивалентность, на самом деле является пучком с точностью до сдвига в производной категории (Предложение 3.2). Это утверждение ни в коем случае не является общим фактом. Оно, к примеру, не верно для K3 поверхностей, но в случае абелевых многообразий дает ключ к описанию группы автоэквивалентностей.

В параграфе 4, в предположении, что основное поле алгебраически замкнуто и $\mathrm{char}(k) = 0$, мы приводим другое доказательство утверждения из [13], основанное на фактах из статьи [10], в которой описываются полуоднородные расслоения на абелевых многообразий. В частности, получаем точную последовательность групп

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus (A \times \widehat{A})_k \longrightarrow Auteq D^b(A) \longrightarrow U(A \times \widehat{A}) \longrightarrow 1.$$

В заключении, мы описываем центральное расширение $U(A \times \widehat{A})$ с помощью $\mathbb{Z}$ и даем формулу для 2-коцикла, который задает это расширение.

Автор признателен Институту Математики имени Макса Планка за гостеприимство и стимулирующую атмосферу.

Эта работа выполнена при частичной поддержке гранта RFFI 99-01-01144 и гранта поддержки Ведущих Научных Школ є 00-15-96085. Исследования, описанные в данной публикации стали возможны при частичной поддержке гранта є RM1-2089 Американского Фонда Гражданских Исследований и Развития для стран СНГ.

1. Предварительные сведения.

Пусть X – алгебраическое многообразие над полем k со структурным пучком $\mathcal{O}_X$. С каждым многообразием связана абелева категория когерентных пучков на нем – $coh(X)$.

Обозначим через $D^b(X)$ ограниченную производную категорию от абелевой категории $coh(X)$. В двух словах, $D^b(X)$ получается из категории ограниченных комплексов когерентных пучков обращением всех квази-изоморфизмов, то есть таких отображений между комплексами, которые индуцируют изоморфизмы на когомологиях (см. например [3]).

Всякая производная категория имеет структуру триангулированной категории. Это значит, что в аддитивной категории $\mathcal{D}$ зафиксированы:

a) аддитивной функтор сдвига $[1] : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$, который является автоэквивалентностью;

b) некоторый класс выделенных треугольников

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1],$$

который должен удовлетворять определенному набору аксиом (см. [15]).

Аддитивный функтор $F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}'$ между двумя триангулированными категориями называется точным, если он перестановочен с функторами сдвига и переводит всякий выделенный треугольник из $\mathcal{D}$ в выделенный треугольник категории $\mathcal{D}'$.

С этого момента мы ограничимся классом гладких проективных многообразий. Любой морфизм $f : X \to Y$ между гладкими проективными многообразиями индуцирует два точных функтора: функтор прямого образа $\mathbf{R}^{\bullet} f_* : D^b(X) \longrightarrow D^b(Y)$ и функтор обратного образа $\mathbf{L}^{\cdot} f^* : D^b(Y) \longrightarrow D^b(X)$. Кроме того, каждый объект $\mathcal{F} \in D^b(X)$ задает точный функтор тензорного умножения $\overset{\mathbf{L}}{\otimes} \mathcal{F} : D^b(X) \longrightarrow D^b(X)$. Используя эти функторы, мы можем ввести большой класс точных функторов между категориями $D^b(X)$ и $D^b(Y)$.

Пусть X и Y – два гладких проективных многообразия над полем k . Рассмотрим декартово произведение $X \times Y$ и обозначим через p и q проекции $X \times Y$ на X и соответственно на Y

$$X \xleftarrow{p} X \times Y \xrightarrow{q} Y.$$

Каждый объект $\mathcal{E} \in D^b(X \times Y)$ задает точный функтор $\Phi_{\mathcal{E}}$ из производной категории $D^b(X)$ в производную категорию $D^b(Y)$, который определяется следующей формулой:

$$\Phi_{\mathcal{E}}(\cdot) := \mathbf{R}^{\cdot} q_*(\mathcal{E} \overset{\mathbf{L}}{\otimes} p^*(\cdot)). \tag{1}$$

Кроме того, с тем же самым объектом $\mathcal{E} \in D^b(X \times Y)$ можно связать еще и другой функтор $\Psi_{\mathcal{E}}$ из производной категории $D^b(Y)$ в производную категорию $D^b(X)$, определенный по правилу аналогичному (1):

$$\Psi_{\mathcal{E}}(\cdot) := \mathbf{R}^{\cdot} p_*(\mathcal{E} \overset{\mathbf{L}}{\otimes} q^*(\cdot)).$$

Легко проверить, что функтор $\Phi_{\mathcal{E}}$ имеет как левый, так и правый сопряженные функторы $\Phi^*_{\mathcal{E}}$ и $\Phi^!_{\mathcal{E}}$ соответственно, которые задаются так:

$$\begin{aligned} \Phi^*_{\mathcal{E}} &\cong \Psi_{\mathcal{E}^{\vee} \otimes q^* \omega_Y [dimY]}, \\ \Phi^!_{\mathcal{E}} &\cong \Psi_{\mathcal{E}^{\vee} \otimes p^* \omega_X [dimX]}. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь ω_X и ω_Y канонические пучки на X и Y , и $\mathcal{E}^{\vee}$ – удобное обозначение для $\mathbf{R}^{\cdot} \underline{\mathcal{H}om}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{X \times Y})$.

Пусть теперь X, Y, Z – три гладких проективных многообразия, и $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$ – объекты производных категорий $D^b(X \times Y)$, $D^b(Y \times Z)$ и $D^b(X \times Z)$ соответственно. Рассмотрим следующую диаграмму проекций:

$$\begin{tikzcd}
 & X \times Y \times Z \arrow[dl, "p_{12}"'] \arrow[d, "p_{13}"] \arrow[dr, "p_{23}"] & \\
X \times Y \arrow[d, "\pi_{12}^1"'] \arrow[dr, "\pi_{12}^2"] & X \times Z \arrow[dl, "\pi_{13}^1"'] \arrow[dr, "\pi_{13}^3"] & Y \times Z \arrow[dl, "\pi_{23}^2"'] \arrow[d, "\pi_{23}^3"] \\
X & Y & Z
\end{tikzcd}$$

Объекты $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$ задают три функтора:

$$\begin{aligned}
\Phi_{\mathcal{E}} :& \quad D^b(X) \longrightarrow D^b(Y), \\
\Phi_{\mathcal{F}} :& \quad D^b(Y) \longrightarrow D^b(Z), \\
\Phi_{\mathcal{G}} :& \quad D^b(X) \longrightarrow D^b(Z),
\end{aligned}$$

определенные формулой (1), т.е.

$$\begin{aligned}
\Phi_{\mathcal{E}} &:= \mathbf{R}^{\cdot}\pi_{12*}^2(\mathcal{E} \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \pi_{12}^{1\,*}(\cdot)), \\
\Phi_{\mathcal{F}} &:= \mathbf{R}^{\cdot}\pi_{23*}^3(\mathcal{F} \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \pi_{23}^{2\,*}(\cdot)), \\
\Phi_{\mathcal{G}} &:= \mathbf{R}^{\cdot}\pi_{13*}^3(\mathcal{G} \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \pi_{13}^{1\,*}(\cdot)).
\end{aligned}$$

Рассмотрим объект $p_{12}{}^*\mathcal{E} \otimes p_{23}{}^*\mathcal{F} \in D^b(X \times Y \times Z)$, который далее мы всегда будем обозначать $\mathcal{E} \underset{Y}{\boxtimes} \mathcal{F}$. Следующее утверждение из [9] дает правило для композиции тех точных функторов между производными категориями, которые представлены объектами на произведении.

Предложение 1.1. *Композиция функторов* $\Phi_{\mathcal{F}} \circ \Phi_{\mathcal{E}}$ *изоморфна функтору* $\Phi_{\mathcal{G}}$, *представленному объектом*

$$\mathcal{G} = \mathbf{R}^{\cdot}p_{13*}(\mathcal{E} \underset{Y}{\boxtimes} \mathcal{F}). \tag{3}$$

Таким образом, каждому гладкому проективному многообразию мы сопоставили производную категорию когерентных пучков на нем, а с каждым объектом $\mathcal{E} \in D^b(X \times Y)$ на произведении двух таких многообразий мы связали точный функтор $\Phi_{\mathcal{E}}$ из триангулированной категории $D^b(X)$ в триангулированную категорию $D^b(Y)$ с законом композиции, описанным выше.

Следующие два вопроса являются фундаментальными для понимания данного соответствия:

- Когда производные категории когерентных пучков двух разных гладких проективных многообразий эквивалентны как триангулированные категории?
- Какова группа точных автоэквивалентностей производной категории когерентных пучков для данного фиксированного многообразия X ?

Некоторые результаты в этом направлении уже известны. К примеру, мы можем дать исчерпывающий ответ на данные вопросы в случае, когда канонический или антиканонический пучок многообразия обилен.

Теорема 1.2. [2] *Пусть* X *– гладкое проективное многообразие, канонический (или антиканонический) пучок которого обилен. Предположим, что категория* $D^b(X)$ *эквивалентна как триангулированная категория производной категории* $D^b(X')$ *для некоторого гладкого алгебраического многообразия* X'. *Тогда многообразие* X' *изоморфно* X .

Теорема 1.3. [2] *Пусть* X *– гладкое проективное многообразие, канонический (или антиканонический) пучок которого обилен. Тогда группа классов изоморфизмов точных автоэквивалентностей категории* $D^b(X)$ *порождена автоморфизмами многообразия, подкрутками на линейные расслоения и сдвигами в производной категории.*

В этой ситуации можно описать и группу точных автоэквивалентностей. Для любого многообразия X группа точных автоэквивалентностей $AuteqD^b(X)$ всегда содержит подгруппу $G(X)$, которая есть полупрямое произведение нормальной подгруппы $G_1 = \mathrm{Pic}(X) \oplus \mathbb{Z}$ и подгруппы $G_2 = AutX$, действующей естественным образом на G_1. При этом включении $G(X) \subset AuteqD^b(X)$ образующая $\mathbb{Z}$ переходит в функтор сдвига [1] , линейное расслоение $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(X)$ – в функтор $\otimes\mathcal{L}$, а автоморфизм $f : X \to X$ индуцирует автоэквивалентность $\mathbf{R}^{\cdot} f_*$.

Теперь мы можем добавить, что при условии, описанном в теореме 1.3, группа точных автоэквивалентностей $AuteqD^b(X)$ совпадает с $G(X)$, т.е. в этом случае:

$$AuteqD^b(X) \cong AutX \ltimes (\mathrm{Pic}(X) \oplus \mathbb{Z}).$$

Чтобы исследовать вопрос, когда два многообразия имеют эквивалентные производные категории когерентных пучков, и описывать их группы автоэквивалентностей, желательно иметь явные формулы для всех точных функторов. Существует гипотеза, что все они представляются объектами на произведении, т.е. имеют вид (1). Эта гипотеза доказана в частном случае, для эквивалентностей.

Теорема 1.4. [12] *Пусть* X *и* Y *– два гладких проективных многообразия. Предположим, что точный функтор* $F : D^b(X) \xrightarrow{\sim} D^b(Y)$ *является эквивалентностью триангулированных категорий. Тогда существует единственный с точностью до изоморфизма объект* $\mathcal{E} \in D^b(X \times Y)$ *такой, что функтор* F *изоморфен функтору* $\Phi_{\mathcal{E}}$.

Чтобы проверить, что функтор F является эквивалентностью, достаточно показать, что он и его правый (или левый) сопряженный вполне строгие. Напомним, что функтор F называется вполне строгим, если для любых двух объектов A и B естественное отображение

$$\mathrm{Hom}(A, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(F(A), F(B))$$

является биекцией.

В дальнейшем нам понадобится некоторый метод для определения того, когда функтор $\Phi_{\mathcal{E}} : D^b(X) \longrightarrow D^b(Y)$ является вполне строгим. В общем случае проверить это довольно трудно, однако в некоторых ситуациях следующий критерий бывает весьма полезен.

