РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ имени В. А. СТЕКЛОВА

На правах рукописи

УДК 512.73

ОРЛОВ Дмитрий Олегович

ПРОИЗВОДНЫЕ КАТЕГОРИИ КОГЕРЕНТНЫХ ПУЧКОВ И ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ МЕЖДУ НИМИ

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва — 2002

Оглавление

Глава

Введение

Основными объектами изучения алгебраической геометрии являются алгебраические многообразия (или схемы) и морфизмы между ними. Каждое алгебраическое многообразие X – это окольцованное топологическое пространство и, таким образом, оснащено топологией (чаще всего Зариского) и пучком колец регулярных функций $\mathcal{O}_X$.

Изучение алгебраического многообразия – это в большой степени изучение пучков на этом многообразии. И, так как пространство окольцовано, то естественными пучками, если не сказать основными, являются пучки $\mathcal{O}_X$ -модулей, среди которых своей алгебраической природой выделяются квазикогерентные и когерентные пучки.

Таким образом, с каждым алгебраическим многообразием X связаны абелевы категории (квази)когерентных пучков на нем $\mathrm{coh}(X)$ и $\mathrm{Qcoh}(X)$. Морфизмы между многообразиями индуцируют функторы обратного и прямого образа между этими абелевыми категориями. Однако эти функторы не являются точными, то есть не переводят точные последовательности в точные. Это обстоятельство создает немалые трудности при работе с абелевыми категориями и неточными функторами между ними. Чтобы сохранить функториальность, Картан и Эйленберг ([26]) ввели понятие производных функторов, которые дают необходимые поправки к неточным функторам. Эта техника была развита Гротендиком в работе [17] и в дальнейшем привела к введению Вердье новых понятий: производной категории и производных функторов между ними [45].

В производных категориях в отличии от абелевых нет коротких точных последовательностей и не могут быть определены ядра и коядра морфизмов, но тем не менее производные категории обладают некоторой внутренней структурой, которая была оформлена Вердье в понятие триангулированной категории.

Переход от абелевых категорий к производным от них позволяет решить многие проблемы, связанные с трудностями при изучении естественных функторов. В качестве одного из первых примеров нужно отметить создание глобальной теории пересечения и доказательство теоремы Римана-Роха. Это было сделано Гротендиком и соавторами в [6] и стало возможным с введением триангулированной категории совершенных комплексов.

Другой пример, который хотелось бы отметить, связан с введением превратных пучков и установление соответствия Римана-Гильберта между голономными модулями с регулярными особенностями и конструктивными пучками, которое стало возможным только с привлечением понятия и техники триангулированных категорий (см. [5], [27]).

Из выше сказанного следует, что каждому алгебраическому многообразию естественным образом сопоставляются производные категории (квази)когерентных пучков. И многие вопросы, связанные с изучением многообразий, требуют исследования и описания этих триангулированных категорий. Первые шаги в этом направлении были сделаны в работах [4] и [3], в которых была описана производная категория когерентных пучков на проективных пространствах, что позволило в дальнейшем применить данную технику к исследованию многообразия модулей векторных расслоений на $\mathbb{P}^2$ и $\mathbb{P}^3$. Этот подход был в дальнейшем усовершенствован, что позволило получить описание производных категорий когерентных пучков на квадриках и на флаговых многообразиях ([22],[23], [24]).

Введение понятий исключительного набора и полуортогонального разложения, позволило сформулировать новые принципы для описания производных категорий когерентных пучков ([7], [8]). Оказалось, что при наличии полного исключительного набора производная категория когерентных пучков эквивалентна производной категории модулей над конечномерной алгеброй ([7]). Понятие полуортогонального разложения позволило дать описание производной категории раздутия в терминах производных категорий раздуваемого многообразия и подмногообразия, в котором это раздутие происходит ([37]).

Однако для многих типов многообразий описать производную категорию не представляется возможным. Но естественный вопрос, который возникает при переходе от многообразий к производным категориям когерентных пучков, можно грубо сформулировать так: как много информации сохраняется при таком сопоставлении. На самом деле, как выясняется, этот переход сохраняет "почти"всю информацию. Во многих случаях можно даже восстановить само многообразие по ее производной категории когерентных пучков. Например, если канонический (или антиканонический) пучок многообразия является обильным ([10]).