Теорема 1.5. [1] *Пусть* M *и* X *– гладкие проективные многообразия над алгебраически замкнутым полем характеристики* 0, *и пусть* $\mathcal{E} \in D^b(M \times X)$. *Тогда функтор* $\Phi_{\mathcal{E}}$ *является* *вполне строгим, если и только если выполняются следующие условия ортогональности:*

$$1)\quad \mathrm{Hom}^i_X(\Phi_{\mathcal{E}}(\mathcal{O}_{t_1})\,,\ \Phi_{\mathcal{E}}(\mathcal{O}_{t_2}))=0 \qquad \textit{для всех } i \ \textit{ и } t_1\neq t_2.$$

$$2)\quad \mathrm{Hom}^0_X(\Phi_{\mathcal{E}}(\mathcal{O}_t)\,,\ \Phi_{\mathcal{E}}(\mathcal{O}_t))=k,$$

$$\mathrm{Hom}^i_X(\Phi_{\mathcal{E}}(\mathcal{O}_t)\,,\ \Phi_{\mathcal{E}}(\mathcal{O}_t))=0, \qquad \textit{для } i\notin[0,dimM].$$

Здесь t , t_1 , t_2 *– точки многообразия* M *и* $\mathcal{O}_{t_i}$ *– соответствующие им пучки небоскребов.*

Пусть теперь имеется четыре гладких проективных многообразия X_1, X_2, Y_1, Y_2 . Рассмотрим два объекта $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$, принадлежащие категориям $D^b(X_1\times Y_1)$ и $D^b(X_2\times Y_2)$ соответственно. Мы можем рассмотреть объект

$$\mathcal{E}_1\boxtimes\mathcal{E}_2\in D^b((X_1\times X_2)\times(Y_1\times Y_2)),$$

который по определению есть $p_{13}^*(\mathcal{E}_1)\otimes p_{24}^*(\mathcal{E}_2)$. Как и раньше (см. (1)), объекты $\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_1\boxtimes\mathcal{E}_2$ задают функторы:

$$\begin{aligned}
&\Phi_{\mathcal{E}_1}: D^b(X_1)\longrightarrow D^b(Y_1),\\
&\Phi_{\mathcal{E}_2}: D^b(X_2)\longrightarrow D^b(Y_2),\\
&\Phi_{\mathcal{E}_1\ \ \mathcal{E}_2}: D^b(X_1\times X_2)\longrightarrow D^b(Y_1\times Y_2).
\end{aligned}$$

Рассмотрим некоторый объект $\mathcal{G}\in D^b(X_1\times X_2)$ и обозначим через $\mathcal{H}$ объект $\Phi_{\mathcal{E}_1\ \ \mathcal{E}_2}(\mathcal{G})\in D^b(Y_1\times Y_2)$. С каждым из этих двух объектов можно связать по правилу (1) функторы

$$\Phi_{\mathcal{G}}: D^b(X_1)\longrightarrow D^b(X_2),\qquad \Phi_{\mathcal{H}}: D^b(Y_1)\longrightarrow D^b(Y_2).$$

Лемма 1.6. *В обозначениях, введенных выше, существует изоморфизм функторов* $\Phi_{\mathcal{H}}\cong\Phi_{\mathcal{E}_2}\circ\Phi_{\mathcal{G}}\circ\Psi_{\mathcal{E}_1}$.

Доказательство. Немедленно следует из Предложения 1.1. □

Если теперь Z_1, Z_2 еще два гладких проективных многообразия и $\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2$ объекты соответственно категорий $D^b(Y_1\times Z_1)$ и $D^b(Y_2\times Z_2)$, то имеются также функторы $\Phi_{\mathcal{F}_1},\Phi_{\mathcal{F}_2},\Phi_{\mathcal{F}_1\ \ \mathcal{F}_2}$. По правилу (3) мы можем найти объекты $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$, принадлежащие категориям $D^b(X_1\times Z_1)$ и $D^b(X_2\times Z_2)$, такие что:

$$\Phi_{\mathcal{G}_1}\cong\Phi_{\mathcal{F}_1}\circ\Phi_{\mathcal{E}_1},\qquad \Phi_{\mathcal{G}_2}\cong\Phi_{\mathcal{F}_2}\circ\Phi_{\mathcal{E}_2}.$$

Прямая проверка показывает, что существует естественное соотношение

$$\Phi_{\mathcal{F}_1\ \ \mathcal{F}_2}\circ\Phi_{\mathcal{E}_1\ \ \mathcal{E}_2}\cong\Phi_{\mathcal{G}_1\ \ \mathcal{G}_2} \tag{4}$$

Используя его, легко доказать следующее утверждение.

Утверждение 1.7. *В условиях, описанных выше, предположим, что функторы* $\Phi_{\mathcal{E}_1}$ *и* $\Phi_{\mathcal{E}_2}$ *являются вполне строгими (эквивалентностями). Тогда функтор*

$$\Phi_{\mathcal{E}_1\ \ \mathcal{E}_2}: D^b(X_1\times X_2)\longrightarrow D^b(Y_1\times Y_2)$$

также является вполне строгим (эквивалентностью).

Доказательство. Если функтор F имеет сопряженный, скажем, слева F^*, то он вполне строгий тогда и толко тогда, когда композиция F^*F изоморфна тождественному функтору. Функторы $\Phi_{\mathcal{E}_i}$ имеют левые сопряженные ${\Phi_{\mathcal{E}_i}}^*$, определенные по формуле (2). Из того, что они вполне строгие следует, что композиции ${\Phi_{\mathcal{E}_i}}^*\Phi_{\mathcal{E}_i}$ изоморфны тождественным функторам, которые представляются структурными пучками диагоналей $\Delta_i \in X_i \times X_i$. Легко проверить, что пучок $\mathcal{O}_{\Delta_1} \boxtimes \mathcal{O}_{\Delta_2}$ изоморфен структурному пучку диагонали $\mathcal{O}_{\Delta}$, где Δ – диагональ в $(X_1 \times X_2) \times (X_1 \times X_2)$. Используя формулу (4), получаем, что композиция ${\Phi_{\mathcal{E}_1 \quad \mathcal{E}_2}}^*\Phi_{\mathcal{E}_1 \quad \mathcal{E}_2}$ представляется структурным пучком диагонали Δ и, значит, изоморфна тождественному функтору. Таким образом, $\Phi_{\mathcal{E}_1 \quad \mathcal{E}_2}$ вполне строгий. Утверждение про эквивалентность доказывается аналогично. □

Предположим сейчас, что функтор $\Phi_{\mathcal{E}} : D^b(X) \longrightarrow D^b(Y)$ является эквивалентностью, и объект $\mathcal{F} \in D^b(X \times Y)$ такой, что $\Psi_{\mathcal{F}} \cong \Phi_{\mathcal{E}}^{-1}$. В этом случае функтор

$$\Phi_{\mathcal{F} \quad \mathcal{E}} : D^b(X \times X) \longrightarrow D^b(Y \times Y) \tag{5}$$

мы будем обозначать как $Ad_{\mathcal{E}}$. Функтор $Ad_{\mathcal{E}}$ также является эквивалентностью по Утверждению 1.7. Кроме того, по Лемме 1.6 для любого объекта $\mathcal{G} \in D^b(X \times X)$ существует изоморфизм функторов:

$$\Phi_{Ad_{\mathcal{E}}(\mathcal{G})} \cong \Phi_{\mathcal{E}} \circ \Phi_{\mathcal{G}} \circ \Phi_{\mathcal{E}}^{-1}. \tag{6}$$

2. Эквивалентности между категории когерентных пучков на абелевых многообразиях.

Пусть A – абелево многообразие размерности n на полем k. Будем обозначать через $m : A \times A \to A$ морфизм композиции, который считается определенным над полем k, и через e – k–точку, которая является единицей групповой структуры.

Обозначим через $\widehat{A}$ двойственное абелево многообразие, которое является многообразием модулей линейных расслоений на A , принадлежащих $\mathrm{Pic}^0(A)$. Более того, $\widehat{A}$ является тонким многообразием модулей. Поэтому на произведении $A \times \widehat{A}$ существует универсальное линейное расслоение P, которое называется расслоением Пуанкаре. Это расслоение определяется однозначно тем, что для любой k–точки $\alpha \in \widehat{A}$ ограничение P на $A \times \{\alpha\}$ изоморфно линейному расслоению из $\mathrm{Pic}^0(A)$, соответствующему α, и в дополнении ограничение $P\Big|_{\{e\}\times\widehat{A}}$ должно быть тривиальным.

Определение 2.1. *Линейное расслоение на A , которое соответствует k-точке $\alpha \in \widehat{A}$, будем обозначать далее P_α.*

Более того, если имеется несколько абелевых многообразий $A_1, ..., A_m$ и k-точка $(\alpha_1, ..., \alpha_m) \in \widehat{A}_1 \times \cdots \times \widehat{A}_m$, тогда будем обозначать через $P_{(\alpha_1,...,\alpha_k)}$ линейное расслоение $P_{\alpha_1} \boxtimes \cdots \boxtimes P_{\alpha_k}$ на произведении $A_1 \times \cdots \times A_k$.

Для любого гомоморфизма абелевых многообразий $f : A \to B$ определен двойственный гомоморфизм $\widehat{f} : \widehat{B} \to \widehat{A}$. Поточечно он устроен так, что точку $\beta \in \widehat{B}$ переводит в точку $\alpha \in \widehat{A}$ тогда и только тогда, когда линейное расслоение f^*P_β совпадает с расслоением P_α на A .

Дважды двойственное абелево многообразие $\widehat{\widehat{A}}$ может быть естественным образом отождествлено с A при помощи расслоений Пуанкаре на $A \times \widehat{A}$ и на $\widehat{A} \times \widehat{\widehat{A}}$. Другими словами, существует единственный изоморфизм $\kappa_A : A \xrightarrow{\sim} \widehat{\widehat{A}}$ такой, что поднятие расслоения Пуанкаре

$P_{\widehat{A}}$ при изоморфизме $1 \times \kappa_A : \widehat{A} \times A \xrightarrow{\sim} \widehat{A} \times \widehat{\widehat{A}}$ совпадает с расслоением Пуанкаре P_A , т.е. $(1 \times \kappa_A)^* P_{\widehat{A}} \cong P_A$.

Таким образом, $\widehat{\ }$ является инволюцией на категории абелевых многообразий, т.е. контравариантным функтором, чей квадрат изоморфен тождественному функтору $\kappa : Id \xrightarrow{\sim} \widehat{\widehat{\ }}$.

Замечание 2.2. ($k = \mathbb{C}$) Пусть A – абелево многообразие над $\mathbb{C}$. Выберем базис $l_1, ..., l_{2n}$ в $H_1(A, \mathbb{Z})$ и двойственный базис $l_1^*, ..., l_{2n}^*$ в $H_1(\widehat{A}, \mathbb{Z}) \cong H_1(A, \mathbb{Z})^*$. Пусть теперь $l_1^{**}, ..., l_{2n}^{**}$ – это базис в $H_1(\widehat{\widehat{A}}, \mathbb{Z})$, двойственный к $l_1^*, ..., l_{2n}^*$. Изоморфизм $\kappa_A : A \xrightarrow{\sim} \widehat{\widehat{A}}$ индуцирует отождествление $H_1(A, \mathbb{Z})$ с $H_1(\widehat{\widehat{A}}, \mathbb{Z})$, при котором элементы l_i переходят в $-l_i^{**}$ (!). Знак минус происходит из-за того, что формы $c_1(P_A)$ и $c_1(P_{\widehat{A}})$ кососимметричны.

Замечание 2.3. ($k = \mathbb{C}$) Пусть $f : A \to B$ – некоторый гомоморфизм комплексных абелевых многообразий, и $\widehat{f} : \widehat{A} \to \widehat{B}$ – двойственный к нему. Зафиксируем базисы в гомологиях $H_1(A, \mathbb{Z})$ и $H_1(B, \mathbb{Z})$, и двойственные к ним базисы в первых гомологиях $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$. Обозначим через F и $\widehat{F}$ матрицы линейных отображений между первыми гомологиями, индуцируемые f и $\widehat{f}$. Тогда матрица $\widehat{F}$ транспонирована к F .

Рассмотрим гомоморфизм $f : A \to \widehat{A}$. Если теперь, используя κ , мы будем считать, что $\widehat{f}$ также является гомоморфизмом из A в $\widehat{A}$, то матрицы F и $\widehat{F}$ будут косотранспонированы друг другу, т.е. $\widehat{F} = -F^t$.

Расслоение Пуанкаре P предоставляет нам пример точной эквивалентности между производными категориями когерентных пучков двух, в общем случае неизоморфных, многообразий A и $\widehat{A}$. Рассмотрим проекции

$$A \xleftarrow{p} A \times \widehat{A} \xrightarrow{q} \widehat{A}$$

и функтор $\Phi_P : D^b(A) \longrightarrow D^b(\widehat{A})$, определенный по формуле (1): $\Phi_P(\cdot) = \mathbf{R}q_*(P \otimes p^*(\cdot))$. Следующее предложение доказано в ([9]).

Предложение 2.4. ([9]) *Пусть P – расслоение Пуанкаре на $A \times \widehat{A}$. Тогда функтор $\Phi_P : D^b(A) \longrightarrow D^b(\widehat{A})$ является точной эквивалентностью, и существует изоморфизм функторов*

$$\Psi_P \circ \Phi_P \cong (-1_A)^*[n],$$

где (-1_A) – отображение взятия обратного.

Замечание 2.5. В статье ([9]) это утверждение доказано для абелевых многообразий над алгебраически замкнутым полем. Однако оно верно и над произвольным полем, т.к. двойственное многообразие и расслоение Пуанкаре определено всегда над тем же самым полем (см. например [11]). А утверждение про эквивалентность будет следовать из Леммы 2.12.

Для любой k-точки $a \in A$ существует автоморфизм сдвига $m(\cdot, a) : A \to A$, который мы будем обозначать T_a , и для k-точки $\alpha \in \widehat{A}$ обозначим через P_α соответствующее линейное расслоение на A .

Рассмотрим теперь k-точку $(a, \alpha) \in A \times \widehat{A}$. С каждой такой точкой можно связать функтор из $D^b(A)$ в себя по правилу:

$$\Phi_{(a,\alpha)}(\cdot) := T_{a*}(\cdot) \otimes P_\alpha = T_{-a}^*(\cdot) \otimes P_\alpha. \tag{7}$$

Функтор $\Phi_{(a,\alpha)}$ представляется пучком

$$S_{(a,\alpha)} = \mathcal{O}_{\Gamma_a} \otimes p_2^*(P_\alpha) \tag{8}$$

на произведении $A \times A$, где Γ_a – это график автоморфизма сдвига T_a . Очевидно, что функтор $\Phi_{(a,\alpha)}$ является автоэквивалентностью.

Множество функторов $\Phi_{(a,\alpha)}$, параметризованных $A \times \widehat{A}$, можно соединить в один функтор из $D^b(A \times \widehat{A})$ в $D^b(A \times A)$, который будет переводить структурный пучок точки $\mathcal{O}_{(a,\alpha)}$ в $S_{(a,\alpha)}$. (Заметим, что этим условием функтор не определяется однозначно, а только с точностью до умножения на линейное расслоение, поднятое с $A \times \widehat{A}$.)

Мы определим этот функтор $\Phi_{S_A} : D^b(A \times \widehat{A}) \longrightarrow D^b(A \times A)$ как композицию двух других.

Рассмотрим объект $\mathcal{P}_A = p_{14}^*\mathcal{O}_\Delta \otimes p_{23}^* P \in D^b((A \times \widehat{A}) \times (A \times A))$ и обозначим через $\mu_A : A \times A \longrightarrow A \times A$ морфизм, который переводит точку (a_1, a_2) в $(a_1, m(a_1, a_2))$. У нас появляются два функтора:

$$\Phi_{\mathcal{P}_A} : D^b(A \times \widehat{A}) \longrightarrow D^b(A \times A), \qquad \mathbf{R}\mu_{A*} : D^b(A \times A) \longrightarrow D^b(A \times A).$$

Определение 2.6. *Функтор* Φ_{S_A} *есть композиция* $\mathbf{R}\mu_{A*} \circ \Phi_{\mathcal{P}_A}$.

Мы можем явно описать объект S_A на произведении $(A \times \widehat{A}) \times (A \times A)$, представляющий функтор Φ_{S_A}. Но так как явная формула нам в дальнейшем не понадобится, то мы приведем ее без доказательства.

Лемма 2.7. *Объект* S_A *на произведении* $(A \times \widehat{A}) \times (A \times A)$ *, представляющий функтор* Φ_{S_A}*, задается следующей формулой:*

$$S_A = (m \cdot p_{13}, p_4)^* \mathcal{O}_\Delta \otimes p_{23}^* P_A.$$

Где $(m \cdot p_{13}, p_4)$ *– это морфизм на* $A \times A$*, переводящий точку* (a_1, α, a_3, a_4) *в точку* $(m(a_1, a_3), a_4)$.

Утверждение 2.8. *Функтор* Φ_{S_A} *является эквивалентностью и для каждой* k*-точки* $(a, \alpha) \in A \times \widehat{A}$

a) *структурный пучок точки* $\mathcal{O}_{(a,\alpha)}$ *переводит в пучок* $S_{(a,\alpha)}$*, определенный формулой (8);*

b) *линейное расслоение* $P_{(\alpha,a)}$ *на* $A \times \widehat{A}$ *переводит в объект* $\mathcal{O}_{\{-a\} \times A} \otimes p_{2*} P_\alpha[n]$.

Доказательство. Функтор Φ_{S_A} есть по определению композиция функторов $\mathbf{R}\mu_{A*}$ и $\Phi_{\mathcal{P}_A}$, которые являются эквивалентностями: первый по очевидным соображениям, а для второго это следует из Утверждения 1.7 и Предложения 2.4.

Функтор $\Phi_{\mathcal{P}_A}$ переводит структурный пучок точки $\mathcal{O}_{(a,\alpha)}$ в пучок $\mathcal{O}_{A \times \{a\}} \otimes p_1^* P_\alpha$. Далее функтор $\mathbf{R}\mu_{A*}$ посылает пучок $\mathcal{O}_{A \times \{a\}} \otimes p_1^* P_\alpha$ в пучок $\mathcal{O}_{\Gamma_a} \otimes p_1^*(P_\alpha)$.

Таким же образом, применяя Предложение 2.4, находим, что функтор $\Phi_{\mathcal{P}_A}$ переводит линейное расслоение $P_{(\alpha,a)}$ в объект $\mathcal{O}_{\{-a\} \times A} \otimes p_2^* P_\alpha[n]$, а функтор $\mathbf{R}\mu_{A*}$ посылает объект $\mathcal{O}_{\{-a\} \times A} \otimes p_2^* P_\alpha[n]$ в себя. □

Предположим, что A и B – два абелевых многообразия, производные категории когерентных пучков которых эквивалентны. Зафиксируем некоторую эквивалентность. По Теореме 1.4 она представляется объектом на произведении. Таким образом, имеется объект $\mathcal{E} \in D^b(A \times B)$ и эквивалентность $\Phi_\mathcal{E} : D^b(A) \xrightarrow{\sim} D^b(B)$.

Рассмотрим функтор

$$Ad_\mathcal{E} : D^b(A \times A) \xrightarrow{\sim} D^b(B \times B),$$

который определяется формулой (5) и является эквивалентностью. Рассмотрим композицию функторов $\Phi_{S_B}^{-1} \circ Ad_{\mathcal{E}} \circ \Phi_{S_A}$.

Определение 2.9. *Обозначим через $\mathcal{J}(\mathcal{E})$ объект, представляющий функтор*

$$\Phi_{S_B}^{-1} \circ Ad_{\mathcal{E}} \circ \Phi_{S_A}.$$

Таким образом, существует коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} D^b(A \times \widehat{A}) & \xrightarrow{\Phi_{S_A}} & D^b(A \times A) \\ {\scriptstyle \Phi_{\mathcal{J}(\mathcal{E})}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Ad_{\mathcal{E}}} \\ D^b(B \times \widehat{B}) & \xrightarrow{\Phi_{S_B}} & D^b(B \times B) \end{array} \tag{9}$$

Следующая теорема позволяет описать объект $\mathcal{J}(\mathcal{E})$ и является основной при описании абелевых многообразий, обладающих эквивалентными производными категориями когерентных пучков.

Теорема 2.10. *Существует гомоморфизм абелевых многообразий $f_{\mathcal{E}} : A \times \widehat{A} \longrightarrow B \times \widehat{B}$, являющийся изоморфизмом, и линейное расслоение $L_{\mathcal{E}}$ на $A \times \widehat{A}$ такое, что объект $\mathcal{J}(\mathcal{E})$ изоморфен $i_*(L_{\mathcal{E}})$, где i – это вложение многообразия $A \times \widehat{A}$ в $(A \times \widehat{A}) \times (B \times \widehat{B})$ в качестве графика изоморфизма $f_{\mathcal{E}}$.*

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, мы сформулируем две леммы, которые позволят нам считать поле k алгебраически замкнутым. Обозначим через $\bar{k}$ алгебраическое замыкание k . Положим $\bar{X} := X \times_{Spec(k)} Spec(\bar{k})$ и обозначим через $\bar{\mathcal{F}}$ обратный образ $\mathcal{F}$ относительно морфизма $\bar{X} \longrightarrow X$.

Лемма 2.11. *Пусть $\mathcal{F}$ когерентный пучок на гладком многообразии X . Предположим, что существуют замкнутое подмногообразие $j : Z \hookrightarrow \bar{X}$ и обратимый пучок $\mathcal{L}$ на Z такой, что $\bar{\mathcal{F}} \cong j_*\mathcal{L}$. Тогда существуют замкнутое подмногообразие $i : Y \hookrightarrow X$ и обратимый пучок $\mathcal{M}$ на Y такой, что $\mathcal{F} \cong i_*\mathcal{M}$ и $j = \bar{i}$.*

Доказательство. Вопрос локальный, поэтому можно считать, что у нас имеется аффинное многообразие $X = Spec(A)$ и A-модуль M . Обозначим через $J \subset A$ аннулятор модуля M , а через $J' \subset \bar{A} = A \otimes_k \bar{k}$ аннулятор модуля $\bar{M} = M \otimes_k \bar{k}$. Пусть $\{e_i\}$ – базис поля $\bar{k}$ над k , тогда $\bar{M} = \oplus M e_i$ как модуль над A . Очевидно, что $J \otimes_k \bar{k} \subseteq J'$. Но, с другой стороны, если елемент $\sum a_i \otimes e_i \in \bar{A}$ принадлежит J' , то $\sum a_i m \otimes e_i = 0$ для любого $m \in M$. И значит, каждый a_i принадлежит J . Таким образом $J \otimes_k \bar{k} = J'$.

Из условия мы знаем, что $\bar{M}$ проективным модулем ранга 1 над алгеброй $\bar{B} := \bar{A}/J' = B \otimes_k \bar{k}$, где $B = A/J$, и $\bar{M} = M \otimes_B \bar{B}$. Теперь, так как $\bar{B}$ является строго плоской B-алгеброй, то M как B-модуль также проективный ранга 1. (см. например [4] (3.1.4)). □

Следующая лемма говорит нам, что свойство функтора быть вполне строгим (эквивалентностью) стабильно относительно расширения полей.

Лемма 2.12. *Пусть X и Y – гладкие проективные многообразия над полем k , и пусть $\mathcal{E}$ - объект производной категории $D^b(X \times Y)$. Рассмотрим расширение полей F/k и многообразия*

$$X' = X \underset{Spec(k)}{\times} Spec(F), \qquad Y' = Y \underset{Spec(k)}{\times} Spec(F).$$

Обозначим через $\mathcal{E}'$ поднятие объекта $\mathcal{E}$ в категорию $D^b(X' \times Y')$. Тогда функтор $\Phi_{\mathcal{E}} : D^b(X) \longrightarrow D^b(Y)$ вполне строгий (эквивалентность), если и только если функтор $\Phi_{\mathcal{E}'} : D^b(X') \longrightarrow D^b(Y')$ является вполне строгим (эквивалентностью).

Доказательство. $\Rightarrow$ Как и раньше обозначим через $\Phi_{\mathcal{E}}{}^*$ левый сопряженный к функтору $\Phi_{\mathcal{E}}$. Если функтор $\Phi_{\mathcal{E}}$ является вполне строгим, тогда композиция $\Phi_{\mathcal{E}} \circ \Phi_{\mathcal{E}}{}^*$ есть тождественный функтор $id_{D^b(X)}$, который, как мы знаем, представляется структурным пучком диагонали $\mathcal{O}_{\Delta}$ в произведении $X \times X$. Следовательно, используя Предложение 1.1 и теорему о плоской замене базы, находим, что композиция $\Phi_{\mathcal{E}'} \circ \Phi_{\mathcal{E}'}{}^*$ также представляется структурным пучком диагонали $\mathcal{O}_{\Delta'}$, где Δ' — это диагональ в $X' \times X'$. И значит, функтор $\Phi_{\bar{\mathcal{E}}}$ также вполне строгий.

$\Leftarrow$ Рассмотрим композицию $\Phi_{\mathcal{E}} \circ \Phi_{\mathcal{E}}{}^*$. Она представляется некоторым объектом $\mathcal{J}$ на $X \times X$. Существует канонический морфизм $\phi : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{O}_{\Delta}$. Так как функтор $\Phi_{\bar{\mathcal{E}}}$ вполне строгий по предположению, то морфизм $\phi' : \mathcal{J}' \longrightarrow \mathcal{O}_{\Delta'}$ является изоморфизмом. Отсюда немедленно следует, что и сам ϕ есть изоморфизм. А значит, функтор $\Phi_{\mathcal{E}}$ вполне строгий.

Аналогично доказываются утверждения и про эквивалентность, которая следует из строгости и полноты сопряженного функтора. $\square$

Доказательство Теоремы 2.10. Пользуясь Леммами 2.11 и 2.12, мы можем перейти к алгебраическому замыканию поля k .

Шаг 1. Обозначим через e и e' замкнутые точки многообразий $A \times \widehat{A}$ и соответственно $B \times \widehat{B}$, которые являются единицами групповых структур. Рассмотрим пучок небоскребов $\mathcal{O}_e$ и вычислим его образ относительно функтора $\Phi_{\mathcal{J}(\mathcal{E})}$. По определению, мы знаем, что

$$\Phi_{\mathcal{J}(\mathcal{E})} = \Phi_{S_B}^{-1} \circ Ad_{\mathcal{E}} \circ \Phi_{S_A}.$$

По Утверждению 2.8 функтор Φ_{S_A} переводит пучок $\mathcal{O}_e$ в структурный пучок диагонали $\mathcal{O}_{\Delta(A)}$ на $A \times A$. Так как структурный пучок диагонали представляет тождественный функтор, то из формулы (6) следует, что $Ad_{\mathcal{E}}(\mathcal{O}_{\Delta(A)})$ есть структурный пучок диагонали $\mathcal{O}_{\Delta(B)}$ на многообразии $B \times B$. А он в свою очередь переходит в структурный пучок $\mathcal{O}_{e'}$ под действием функтора $\Phi_{S_B}^{-1}$ по тому же Утверждению 2.8.

Шаг 2. Таким образом, получаем, что

$$\mathcal{J}(\mathcal{E}) \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \mathcal{O}_{\{e\} \times (B \times \widehat{B})} \cong \mathcal{O}_{\{e\} \times \{e'\}}.$$

Из этого следует, что существует аффинная окрестность $U = Spec(R)$ точки e в топологии Зариского такая, что объект $\mathcal{J}' := \mathcal{J}(\mathcal{E}) \mid_{U \times (B \times \widehat{B})}$ есть когерентный пучок с носителем, который пересекает слой $\{e\} \times (B \times \widehat{B})$ в точке $\{e\} \times \{e'\}$. Напомним, что носитель любого когерентного пучка является замкнутым подмножеством.

Рассмотрим теперь некоторую аффинную окрестность $V = Spec(S)$ точки e' в $B \times \widehat{B}$. Пересечение носителя пучка $\mathcal{J}'$ с дополнением $B \times \widehat{B} \backslash V$ является замкнутым подмножеством, проекция которого на $A \times \widehat{A}$ - замкнутое подмножество, не содержащее точку e .

Таким образом, уменьшая, если необходимо, U , мы можем считать что оно все еще аффинно, а носитель пучка $\mathcal{J}'$ содержится в $U \times V$. Это значит, что существует когерентный пучок $\mathcal{F}$ на $U \times V$ такой, что $j_*(\mathcal{F}) = \mathcal{J}'$, где j - это вложение $U \times V$ в $U \times (B \times \widehat{B})$. Обозначим через M конечно порожденный $R \otimes S$ -модуль, который соответствует пучку $\mathcal{F}$, то есть $\mathcal{F} = \widetilde{M}$.

Кроме того, заметим, что M является конечнопорожденным R модулем, так как прямой образ при проекции когерентного пучка $\mathcal{J}' = j_* \mathcal{F}$ является когерентным пучком.

Пусть m – максимальный идеал в R, соответствующий точке e. Мы знаем, что

$$M \otimes_R R/m \cong R/m.$$

Значит, существует гомоморфизм R-модулей $\phi : R \longrightarrow M$, который после тензорного умножения на R/m становится изоморфизмом. Таким образом, носители когерентных пучков $Ker\phi$ и $Coker\phi$ не содержат точку e. Поэтому, заменяя U на меньшую аффинную окрестность точки e, которая не пересекается с носителями пучков $Ker\phi$ и $Coker\phi$, мы получаем, что ϕ есть изоморфизм. Следовательно существует подсхема $X(U) \subset U \times (B \times \widehat{B})$ такая, что проекция $X(U) \longrightarrow U$ является изоморфизмом и

$$\mathcal{J}' = \mathcal{J}(\mathcal{E}) \mid_{U \times (B \times \widehat{B})} \cong \mathcal{O}_{X(U)}.$$

Шаг 3. Мы получили тем самым, что для любой замкнутой точки $(a, \alpha) \in U$

$$\Phi_{\mathcal{J}(\mathcal{E})}(\mathcal{O}_{(a,\alpha)}) \cong \mathcal{O}_{(b,\beta)}$$

для некоторой замкнутой точки $(b, \beta) \in B \times \widehat{B}$. Если мы теперь рассмотрим произвольную замкнутую точку $(a, \alpha) \in A \times \widehat{A}$, то ее всегда можно представить как сумму $(a, a') = (a_1, \alpha_1) + (a_2, \alpha_2)$, где точки $(a_1, \alpha_1), (a_2, \alpha_2)$ принадлежат U. Обозначим через (b_1, β_1) и (b_2, β_2) образы этих точек относительно функтора $\Phi_{\mathcal{J}(\mathcal{E})}$. Функтор Φ_{S_A}, как мы знаем, переводит структурный пучок $\mathcal{O}_{(a,\alpha)}$ в пучок $S_{(a,\alpha)}$. Обозначим через $\mathcal{G}$ объект $Ad_{\mathcal{E}}(S_{(a,\alpha)})$. Чтобы вычислить его воспользуемся соотношением (6). Мы имеем

$$\Phi_{\mathcal{G}} \cong \Phi_{\mathcal{E}} \circ \Phi_{(a,\alpha)} \circ \Phi_{\mathcal{E}}^{-1}.$$

Но функтор $\Phi_{(a,\alpha)}$, который по определению (7) есть $T_a^*(\cdot) \otimes P_\alpha$, можно представить как композицию $\Phi_{(a_1,\alpha_1)} \Phi_{(a_2,\alpha_2)}$. Таким образом, получаем последовательность изоморфизмов

$$\Phi_{\mathcal{G}} \cong \Phi_{\mathcal{E}} \circ \Phi_{(a,\alpha)} \circ \Phi_{\mathcal{E}}^{-1} \cong \Phi_{\mathcal{E}} \circ \Phi_{(a_1,\alpha_1)} \circ \Phi_{\mathcal{E}}^{-1} \cong \Phi_{\mathcal{E}} \circ \Phi_{(a_2,\alpha_2)} \circ \Phi_{\mathcal{E}}^{-1} \cong \Phi_{(b_1,\beta_1)} \circ \Phi_{(b_2,\beta_2)} \cong \Phi_{(b,\beta)}$$

где $(b, \beta) = (b_1, \beta_1) + (b_2, \beta_2)$. И значит, объект $\mathcal{G}$ изоморфен $S_{(b,\beta)}$. Окончательно получаем, что

$$\Phi_{\mathcal{J}(\mathcal{E})}(\mathcal{O}_{(a,\alpha)}) \cong \mathcal{O}_{(b,\beta)}$$

для любой замкнутой точки $(a, \alpha) \in A \times \widehat{A}$.

Теперь, повторяя процедуру Шага 2, мы можем для каждой замкнутой точки (a, a') найти некоторую окрестность W и подсхему $X(W) \subset W \times (B \times \widehat{B})$ такую, что проекция $X(W) \longrightarrow W$ является изоморфизмом, и $\mathcal{J} \mid_{W \times (B \times \widehat{B})} \cong \mathcal{O}_{X(W)}$.

Склеивая все эти окрестности, мы находим подмногообразие $i : X \hookrightarrow (A \times \widehat{A}) \times (B \times \widehat{B})$ такое, что проекция $X \longrightarrow A \times \widehat{A}$ есть изоморфизм, а пучок $\mathcal{J}(\mathcal{E})$ изоморфен пучку $i_* L$, где L — линейное расслоение на X. Подмногообразие X задает гомоморфизм из $A \times \widehat{A}$ в $B \times \widehat{B}$, который индуцирует эквивалентность производных категорий. Следовательно, этот гомоморфизм является изоморфизмом. $\square$

В частности, из Теоремы сразу следует, что если абелевы многообразия A и B имеют эквивалентные производные категории когерентных пучков, то многообразия $A \times \widehat{A}$ и $B \times \widehat{B}$ изоморфны. Ниже мы покажем, что этот изоморфизм должен удовлетворять некоторому дополнительному условию (см. Предложение 2.18).

Следствие 2.13. *Изоморфизм* $f_{\mathcal{E}}$ *переводит* k*-точку* $(a,\alpha)\in A\times\widehat{A}$ *в точку* $(b,\beta)\in B\times\widehat{B}$ *тогда и только тогда, когда эквивалентности*

$$\Phi_{(a,\alpha)}:D^b(A)\xrightarrow{\sim}D^b(A),\qquad \Phi_{(b,\beta)}:D^b(B)\xrightarrow{\sim}D^b(B),$$

определенные по формуле (7), связаны следующим соотношением:

$$\Phi_{(b,\beta)}\circ\Phi_{\mathcal{E}}\cong\Phi_{\mathcal{E}}\circ\Phi_{(a,\alpha)},$$

или в терминах объектов это значит, что

$$T_{b*}\mathcal{E}\otimes P_{\beta}\cong T_{-a*}\mathcal{E}\otimes P_{\alpha}=T_a^*\mathcal{E}\otimes P_{\alpha}$$

Доказательство. По Теореме 2.10 функтор $\Phi_{\mathcal{J}(\mathcal{E})}$ переводит структурный пучок точки $\mathcal{O}_{(a,\alpha)}$ в структурный пучок точки $\mathcal{O}_{(b,\beta)}$, где $(b,\beta)=f_{\mathcal{E}}(a,\alpha)$. Из Утверждения 2.8 следует, что функтор Φ_{S_A} посылает пучок $\mathcal{O}_{(a,\alpha)}$ в $S_{(a,\alpha)}$. А пучок $S_{(a,\alpha)}$, в свою очередь, представляет функтор

$$\Phi_{(a,\alpha)}=T_{a*}(\cdot)\otimes P_{\alpha}.$$

Теперь, используя диаграмму (9), мы видим, что при отображении $f_{\mathcal{E}}$ точка (a,α) переходит в точку (b,β) тогда и только тогда, когда $S_{(b,\beta)}\cong Ad_{\mathcal{E}}(S_{(a,\alpha)})$. Применяя формулу (6), находим, что $\Phi_{(b,\beta)}\cong\Phi_{\mathcal{E}}\circ\Phi_{(a,\alpha)}\circ\Phi_{\mathcal{E}}^{-1}$. □

В дальнейшем нам понадобится явная формула для объекта $\mathcal{J}(\mathcal{E})$ в частном случае, когда $A=B$ и эквивалентность $\Phi_{\mathcal{E}}$ есть $\Phi_{(a,\alpha)}$, определенная формулой (7).

Предложение 2.14. *Пусть* $A=B$. *Рассмотрим объект* $S_{(a,\alpha)}$ *на* $A\times A$, *который представляет эквивалентность* $\Phi_{(a,\alpha)}$, *определенную формулой (7). Тогда пучок* $\mathcal{J}(S_{(a,\alpha)})$ *есть* $\Delta_*P_{(\alpha,-a)}$, *где* Δ *это диагональное вложение* $A\times\widehat{A}$ *в* $(A\times\widehat{A})\times(A\times\widehat{A})$ *и* $P_{(\alpha,a)}$ *линейное расслоение на* $A\times\widehat{A}$ *определенное в 2.1.*

Доказательство. Как мы знаем из Утверждения 2.8, функтор Φ_{S_A} посылает структурный пучок $\mathcal{O}_{(a',\alpha')}$ в пучок $S_{(a',\alpha')}$ на $A\times A$ (формула (8)). Далее функтор $Ad_{S_{(a,\alpha)}}$ переводит пучок $S_{(a',\alpha')}$ в себя, так как по формуле (6) мы знаем, что объект $Ad_{S_{(a,\alpha)}}(S_{(a',\alpha')})$ представляет функтор

$$\Phi_{(a,\alpha)}\circ\Phi_{(a',\alpha')}\circ\Phi_{(a,\alpha)}^{-1}.$$

Который, в свою очередь, изоморфен $\Phi_{(a',\alpha')}$, так как все такие функторы коммутируют друг с другом. Таким образом, мы получаем, что функтор, задаваемый пучком $\mathcal{J}(S_{(a,\alpha)})$ переводит структурный пучок любой точки в себя, и значит, это есть некоторое линейное расслоение L, сосредоточенное на диагонали.

Чтобы найти теперь линейное расслоение L, мы посмотрим, куда этот функтор переводит расслоение $P_{(\alpha',a')}$. Снова применяя Утверждение 2.8, видим, что функтор Φ_{S_A} переводит расслоение $P_{(\alpha',a')}$ в объект $\mathcal{O}_{\{-a'\}\times A}\otimes p_2^*(P_{\alpha'})[n]$. Нетрудно проверить, что далее этот объект под действием функтора $Ad_{S_{(a,\alpha)}}$ переходит в объект $\mathcal{O}_{\{-a'+a\}\times A}\otimes p_2^*(P_{\alpha'+\alpha})[n]$. И следовательно, расслоение $P_{(\alpha',a')}$ под действием функтора, задаваемого пучком $\mathcal{J}(S_{(a,\alpha)})$, переходит в расслоение $P_{(\alpha'+\alpha,a'-a)}$. То есть расслоение L изоморфно $P_{(\alpha,-a)}$. □

Для абелевых многообразий A и B обозначим через $\mathcal{E}q(A,B)$ множество всех точных эквивалентностей с точностью до изоморфизма из категории $D^b(A)$ в категорию $D^b(B)$.

Давайте введем в рассмотрение два группоида $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{D}$ (т.е. категории в которых все морфизмы обратимы). Объекты обоих — это абелевы многообразия. Морфизмы в группоиде $\mathfrak{A}$ будут изоморфизмы между ними как алгебраическими группами. Морфизмы в $\mathfrak{B}$ — это точные эквивалентности между категориями когерентных пучков на абелевых многообразиях, то есть

$$\mathcal{M}or_{\mathfrak{A}}(A,\ B) := Iso(A,\ B),$$
$$\mathcal{M}or_{\mathfrak{D}}(A,\ B) := \mathcal{E}q(A,\ B).$$

По Теореме 2.10 имеется отображение из множества $\mathcal{E}q(A,B)$ в множество $Iso(A\times\widehat{A},\ B\times\widehat{B})$, которое сопоставляет эквивалентности $\Phi_{\mathcal{E}}$ изоморфизм $f_{\mathcal{E}}$. Рассмотрим отображение F из $\mathfrak{D}$ в $\mathfrak{A}$, которое сопоставляет абелеву многообразию A многообразие $A\times\widehat{A}$ и на морфизмах действует описанным выше способом.

Предложение 2.15. *Отображение* $F:\mathfrak{D}\longrightarrow\mathfrak{A}$ *является функтором.*

Доказательство. Чтобы доказать утверждение, надо только проверить, что F уважает композицию морфизмов. Рассмотрим три абелевых многообразия A,B,C. И пусть $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ — объекты категорий $D^b(A\times B)$ и $D^b(B\times C)$ соответственно такие, что функторы

$$\Phi_{\mathcal{E}}:D^b(A)\longrightarrow D^b(B),$$
$$\Phi_{\mathcal{F}}:D^b(B)\longrightarrow D^b(C)$$

являются эквивалентностями. Обозначим через $\mathcal{G}$ объект в $D^b(A\times C)$, который представляет композицию этих функторов.

Соотношение (4) дает нам изоморфизм $Ad_{\mathcal{G}}\cong Ad_{\mathcal{F}}\circ Ad_{\mathcal{E}}$. И, следовательно, получаем, что

$$\Phi_{\mathcal{J}(\mathcal{F})}\circ\Phi_{\mathcal{J}(\mathcal{E})}\cong(\Phi_{S_A}^{-1}\circ Ad_{\mathcal{F}}\circ\Phi_{S_A})\circ(\Phi_{S_A}^{-1}\circ Ad_{\mathcal{E}}\circ\Phi_{S_A})\cong\Phi_{S_A}^{-1}\circ Ad_{\mathcal{G}}\circ\Phi_{S_A}\cong\Phi_{\mathcal{J}(\mathcal{G})}$$

По Теореме 2.10 все объекты $\mathcal{J}(\mathcal{E}),\mathcal{J}(\mathcal{F}),\mathcal{J}(\mathcal{G})$ являются линейными расслоениями, сосредоточенными на графиках изоморфизмов $f_{\mathcal{E}},f_{\mathcal{F}},f_{\mathcal{G}}$. Таким образом, получается равенство $f_{\mathcal{G}}=f_{\mathcal{F}}\cdot f_{\mathcal{E}}$. □

Следствие 2.16. *Пусть* A *— абелево многообразие и* $\Phi_{\mathcal{E}}$ *— автоэквивалентность производной категории* $D^b(A)$. *Тогда соответствие* $\Phi_{\mathcal{E}}\mapsto f_{\mathcal{E}}$ *задает гомоморфизм групп*

$$\gamma_A:AutoeqD^b(A)\longrightarrow Aut(A\times\widehat{A}).$$

Таким образом, имеется функтор $F:\mathfrak{D}\longrightarrow\mathfrak{A}$. Наша дальнейшая цель – описать его. Для этого мы должны выяснить, какие элементы из $Iso(A\times\widehat{A},\ B\times\widehat{B})$ могут быть реализованы как $f_{\mathcal{E}}$ для некоторого $\mathcal{E}$, а также ответить на вопрос, когда для двух эквивалентностей $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ имеется равенство $f_{\mathcal{E}_1}=f_{\mathcal{E}_2}$.

Рассмотрим произвольный морфизм $f:A\times\widehat{A}\longrightarrow B\times\widehat{B}$. Удобно записать его в виде матрицы

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix},$$

где α — это морфизм из A в B, β — из $\widehat{A}$ в B, γ — из A в $\widehat{B}$, и δ — из $\widehat{A}$ в $\widehat{B}$. Каждый морфизм f определяет два других $\widehat{f}$ и $\tilde{f}$ из $B\times\widehat{B}$ в $A\times\widehat{A}$, имеющие следующие матричные формы:

$$\widehat{f}=\begin{pmatrix}\widehat{\delta} & \widehat{\beta}\\ \widehat{\gamma} & \widehat{\alpha}\end{pmatrix};\qquad \tilde{f}=\begin{pmatrix}\widehat{\delta} & -\widehat{\beta}\\ -\widehat{\gamma} & \widehat{\alpha}\end{pmatrix}.$$

Определим множество $U(A\times\widehat{A},\ B\times\widehat{B})$ как подмножество в $Iso(A\times\widehat{A},\ B\times\widehat{B})$, состоящее из таких $f,$ что $\tilde{f}$ совпадает с обратным к f , т.е.

$$U(A\times\widehat{A},\ B\times\widehat{B}) := \left\{ f\in Iso(A\times\widehat{A},\ B\times\widehat{B}) \,\middle|\, \tilde{f}=f^{-1} \right\}.$$

Если $B=A$, то это множество будем обозначать $U(A\times\widehat{A})$. Отметим, что $U(A\times\widehat{A})$ является подгруппой в $Aut(A\times\widehat{A})$.

Определение 2.17. *Назовем изоморфизм* $f: A\times\widehat{A}\xrightarrow{\sim} B\times\widehat{B}$ изометричным, *если он принадлежит* $U(A\times\widehat{A},\ B\times\widehat{B})$.

Предложение 2.18. *Для всякой эквивалентности* $\Phi_{\mathcal{E}}: D^b(A)\xrightarrow{\sim} D^b(B)$ *изоморфизм* $f_{\mathcal{E}}$ *является изометричным.*

Доказательство. Переходя к алгебраическому замыканию, если это необходимо, мы можем предполагать, что поле k алгебраически замкнуто. Для проверки равенства $\tilde{f}_{\mathcal{E}}=f_{\mathcal{E}}^{-1}$ достаточно установить совпадение этих морфизмов на замкнутых точках. Пусть $f_{\mathcal{E}}$ переводит точку $(a,\alpha)\in A\times\widehat{A}$ в точку $(b,\beta)\in B\times\widehat{B}$. Мы должны показать, что $\tilde{f}_{\mathcal{E}}(b,\beta)=(a,\alpha)$ или, что то же самое, показать, что $\widehat{f}(-b,\beta)=(-a,\alpha)$.

Изоморфизм $f_{\mathcal{E}}$ задается абелевым подмногообразием $X\hookrightarrow A\times\widehat{A}\times B\times\widehat{B}$. Следовательно, мы должны проверить, что $P_{(0,0,\beta,-b)}\otimes\mathcal{O}_X\cong P_{(\alpha,-a,0,0)}\otimes\mathcal{O}_X$. Или, что эквивалентно, показать, что пучок

$$\mathcal{J}' := P_{(-\alpha,a,\beta,-b)}\otimes\mathcal{J}(\mathcal{E})$$

изоморфен пучку $\mathcal{J}(\mathcal{E})$.

По Предложению 2.14 функтор, задаваемый пучком $\mathcal{J}'$, является композицией функторов, представленных объектами $\mathcal{J}(S_{(-a,-\alpha)})$, $\mathcal{J}(\mathcal{E})$ и $\mathcal{J}(S_{(b,\beta)})$. Таким образом, $\mathcal{J}'$ совпадает с $\mathcal{J}(\mathcal{E}')$, где $\mathcal{E}'$ объект из $D^b(A\times B)$, который представляет функтор

$$\Phi_{(b,\beta)}\circ\Phi_{\mathcal{E}}\circ\Phi_{(-a,-\alpha)}.$$

А эта композиция по Следствию 2.13 изоморфна функтору $\Phi_{\mathcal{E}}$. То есть объект $\mathcal{E}'$ изоморфен $\mathcal{E}$, и значит $\mathcal{J}'=\mathcal{J}(\mathcal{E}')\cong\mathcal{J}(\mathcal{E})$. □

Как следствие Теоремы 2.10 и Предложения 2.18 получаем следующий результат

Теорема 2.19. *Пусть* A *и* B *– два абелевых многообразия над полем* k *. Если производные категории когерентных пучков* $D^b(A)$ *и* $D^b(B)$ *эквивалентны как триангулированные категории, тогда между* $A\times\widehat{A}$ *и* $B\times\widehat{B}$ *существует изометричный изоморфизм.*

Обратное утверждение также верно для абелевых многообразий над алгебраически замкнутым полем характеристики 0 и доказано в [13]. В параграфе 4 мы дадим другое доказательство этого факта.

Следствие 2.20. *Для любого абелева многообразия* A *существует только конечное число неизоморфных абелевых многообразий, производные категории когерентных пучков которых эквивалентны категории* $D^b(A)$ *(как триангулированные категории).*

Доказательство. В статье [6] доказано, что для каждого абелева многообразия Z существует с точностью до изоморфизма только конечное число абелевых многообразий, допускающих вложение в Z в качестве абелева подмногообразия. Применяя это утверждение к $Z=A\times\widehat{A}$ и используя Теорему 2.19, получаем требуемый результат. □

В заключении этого параграфа хотелось бы пояснить, почему элементы множества $U(A \times \widehat{A},\ B\times\widehat{B})$ мы назвали изометричными. Предположим, что поле k есть поле комплексных чисел. Обозначим через Γ_A и Γ_B решетки первых гомологий $H_1(A,\ \mathbb{Z})$ и $H_1(B,\ \mathbb{Z})$ соответственно.

Любая решетка вида $\Gamma \oplus \Gamma^*$ имеет каноническую симметрическую билинейную форму

$$Q((x,l),(y,m)) = l(y) + m(x)$$

Обозначим через Q_A и Q_B соответствующие симметрические билинейные формы на $\Lambda_A := H_1(A\times\widehat{A},\ \mathbb{Z})$ и $\Lambda_B := H_1(B\times\widehat{B},\ \mathbb{Z})$.

Множество гомоморфизмов из $A\times\widehat{A}$ в $B\times\widehat{B}$ является подмножеством в $Hom_{\mathbb{Z}}(\Lambda_A, \Lambda_B)$. И в этих терминах мы можем описать элементы из $U(A\times\widehat{A},\ B\times\widehat{B})$ следующим образом.

Предложение 2.21. *Изоморфизм* $f : A\times\widehat{A} \longrightarrow B\times\widehat{B}$ *принадлежит множеству* $U(A\times\widehat{A}; B\times\widehat{B})$ *тогда и только тогда, когда он задает изометрию решеток* (Λ_A, Q_A) *и* (Λ_B, Q_B) *, то есть*

$$F^t Q_B F = Q_A,$$

где $F : \Lambda_A \longrightarrow \Lambda_B$ *– отображение на первых гомологиях, индуцированное* f*.*

Доказательство этого Предложения есть прямое матричное вычисление с учетом Замечания 2.3.

3. Объекты, представляющие эквивалентности, и группы автоэквивалентностей.

Из Предложений 2.15 и 2.18 следует существование гомоморфизма из группы точных автоэквивалентностей $AuteqD^b(A)$ в группу изометричных автоморфизмов $U(A\times\widehat{A})$. В этом парагрфе мы опишем ядро этого гомоморфизма. Нам уже известно из Предложения 2.14, что все эквивалентности $\Phi_{(a,\alpha)}[n]$ (см. (7)) принадлежат ядру. Мы покажем, что они в точности и составляют это ядро. Для доказательства этого факта нам понадобится утверждение, которое само по себе представляет интерес. Мы покажем, что в случае абелевых многообразий, если функтор $\Phi_{\mathcal{E}}$ является эквивалентностью, то объект $\mathcal{E}$ на самом деле есть пучок на произведении, с точностью до сдвига в производной категории. Этот утверждение, специфическое для абелевых многообразий, нарушается в других случаях, например для K3 поверхностей.

Лемма 3.1. *Пусть* $\mathcal{E}$ *– объект на произведении* $A\times B$ *, который задает эквивалентность* $\Phi_{\mathcal{E}} : D^b(A) \longrightarrow D^b(B)$ *. Рассмотрим проекцию* $q : (A\times\widehat{A})\times(B\times\widehat{B}) \longrightarrow A\times B$ *и обозначим через* K *прямой образ* $\mathbf{R}^{\cdot} q_* \mathcal{J}(\mathcal{E})$ *, где* $\mathcal{J}(\mathcal{E})$ *– объект определенный в 2.9. Тогда* K *изоморфен объекту* $\mathcal{E}\otimes(\mathcal{E}^{\vee}|_{(0,0)})$ *, где* $\mathcal{E}^{\vee}|_{(0,0)}$ *– обозначение для комплекса векторных пространств, который есть обратный образ объекта* $\mathbf{R}^{\cdot}\underline{\mathcal{H}om}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{A\times B})$ *при вложении точки* $(0,0)$ *в абелево многообразие* $A\times B$ *.*

Доказательство. Рассмотрим абелево многообразие

$$Z = (A\times\widehat{A})\times(A\times A)\times(B\times B)\times(B\times\widehat{B})$$

и объект

$$H = p_{1234}^* S_A \otimes p_{35}^* \mathcal{E}^{\vee}[n] \otimes p_{46}^* \mathcal{E} \otimes p_{5678}^* S_B^{\vee}[2n]$$

Из Предложения 1.1 о композиции функторов и диаграммы (9) мы знаем, что $\mathcal{J}(\mathcal{E}) \cong p_{1278*}H$, и значит объект K есть $p_{17*}H$. Чтобы вычислить последний, мы сначала рассмотрим проекцию Z на

$$V = A \times (A \times A) \times (B \times B) \times B$$

и обозначим ее через v . Теперь, чтобы вычмслить v_*H , мы вспомним, что функтор Φ_{S_A} – это композиция $\Phi_{\mathcal{P}_A}$ и $\mathbf{R}\mu_{A*}$, где

$$\mathcal{P}_A = p_{14}^*\mathcal{O}_\Delta \otimes p_{23}^*P \in D^b((A \times \widehat{A}) \times (A \times A)).$$

Легко видеть, что $p_{134*}\mathcal{P}_A \cong \mathcal{O}_{T_A}[-n]$, где $T \subset A \times A \times A$ подмногообразие, изоморфное A и состоящее из точек $(a, 0, a)$. Далее, учитывая, что $\mu_A(a_1, a_2) = (a_1, m(a_1, a_2))$, мы находим, что $p_{134*}S_A$ также изоморфен $\mathcal{O}_{T_A}[-n]$. Аналогично, можно проверить, что $p_{134*}S_B^\vee[2n] = \mathcal{O}_{T_B}$.

Таким образом имеем, что

$$v_*H \cong p_{123}^*\mathcal{O}_{T_A} \otimes p_{24}^*\mathcal{E}^\vee \otimes p_{35}^*\mathcal{E} \otimes p_{456}^*\mathcal{O}_{T_B}$$

на V . Рассмотрим вложение

$$j : A \times A \times B \times B \longrightarrow V, \qquad (a_1, a_2, b_1, b_2) \mapsto (a_1, 0, a_2, 0, b_1, b_2).$$

Объект v_*H изоморфен j_*M , где

$$M = (\mathcal{E}^\vee|_{(0,0)}) \otimes p_{12}^*\mathcal{O}_{\Delta_A} \otimes p_{23}^*\mathcal{E} \otimes p_{34}^*\mathcal{O}_{\Delta_B}.$$

И окончательно получаем, что

$$K \cong p_{14*}M \cong (\mathcal{E}^\vee|_{(0,0)}) \otimes \mathcal{E}.$$

□

Предложение 3.2. *Пусть A и B – абелевы многообразия, и $\mathcal{E}$ – объект категории $D^b(A \times B)$ такой, что функтор $\Phi_\mathcal{E} : D^b(A) \xrightarrow{\sim} D^b(B)$ есть точная эквивалентность. Тогда $\mathcal{E}$ имеет только одну нетривиальную когомологию, т.е. он изоморфен объекту $\mathcal{F}[n]$, где $\mathcal{F}$ является пучком на $A \times B$.*

Доказательство. Рассмотрим проекцию

$$q : (A \times \widehat{A}) \times (B \times \widehat{B}) \longrightarrow A \times B$$

и обозначим через q' ее ограничение на абелево подмногообразие X , которое есть носитель пучка $\mathcal{J}(\mathcal{E})$ и график изоморфизма $f_\mathcal{E}$. По Теореме 2.10 пучок $\mathcal{J}(\mathcal{E})$ есть $i_*(L)$, где L линейное расслоение на X .

Обозначим через K объект $\mathbf{R}^{\cdot}q_*\mathcal{J}(\mathcal{E}) = \mathbf{R}^{\cdot}q'_*L$. Морфизм q' является гомоморфизмом абелевых многообразий. Пусть d – это размерность $Ker(q')$. Тогда $\dim Im(q') = 2n - d$, и значит, пучки когомологий $H^j(K)$ тривиальны для $j \notin [0, d]$.

С другой стороны, по Лемме 3.1 объект K изоморфен $\mathcal{E} \otimes (\mathcal{E}^\vee\,|_{(0,0)})$.

Сдвигая, если необходимо, объект $\mathcal{E}$ в производной категории, мы можем предполагать, что самая правая ненулевая когомология $\mathcal{E}$ есть $H^0(\mathcal{E})$. Пусть $H^{-i}(\mathcal{E}),\ i \geq 0,$ – это крайняя слева ненулевая когомология $\mathcal{E}$, а $H^k(\mathcal{E}^\vee)$ – старшая ненулевая когомология объекта $\mathcal{E}^\vee$. Заменяя, если необходимо, $\mathcal{E}$ на $T_{(a,b)}^*\mathcal{E}$, мы можем считать, что точка $(0, 0)$ принадлежит носителю пучка $H^k(\mathcal{E}^\vee)$. Так как носитель $\mathcal{E}$ совпадает с носителем K , то носители всех пучков когомологий $\mathcal{E}$ принадлежат $Im(q')$. В частности, мы имеем $\operatorname{codim}\operatorname{Supp} H^{-i}(\mathcal{E}) \geq d$. Следовательно, все когомологии объекта $(H^{-i}(\mathcal{E}))^{\vee}[-i]$ степени меньшей $i+d$ тривиальны.

Канонический морфизм $H^{-i}(\mathcal{E})[i] \longrightarrow \mathcal{E}$ индуцирует нетривиальный морфизм

$$\mathcal{E}^{\vee} \longrightarrow (H^{-i}(\mathcal{E}))^{\vee}[-i].$$

Так как номера нетривиальных когомологий второго объекта принадлежат лучу $[i+d, \infty)$, мы получаем, что $k \geq i+d$, где $H^k(\mathcal{E}^{\vee})$, как и раньше, – старшая ненулевая когомология $\mathcal{E}^{\vee}$. Таким образом получаем, что объект

$$K = \mathcal{E}^{\vee} \mid_{(0,0)} \otimes \mathcal{E} \tag{10}$$

имеет нетривиальную когомологию с тем же самым номером $k \geq i+d$. С другой стороны, мы уже знаем, что все пучки когомологий $H^j(K)$ тривиальны для $j \notin [0,d]$. Это возможно только при условии $i=0$. И значит, объект $\mathcal{E}$ имеет только одну нетривиальную когомологию с номером 0 , следовательно, изоморфен пучку. □

Рассмотрим сейчас случай $B \cong A$. Пусть $\mathcal{E}$ – пучок на $A \times A$ такой, что $\Phi_{\mathcal{E}}$ является автоэквивалентностью. Мы хотим описать все такие $\mathcal{E}$, для которых $f_{\mathcal{E}}$ тождественное отображение, т.е. его график X является диагональю в $(A \times \widehat{A}) \times (A \times \widehat{A})$. Таким образом, мы получаем, что объект

$$K = \mathcal{E}^{\vee} \mid_{(0,0)} \otimes \mathcal{E} = \mathbf{R}^{\cdot} q_* \mathcal{J}(\mathcal{E})$$

имеет вид $\Delta_*(M)$, где M – объект на A , а $\Delta : A \longrightarrow A \times A$ – диагональное вложение.

В начале предположим, что точка $(0,0)$ принадлежит носителю пучка $\mathcal{E}$. Следовательно, $\mathcal{E}^{\vee} \mid_{(0,0)}$ является нетривиальным комплексом векторных пространств. Тогда условие $K = \Delta_*(M)$ влечет существование пучка E на A такого, что $\mathcal{E} \cong \Delta_*(E)$. Следовательно $\Phi_{\mathcal{E}}(\cdot) \cong E \otimes (\cdot)$. Так как $\Phi_{\mathcal{E}}$ – автоэквивалентность, то E является линейным расслоением. Нетрудно проверить, что условие $f_{\mathcal{E}} = id$ может выполнятся только если $E \in \operatorname{Pic}^0(A)$.

Если точка $(0,0)$ не принадлежит $\operatorname{Supp}\mathcal{E}$, мы можем заменить $\mathcal{E}$ на пучок $\mathcal{E}' := T_{(a_1,a_2)*}\mathcal{E}$ так что его носитель уже содержит $(0,0)$. Из Предложения 2.14 следует, что $f_{\mathcal{E}'} = f_{\mathcal{E}}$. Как было показано выше, имеется изоморфизм $\mathcal{E}' \cong \Delta_*(E')$, где $E' \in \operatorname{Pic}^0(A)$. Следовательно, $\mathcal{E} \cong T_{(a_1-a_2,0)*}\Delta_*(E')$. Таким образом мы получаем следующее следствие.

Предложение 3.3. *Пусть A – абелево многообразие. Тогда ядро гомоморфизма*

$$\gamma_A : AuteqD^b(A) \longrightarrow U(A \times \widehat{A})$$

состоит из автоэквивалентностей вида $\Phi_{(a,\alpha)}[i] = T_{a*}(\cdot) \otimes P_{\alpha}[i]$ и, следовательно, изоморфно группе $\mathbb{Z} \oplus (A \times \widehat{A})_k$, где $(A \times \widehat{A})_k$ – группа k-точек абелева многообразия $A \times \widehat{A}$.

Следствие 3.4. *Пусть A и B – два абелевых многообразия, а $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ – объекты на произведении $A \times B$, которые задают эквивалентности между производными категориями когерентных пучков. Тогда, если $f_{\mathcal{E}_1} = f_{\mathcal{E}_2}$, то*

$$\mathcal{E}_2 \cong T_{a*}\mathcal{E}_1 \otimes P_{\alpha}[i]$$

для некоторой k-точки $(a, \alpha) \in A \times \widehat{A}$.

4. Полуоднородные векторные расслоения.

В предыдущих параграфах мы показали, что эквивалентность $\Phi_{\mathcal{E}}$ из $D^b(A)$ в $D^b(B)$ индуцирует изометричный изоморфизм многообразий $A \times \widehat{A}$ и $B \times \widehat{B}$. В этом параграфе мы предполагаем, что поле k алгебраически замкнуто и $\mathrm{char}(k) = 0$. И в этих предположениях, используя технику статьи [10] и результаты из [1], мы покажем, что каждый изометричный изоморфизм $f : A \times \widehat{A} \longrightarrow B \times \widehat{B}$ может быть реализован таким образом. Тот факт, что существование изометричного изоморфизма между многообразиями $A \times \widehat{A}$ и $B \times \widehat{B}$ влечет эквивалентность производных категорий $D^b(A)$ и $D^b(B)$, был доказан в статье [13]. Мы, таким образом, даем другое доказательство этого результата.

В начале напомним, что любое линейное расслоение L на абелевом многообразии D дает отображение ϕ_L из D в $\widehat{D}$, которое посылает точку d в точку, соответствующую расслоению $T_d^* L \otimes L^{-1} \in \mathrm{Pic}^0(D)$. Это соответствие задает вложение $NS(D)$ в $\mathrm{Hom}(D, \widehat{D})$. Более того, известно, что отображение $\phi : D \longrightarrow \widehat{D}$ принадлежит образу $NS(D)$ тогда и только тогда, когда $\widehat{\phi} = \phi$.

Полуоднородные расслоения на абелевом многообразии позволяют обобщить описаный выше феномен следующим образом. С каждым элементом из $NS(D) \otimes \mathbb{Q}$ можно связать некоторое соответствие на $D \times \widehat{D},$ и любое такое соответствие получается из полуоднородного расслоения (см. Предложение 4.6 и Лемму 2.13 ниже).

В начале напомним определения однородных и полуоднородных расслоений на абелевых многообразиях и некоторые факты про них.

Определение 4.1. *Векторное расслоение E на абелевом многообразии D называется* однородным, *если $T_d^*(E) \cong E$ для каждой точки $d \in D$.*

Определение 4.2. *Векторное расслоение F на абелевом многообразии D называется* унипотентным, *если существует фильтрация*

$$0 = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_n = F$$

такая, что $F_i / F_{i-1} \cong \mathcal{O}_D$ для всех $i = 1, ..., n$.

Следующее предложение дает характеризацию однородных векторных расслоений.

Предложение 4.3. [8], [10] *Пусть E – векторное расслоение на абелевом многообразии D . Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) *E – однородное,*

(ii) *существуют линейные расслоения $P_i \in \mathrm{Pic}^0(D)$ и унипотентные расслоения F_i такие, что $E \cong \bigoplus_i (F_i \otimes P_i)$.*

Определение 4.4. *Векторное расслоение E на абелевом многообразии D называется* полуоднородным, *если для каждой точки $d \in D$ существует линейное расслоение L на D такое, что $T_d^*(E) \cong E \otimes L$. (Отметим, что L в этом случае принадлежит $\mathrm{Pic}^0(D)$).*

Напомним, что векторное расслоение на многообразии называется простым, если его алгебра эндоморфизмов совпадает с полем k .

Следующее утверждение доказано в [10].

Предложение 4.5. ([10], Th.5.8.) *Пусть* E *– простое векторное расслоение на абелевом многообразии* D *. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) $\dim \mathrm{H}^j(D, \mathcal{E}nd(E)) = \binom{n}{j}$ *для любого* $j = 0, ..., n,$

(2) E *– полуоднородное расслоение,*

(3) $\mathcal{E}nd(E)$ *– однородное расслоение,*

(4) *существуют изогения* $\pi : Y \longrightarrow D$ *и линейное расслоение* L *на* Y *такие, что* $E \cong \pi_*(L)$.

Пусть E будет векторное расслоение на абелевом многообразии D . Обозначим через $\mu(E)$ класс эквивалентности $\frac{det(E)}{r(E)}$ в $\mathrm{NS}(D) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

С любым елементом $\mu = \frac{[L]}{l} \in \mathrm{NS}(D) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, и значит, с любым расслоением E , мы можем связать некоторое соответствие $\Phi_\mu \subset D \times \widehat{D}$, заданное по правилу $\Phi_\mu = \mathrm{Im}\Big[D \overset{(l,\phi_L)}{\longrightarrow} D \times \widehat{D}\Big]$. Где ϕ_L – хорошо известное отображение из D в $\widehat{D}$, которое посылает точку d в точку, соответствующую расслоению $T_d^* L \otimes L^{-1} \in \mathrm{Pic}^0(D)$. Обозначим через q_1 и q_2 проекции Φ_μ на D и $\widehat{D}$ соответственно. В частном случае, когда расслоение является линейным расслоением L , мы получаем график самого отображения $\phi_L : D \longrightarrow \widehat{D}$.

В работе [10] дается полное описание всех простых полуоднородных расслоений.

Предложение 4.6. ([10], Th.7.10.) *Пусть* $\mu = \frac{[L]}{l}$ *, где* $[L]$ *– это класс эквивалентности расслоения* L *в* $\mathrm{NS}(D)$ *и* l *некоторое положительное целое число. Тогда*

(1) *Существует простое полуоднородное векторное расслоение* E *с наклоном* $\mu(E) = \mu$.

(2) *Всякое простое полуоднородное векторное расслоение* E' *с наклоном* $\mu(E') = \mu$ *имеет вид* $E \otimes M$ *для некоторого линейного расслоения* $M \in \mathrm{Pic}^0(D)$.

(3) *Выполнены равенства* $r(E)^2 = \deg(q_1),$ *и* $\chi(E)^2 = \deg(q_2).$

Следующее утверждение позволяет охарактеризовать все полуоднородные векторные расслоения в терминах простых расслоений.

Предложение 4.7. ([10], Pr.6.15, 6.16) *Всякое полуоднородное векторное расслоение* F *с наклоном* μ *имеет фильтрацию*

$$0 = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_n = F$$

такую, что $E_i = F_i/F_{i-1}$ *простые полуоднородные векторные расслоения с тем же самым наклоном* μ *. И всякое простое полуоднородное расслоение стабильно.*

Следующие две леммы про полуоднородные расслоения, которые являются прямыми следствиями предыдущих утверждений, будут полезны нам в дальнейшем.

Лемма 4.8. *Два простых полуоднородных расслоения* E_1 *и* E_2 *с одним и тем же наклоном* μ *либо изоморфны, либо ортогональны друг другу, т.е. либо* $E_1 = E_2$ *, либо*

$$\mathrm{Ext}^i(E_1, E_2) = 0, \qquad \mathrm{Ext}^i(E_2, E_1) = 0$$

для всех i *.*

Доказательство. Из Предложения 4.6 следует, что $E_2 \cong E_1 \otimes M$, и, следовательно, $\mathcal{H}om(E_1, E_2)$ является однородным расслоением. Всякое однородное расслоение по Предложению 4.3 представляется в виде суммы унипотентных расслоений, подкрученных на линейные из $\mathrm{Pic}^0(D)$. Поэтому, либо все когомологии $\mathcal{H}om(E_1, E_2)$ равны нулю, и значит, расслоения E_1 и E_2 ортогональны, либо у $\mathcal{H}om(E_1, E_2)$ существует ненулевое сечение. В последнем случае получаем ненулевой гомоморфизм из E_1 в E_2 . Но эти два расслоения стабильны и имеют одинаковый наклон. Значит, любой ненулевой гомоморфизм на самом деле является изоморфизмом. □

Лемма 4.9. *Пусть E – простое полуоднородное векторное расслоение на абелевом многообразии D . Тогда $T_d^*(E) \cong E \otimes P_\delta$, если и только если $(d, \delta) \in \Phi_\mu$.*

Доказательство. Давайте в начале покажем, что для каждой точки $(d, \delta) \in \Phi_\mu$ имеется изоморфизм $T_d^*(E) \cong E \otimes P_\delta$. Действительно, положим $l = r(E)$ и $L = det(E)$. Мы знаем, что по определению Φ_μ можно записать $(d, \delta) = (lx, \phi_L(x))$ для некоторой точки $x \in D$. Так как E полуоднородно, найдется линейное расслоение $M \in \mathrm{Pic}^0(D)$ такое, что

$$T_x^*(E) \cong E \otimes M. \tag{11}$$

Сравнивая детерминанты, получаем равенство $T_x^*(L) \cong L \otimes M^{\otimes l}$. По определению отображения ϕ_L , это значит, что $P_{\phi_L(x)} = M^{\otimes l}$. С другой стороны, итерируя равенство (11) l-раз, получаем

$$T_{lx}^*(E) \cong E \otimes M^{\otimes l} = \mathcal{E} \otimes P_{\phi_L(x)}.$$

И следовательно $T_d^*(E) \cong E \otimes P_\delta$, так как $(d, \delta) = (lx, \phi_L(x))$.

В обратную сторону. Давайте введем подгруппу $\Sigma^0(E) \subset \widehat{D},$ заданную условием

$$\Sigma^0(E) := \{\delta \in \widehat{D} \ | \ E \otimes P_\delta \cong E\}. \tag{12}$$

Так как E полуоднородно, то расслоение $\mathcal{E}nd(E)$ однородно по Предложению 4.5. Таким образом, $\mathcal{E}nd(E)$ можно представить как сумму $\bigoplus\limits_i (F_i \otimes P_i)$, где все F_i унипотентны. Следовательно, $H^0(\mathcal{E}nd(E) \otimes P) \neq 0$ не более чем для r^2 линейных расслоений $P \in \mathrm{Pic}^0(D)$. То есть порядок группы $\Sigma^0(E)$ не больше r^2 . С другой стороны мы знаем, что $q_2(Ker(q_1)) \subset \Sigma^0(E)$. Следовательно, получаем, что $\mathrm{ord}\Sigma^0(E) = r^2$ и $q_2(Ker(q_1)) = \Sigma^0(E)$.

Предположим теперь, что $T_d^*(E) \cong E \otimes P_\delta$ для некоторой точки $(d, \delta) \in D \times \widehat{D}$. Рассмотрим некоторую точку $\delta' \in \widehat{D}$ такую, что $(d, \delta') \in \Phi_\mu$. Как мы уже показали, в этом случае имеется изоморфизм $T_d^*(E) \cong E \otimes P_{\delta'}$. Следовательно, $E \otimes P_{(\delta - \delta')} \cong E$, и значит $(\delta - \delta') \in \Sigma^0(E)$. Но так как $\Sigma^0(E) = q_2(Ker(q_1))$, то точка $(0, \delta - \delta')$ принадлежит Φ_μ . И значит, точка (d, δ) также принадлежит Φ_μ . □

Теперь мы приведем конструкцию, которая показывает, как по изометричному изоморфизму f можно построить объект $\mathcal{E}$ на произведении такой, что он задает эквивалентность производных категорий, и для которого $f_\mathcal{E}$ совпадает с f .

Конструкция 4.10. Давайте зафиксируем изометричный изоморфизм $f : A \times \widehat{A} \longrightarrow B \times \widehat{B}$. Обозначим через Γ его график. Изоморфизм $f,$ как и раньше, будем записывать в матричной форме

$$f = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

Мы предположим, что $y : \widehat{A} \longrightarrow B$ является изогенией. В этом случае мы можем сопоставить отображению f элемент $g \in \mathrm{Hom}(A \times B,\ \widehat{A} \times \widehat{B}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, который имеет следующую форму:

$$g = \begin{pmatrix} y^{-1}x & -y^{-1} \\ -\widehat{y}^{-1} & wy^{-1} \end{pmatrix}.$$

Элемент g задает некоторое соответствие на $(A \times B) \times (\widehat{A} \times \widehat{B})$. Легко проверить, что изометричность f влечет равенство $\widehat{g} = g$. Это значит, что элемент g на самом деле принадлежит образу $\mathrm{NS}(A \times B) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ при каноническом вложении в $\mathrm{Hom}(A \times B,\ \widehat{A} \times \widehat{B}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ (см. например [11]). Следовательно, существует $\mu = \frac{[L]}{l} \in \mathrm{NS}(A \times B)$ такое, что Φ_μ совпадает с графиком соответствия g. Предложение 4.6 говорит нам, что по каждому μ можно построить простое полуоднородное расслоение $\mathcal{E}$ на $A \times B$ с наклоном $\mu(\mathcal{E}) = \mu$.

Чуть ниже мы покажем, что функтор $\Phi_{\mathcal{E}}$ из $D^b(A)$ в $D^b(B)$ является эквивалентностью и $f_{\mathcal{E}} = f$. Но сначала давайте сравним графики Γ и Φ_μ. Если точка (a, α, b, β) принадлежит Γ, то

$$\begin{array}{ll} b & = x(a) + y(\alpha), \\ \beta & = z(a) + w(\alpha), \end{array} \quad \text{и следовательно} \quad \begin{array}{llll} \alpha = & -y^{-1}x(a) & + & y^{-1}(b), \\ \beta = & (z - wy^{-1}x)(a) & + & wy^{-1}(b). \end{array}$$

Изометричность f влечет равенство $(z - wy^{-1}x) = -\widehat{y}^{-1}$. И значит, точка (a, α, b, β) принадлежит графику Γ тогда и только тогда, когда $(a, -\alpha, b, \beta)$ принадлежит Φ_μ. Таким образом, мы находим, что

$$\Phi_\mu = (1_A, -1_{\widehat{A}}, 1_B, 1_{\widehat{B}})\Gamma.$$

В частности, из-за того, что f изоморфизм, следует, что проекции Φ_μ на $A \times \widehat{A}$ и $B \times \widehat{B}$ являются изоморфизмами.

Предложение 4.11. *Пусть $\mathcal{E}$ – полуоднородное расслоение на $A \times B$, построенное по изометричному изоморфизму f, описанным выше способом. Тогда функтор $\Phi_{\mathcal{E}} : D^b(A) \longrightarrow D^b(B)$ является эквивалентностью.*

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{E}_a$ ограничение расслоения $\mathcal{E}$ на слой $\{a\} \times B$. По Теореме 1.5 для того, чтобы доказать, что $\Phi_{\mathcal{E}}$ вполне строгий, достаточно проверить, что все расслоения $\mathcal{E}_a$ простые и ортогональны друг другу для разных точек.

Во-первых, заметим, что ранг расслоения $\mathcal{E}$ равен по Предложению 4.6 квадратному корню из степени отображения $\Phi_\mu \longrightarrow A \times B$, т.е. есть $\sqrt{\deg(\beta)}$.

Из полуоднородности $\mathcal{E}$ немедленно следует, что все расслоения $\mathcal{E}_a$ также полуоднородны. Кроме того, наклон ограничения $\mu(\mathcal{E}_a)$ равен $\delta\beta^{-1} \in \mathrm{NS}(B) \otimes \mathbb{Q} \subset \mathrm{Hom}(B,\ \widehat{B}) \otimes \mathbb{Q}$. Обозначим $\delta\beta^{-1}$ для краткости через ν, рассматривая его как элемент $\mathrm{NS}(B) \otimes \mathbb{Q}$. Предложение 4.6 утверждает существование простого полуоднородного расслоения F на B с данным наклоном $\mu(F) = \nu$. Очевидно, что Φ_ν в этом случае есть $\mathrm{Im}\Big[\widehat{A} \xrightarrow{(\beta,\delta)} B \times \widehat{B}\Big]$. Так как f изоморфизм, то отображение $\widehat{A} \xrightarrow{(\beta,\delta)} B \times \widehat{B}$ является вложением. Следовательно, опять применяя Предложение 4.6 получаем равенство $r(F) = \sqrt{\deg(\beta)} = r(\mathcal{E}_a)$. Таким образом, два расслоения F и $\mathcal{E}_a$ полуоднородны и имеют одинаковые наклон и ранг. Кроме того, расслоение F простое. Из Предложений 4.7 и 4.6 (2) следует, что $\mathcal{E}_a$ также простое расслоение.

Далее, из Леммы 4.8 следует, что расслоения $\mathcal{E}_{a_1}$ и $\mathcal{E}_{a_2}$ для двух точек $a_1, a_2 \in A$ либо ортогональны, либо изоморфны. Предположим, что они изоморфны. Так как расслоение $\mathcal{E}$

полуоднородно, то

$$T^*_{(a_2-a_1,0)}\mathcal{E} \cong \mathcal{E}\otimes P_{(\alpha,\beta)} \tag{13}$$

для некоторой точки $(\alpha,\beta)\in\widehat{A}\times\widehat{B}$. В частности, получаем

$$\mathcal{E}_{a_2}\otimes P_\beta \cong \mathcal{E}_{a_1}\cong \mathcal{E}_{a_2}.$$

Следовательно $P_\beta\in\Sigma^0(\mathcal{E}_a)$ (см. (12)).

По Лемме 4.9 и Предложению 4.6 порядки $\Sigma^0(E)$ и $\Sigma^0(E_a)$ равны r^2 . Мы утверждаем, что естественное отображение $\sigma:\Sigma^0(\mathcal{E})\longrightarrow\Sigma^0(\mathcal{E}_a)$ является изоморфизмом. Действительно, в противном случае нашлась бы точка $\alpha'\in\widehat{A}$ такая, что $\mathcal{E}\otimes P_{\alpha'}\cong\mathcal{E}$. И по Лемме 4.9 тогда $(0,\alpha',0,0)\in\Phi_\mu$. А это противоречит тому, что проекция $\Phi_\mu\longrightarrow B\times\widehat{B}$ есть изоморфизм.

Теперь, если σ изоморфизм, то найдется точка $\alpha'\in\widehat{A}$ такая, что $\mathcal{E}\otimes P_{(\alpha',\beta)}\cong\mathcal{E}$. Из равенства (13) следует, что

$$T^*_{(a_2-a_1,0)}\mathcal{E}\cong\mathcal{E}\otimes P_{(\alpha-\alpha',0)}.$$

По Лемме 4.9 это значит, что точка $(a_2-a_1,\alpha-\alpha',0,0)$ принадлежит Φ_μ . Опять, так как проекция $\Phi_\mu\longrightarrow B\times\widehat{B}$ есть изоморфизм, то получаем равенство $a_2-a_1=0$. Таким образом, для двух разных точек a_1 and a_2 расслоения $\mathcal{E}_{a_1}$ и $\mathcal{E}_{a_2}$ ортогональны . И следовательно, функтор $\Phi_{\mathcal{E}}:D^b(A)\longrightarrow D^b(B)$ является вполне строгим. По тем же соображениям сопряженный функтор $\Psi_{\mathcal{E}^\vee}$ так же является вполне строгим. Следовательно, $\Phi_{\mathcal{E}}$ – эквивалентность. □

Предложение 4.12. *Пусть $\mathcal{E}$ – полуоднородное расслоение, построенное описанным выше способом по изометричному изоморфизму $f:A\times\widehat{A}\longrightarrow B\times\widehat{B}$. Тогда имеется равенство $f_{\mathcal{E}}=f$.*

Доказательство. Обозначим через X график морфизма $f_{\mathcal{E}}$. Из Следствия 2.13 следует, что точка (a,α,b,β) принадлежит X тогда и только тогда, когда

$$T_{b*}\mathcal{E}\otimes P_\beta\cong T^*_a\mathcal{E}\otimes P_\alpha.$$

Что равносильно равенству

$$T^*_{(a,b)}\mathcal{E}\cong E\otimes P_{(-\alpha,\beta)}.$$

Следовательно, по Лемме 4.9 получаем, что $X=(1_A,-1_{\widehat{A}},1_B,1_{\widehat{B}})\Phi_\mu$ где $\mu=\mu(\mathcal{E})$ это наклон $\mathcal{E}$. С другой стороны, по конструкции, описанной в 4.10 график Γ отображения f также есть $(1_A,-1_{\widehat{A}},1_B,1_{\widehat{B}})\Phi_\mu$. Значит, изоморфизмы $f_{\mathcal{E}}$ и f совпадают. □

При построении расслоения $\mathcal{E}$ по изоморфизму f мы предположили, что отображение $y:\widehat{A}\longrightarrow B$ является изогенией. Если это не так, то мы представим f как композицию двух отображений $f_1\in U(A\times\widehat{A},\ B\times\widehat{B})$ и $f_2\in U(A\times\widehat{A})$ для которых y_1 и y_2 являются изогениями. Легко увидеть, что это всегда можно сделать. Теперь для каждого f_i найдем свой объект $\mathcal{E}_i$, далее рассмотрим композицию функторов $\Phi_{\mathcal{E}_i}$ и возьмем объект ее представляющий.

Утверждения, доказанные в этом и предыдущих параграфах, мы можем объединить в следующие теоремы.

Теорема 4.13. *Пусть A и B – два абелевых многообразия над алгебраически замкнутым полем характеристики 0 . Тогда ограниченные производные категории когерентных пучков $D^b(A)$ и $D^b(B)$ эквивалентны как триангулированные категории тогда и только тогда, когда существует изометричный изоморфизм $f:A\times\widehat{A}\xrightarrow{\sim}B\times\widehat{B}$.*

Теорема 4.14. *Пусть* A *– абелево многообразие над алгебраически замкнутым полем характеристики* 0 *. Тогда группа точных автоэквивалентностей производной категории* $AuteqD^b(A)$ *может быть включена в следующую короткую точную последовательность групп:*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus (A \times \widehat{A})_k \longrightarrow AuteqD^b(A) \longrightarrow U(A \times \widehat{A}) \longrightarrow 1.$$

Давайте чуть более подробно исследуем группу $AuteqD^b(A)$. Она имеет нормальную подгруппу $(A \times \widehat{A})_k$, которая состоит из функторов вида $T_{a*}(\cdot) \otimes P_\alpha$, где $(a, \alpha) \in A \times \widehat{A}$. Фактор по этой погруппе является центральным расширением $U(A \times \widehat{A})$ с помощью $\mathbb{Z}$. Обозначим это центральное расширение как $\widetilde{U}(A \times \widehat{A})$. Имеются короткие точные последовательности:

$$0 \longrightarrow (A \times \hat{A})_k \longrightarrow AuteqD^b(A) \longrightarrow \widetilde{U}(A \times \widehat{A}) \longrightarrow 1, \tag{14}$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \widetilde{U}(A \times \hat{A}) \longrightarrow U(A \times \widehat{A}) \longrightarrow 1. \tag{15}$$

Для того, чтобы описать центральное расширение (15), достаточно задать 2-коцикл $\lambda(g_1, g_2) \in \mathbb{Z}$, где g_1 и g_2 элементы $U(A \times \widehat{A})$.

Из Предложения 3.2 следует, что, если $\Phi_{\mathcal{E}}$ является эквивалентностью, то объект $\mathcal{E} \in D^b(A \times A)$ изоморфен $E[k]$ для некоторого пучка E на $A \times A$. Пусть E и F – два пучка на $A \times A$, которые задают автоэквивалентности Φ_E и Φ_F . Тогда композиция $\Phi_F \circ \Phi_E$ представляется некоторым объектом $G[k]$, где G - это пучок. Положим, $\lambda(f_F, f_E) = k$. Очевидно, что λ есть 2-коцикл, который и задает центральное расширение (15).

Давайте вычислим коцикл λ в терминах элементов группы $U(A \times \widehat{A})$. Для простоты положим $k = \mathbb{C}$. Тогда $A \cong \mathbb{C}^n / \mathbb{Z}^{2n}$, и каждому линейному расслоению L на A можно сопоставить Эрмитову форму $H(L)$ на $\mathbb{C}^n$ (see [11]). Обозначим через $p(H)$ число положительных собственых значений H . Мы получаем функцию $p : \mathrm{NS}(A) \to \mathbb{Z}$. Ее можно продолжить на $\mathrm{NS}(A) \otimes \mathbb{R}$ по правилу: $p(\sum\limits_i r_i[L_i]) = p(\sum\limits_i r_i H(L_i))$. Таким образом, мы получаем полунепрерывную снизу функцию p на всем $\mathrm{NS}(A) \otimes \mathbb{R}$. (Нетрудно определить функцию p и для произвольного алгебраически замкнутого поля. Действительно, мы можем положить $p(L)$ равным числу отрицательных корней многочлена $P(n) = \chi(L \otimes M^n)$, где M некоторое обильное линейное расслоение. После этого можно продолжить функцию p на все $\mathrm{NS}(A) \otimes \mathbb{R}$ описанным выше способом.)

Рассмотрим теперь два элемента $U(A \times \widehat{A})$:

$$g_1 = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & w_1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad g_2 = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & w_2 \end{pmatrix} \tag{16}$$

такие, что y_1 и y_2 изогении. Это значит, что существуют обратные $y_1^{-1}, y_2^{-1} \in \mathrm{Hom}(A, \widehat{A}) \otimes \mathbb{Q}$. Теперь запишем:

$$g_1 g_2 = \begin{pmatrix} x_3 & y_3 \\ z_3 & w_3 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим элемент $y_1^{-1} y_3 y_2^{-1} = y_1^{-1} x_1 + w_2 y_2^{-1}$ группы $\mathrm{Hom}(A, \widehat{A}) \otimes \mathbb{Q}$. Легко видеть, что он принадлежит $\mathrm{NS}(A) \otimes \mathbb{Q}$. Не трудно доказать, что существует равенство

$$\lambda(g_1, g_2) = p(y_1^{-1} y_3 y_2^{-1}) - n.$$

Таким образом, мы можем задать формулу для $\lambda(g_1, g_2)$ в том случае, когда y_1 и y_2 обратимы. Так как λ есть коцикл, он определяется этой формулой и может быть однозначно продолжен на всю группу $U(A \times \widehat{A}, \mathbb{R}) \subset \mathrm{End}(A \times \widehat{A}) \otimes \mathbb{R}$.

Пример 4.15. Рассмотрим пример $A = E^n$, где E эллиптическая кривая без комплексного умножения. В этом случае группа $U(A \times \widehat{A})$ изоморфна $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z})$. Хорошо известно, что фундаментальная группа вещественной симплектической группы $G = \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ изоморфна $\mathbb{Z}$ и существует универсальное центральное расширение $\widetilde{G}$. Кроме того, на симплектической группе существует $\mathbb{Z}$-значный 2-коцикл:

$$\mu(g_1, g_2) = \tau(l, g_1 l, g_1 g_2 l),$$

задаваемый индексом Маслова τ и некоторым лагранжевым подпространством l (смотри к примеру [7]). Существует формула для коцикла μ , записанная в матричном виде, подобно формуле (16). В тех же обозначениях она имеет вид:

$$\mu(g_1, g_2) = sign(y_1^{-1} y_3 y_2^{-1}),$$

где с правой стороны стоит сигнатура симметрической матрицы $y_1^{-1} y_3 y_2^{-1}$.

Сравнивая коциклы λ и μ , нетрудно увидеть, что коцикл $(2\lambda - \mu)$ тривиален как элемент вторых когомологий Более того известно, что вторые когомологии симплектической группы $G = \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ есть $\mathbb{Z}$, и образующая задает универсальное расширение $\widetilde{G}$. Известно также, что коцикл Маслова μ равен учетверенной образующей. Следовательно, для $\widetilde{G}_\lambda$ имеем точную последовательность $1 \to \widetilde{G} \to \widetilde{G}_\lambda \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$, которая на самом деле расщепляется, то есть $\widetilde{G}_\lambda$ изоморфна $\widetilde{G} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Пример 4.16. Рассмотрим абелево многообразие A с кольцом эндоморфизмов $\mathrm{End}(A) = \mathbb{Z}$. Тогда группа Нерона-Севери $\mathrm{NS}(A)$ изоморфна $\mathbb{Z}$. Обозначим через L и M образующие $\mathrm{NS}(A)$ и $\mathrm{NS}(\widehat{A})$ соответственно. Композиция $\phi_M \circ \phi_L$ есть $N \cdot id_A$ с некоторым $N > 0$. В этом случае группа $U(A \times \widehat{A})$ совпадает с конгруенц-подгруппой $\Gamma_0(N) \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$. Далеее, пусть B – это другое абелево многообразие такое, что $B \times \widehat{B}$ изоморфно $A \times \widehat{A}$. Легко проверить, что любой такой изоморфизм является изометричным. Абелево многообразие B можно представить как образ некоторого морфизма $A \xrightarrow{(k\cdot id,\, m\phi_L)} A \times \widehat{A}$. Можно считать, что $\text{Н.О.Д.}(k, m) = 1$. Обозначим через ψ этот морфизм из A в B . Ядро ψ есть $Ker(m\phi_L) \cap A_k$. Так как $\text{Н.О.Д.}(k, m) = 1$, то на самом деле $Ker(\psi) = Ker(\phi_L) \cap A_k$. С другой стороны, мы знаем, что $Ker(\phi) \subset A_N$. Таким образом, без потери общности можно считать, что k является делителем N . Каждый k делитель N индуцирует абелево многообразие $B := A/(Ker(\phi_L) \cap A_k)$. Очевидно, что два разных делителя N неизоморфные абелевы многообразия. Более того, легко проверить, что вложение B в $A \times \widehat{A}$ расщепляется тогда и только тогда, когда $\text{Н.О.Д.}(k, N/k) = 1$. Следовательно, число абелевых многообразий B таких, что $D^b(B) \simeq D^b(A)$ совпадает с 2^s , где s – число простых делителей N .

Давайте предположим дополнительно, что A главнополяризованное, т.е. мы имеем $N = 1$. В этом случае, если $D^b(A) \simeq D^b(B)$, то $B \cong A$. Более того, группа $U(A \times \widehat{A})$ изоморфно

$\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$. В работе [14] доказано, что для главнополяризованного абелева многообразия последовательность (14) расщепляется. Следовательно, мы имеем описание $AuteqD^b(A)$ как полупрямого произведения нормальной подгруппы $(A\times\widehat{A})_k$ и группы $\widetilde{U}(A\times\widehat{A})$, т.е.

$$AuteqD^b(A)\cong\widetilde{U}(A\times\widehat{A})\ltimes(A\times\widehat{A})_k,$$

и $\widetilde{U}(A\times\widehat{A})$ – центральное расширение $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, которое определяется коциклом λ . Можно показать, что существует последовательность:

$$1\longrightarrow B_3\longrightarrow\widetilde{U}(A\times\widehat{A})\longrightarrow\mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}\longrightarrow 0,$$

где B_3 группа кос с 3-мя нитями. (Напомним, что группа B_3 является универсальным центральным расширением $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, которое также индуцируется универсальным накрытием $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$.)

Список литературы

[1] A. Bondal, D. Orlov, *Semiorthogonal decomposition for algebraic varieties*, Preprint MPI/95-15 (alg-geom/9506012).

[2] A. Bondal, D. Orlov, *Reconstruction of a variety from the derived category and groups of autoequivalences*, Compositio Mathematica, 125 (2001) 3, 327-344.

[3] С. И. Гельфанд, Ю. И. Манин, *Методы гомологической алгебры. Введение в теорию когомологий и производных категорий*, Изд. "Наука", 1988.

[4] L. Gruson, M. Raynaud, *Critères de platitude et de projectivité*, Inventiones Math., 13 (1971), 1-89.

[5] R. Hartshorne, *Residues and duality*, Lecture Notes in Math., vol.20, Springer-Verlag, 1966.

[6] H. W. Lenstra, Jr. F. Oort, Yu. G. Zarhin, *Abelian subvarieties*, J. Algebra, v.180,(1996), 513-516.

[7] G. Lion, M. Vergne, *The Weil representation, Maslov index and theta series*, Birkhäuser, 1980.

[8] M. Miyanishi, *Some remarks on algebraic homogeneous vector bundles*, Number Theory, Alg.Geom. and Comm.Algebra, Kinokuniya, Tokyo, Japan, (1973), 71-93.

[9] S. Mukai, *Duality between* $D(X)$ *and* $D(\widehat{X})$ *with its application to Picard sheaves*, Nagoya Math. J. 81 (1981), 153–175.

[10] S. Mukai, *Semi-homogeneous vector bundles on an abelian variety*, J. Math. Kyoto Univ., v.18, N2 (1978), 239-272.

[11] D. Mumford, *Abelian varieties*, Oxford Univ. Press, Second Edition, 1974.

[12] D. Orlov, *Equivalences of derived categories and K3 surfaces*, Journal of Math. Sciences, Plenum Publ. Corp.,Vol.34, Alg. geom.-5, v.85, є6, (1997).

[13] A. Polishchuk, *Symplectic biextensions and generalization of the Fourier-Mukai transforms*, Math. Research Letters , v.3 (1996), 813-828.

[14] A. Polishchuk, *Biextensions, Weil representations on derived categories, and theta-functions* Ph.D. Thesis, Harvard University, 1996.

[15] J. L. Verdier, *Categories derivées*, SGA 4 1/2, Lecture Notes in Math., v.569, Springer-Verlag, 1977.

Отдел Алгебры, Математический Институт им. Стеклова РАН, ул. Губкина 8,
Москва, 117966 Россия.
orlov@mi.ras.ru