Тем не менее, для некоторых типов многообразий существуют примеры того, когда два разных многообразия имеют эквивалентные производные категории когерентных пучков. Первый пример двух разных многообразий с эквивалентными производными категориями когерентных пучков был найден Мукаи [33]. Он показал, что таковыми являются любое абелево многообразие и двойственное к нему. Эта конструкция была обобщена Полищуком в работе [42], где для каждого абелева многообразия был введен целый класс абелевых многообразий, имеющих ту же самую производную категорию когерентных пучков.

Эти примеры показывают, что, с одно стороны, существуют многообразия с эквивалентными производными категориями когерентных пучков, а с другой, что каждый такой класс "мал"(во всех примерах он конечен).

Однако, чтобы иметь полную классификацию многообразий с эквивалентными производными категориями когерентных необходимо дать описание эквивалентностей между ними. Эквивалентности всякий раз имеют геометрическую природу, то есть представляются некоторыми комплексами пучков на произведении.

Цель данной работы – доказать, что, на самом деле, любая эквивалентность является таковой, то есть задается объектом на произведении, и применить этот фундаментальный результат к изучению производных категорий когерентных пучков на гладких многообразиях и описанию их групп автоэквивалентностей.

Основные результаты диссертации кратко можно сформулировать следующим образом.

- Доказано принципиальное утверждение, позволяющее описывать гладкие проективные многообразия с эквивалентными производными категориями когерентных пучков, которое говорит, что любая эквивалентность между такими категориями может быть представлена объектом на произведении и это объект единственен с точностью до изоморфизма.

- Для K3 поверхностей на полем комплексных чисел дан в терминах структур Ходжа критерий того,

  когда две K3 поверхности имеют эквивалентные производные категории когерентных пучков.

- Для абелевых многообразий над произвольным полем приведено необходимое условие того, что абелевы многообразия имеют эквивалентные производные категории когерентных пучков и доказано, что над алгебраически замкнутым полем характеристики 0 это условие является достаточным.

- Для абелевых многообразий над алгебраически замкнутым полем характеристики 0 полностью описана группа автоэквивалентностей для производной категории когерентных пучков.

- Приведен пример бирационально изоморфных (но не изоморфных) многообразий, которые имеют эквивалентные производные категории когерентных пучков.

Теперь опишем содержание и структуру диссертации.

Во введении обоснована актуальность темы исследования, кратко рассмотрена история задач и их современное состояние, сформулированы основные результаты и описано содержание работы.

В первой главе вводятся основные понятия и формулируются факты, которые будут использоваться в диссертации.

В первом параграфе дается определение триангулированной категории и вводится понятие точного функтора между триангулированными категориями. Далее доказывается, что функтор, сопряженный к точному функтору, также является точным. Затем обсуждаются функторы Серра в триангулированных категориях и вводится понятие локализации триангулированной категории по полной подкатегории. В заключении дается общее определение производного функтора для локализованных триангулированных категорий.

Во втором параграфе напоминается определение гомотопической и производной категорий от абелевой категории, и обсуждаются свойства производных функторов.

В третьем параграфе обсуждаются свойства производных категорий когерентных и квазикогерентных пучков на схемах, а также напоминаются основные функторы между этими категориями такие как прямой и обратный образы, тензорное произведение, внутренний $\mathcal{H}om$.

Вторая глава посвящена ограниченным производным категориям когерентных пучков на гладких многообразиях и их основным свойствам. Ограниченная производная категория когерентных пучков $\mathbf{D}^b(X)$ является основным объектом данной работы. Любой морфизм $f : X \to Y$ между гладкими проективными многообразиями индуцирует два точных функтора: функтор прямого образа $\mathbf{R}f_* : \mathbf{D}^b(X) \longrightarrow \mathbf{D}^b(Y)$ и функтор обратного образа $\mathbf{L}f^* : \mathbf{D}^b(Y) \longrightarrow \mathbf{D}^b(X)$, и эти функторы сопряжены. Кроме того, каждый объект $\mathcal{E} \in \mathbf{D}^b(X)$ задает точный функтор тензорного умножения $\overset{\mathbf{L}}{\otimes} \mathcal{E} : \mathbf{D}^b(X) \longrightarrow \mathbf{D}^b(X)$.

Используя эти стандартные производные функторы, в первом параграфе вводится новый большой класс точных функторов между производными категориями $\mathbf{D}^b(X)$ и $\mathbf{D}^b(Y)$.

Пусть X и Y – два гладких проективных многообразия над полем k размерности n и m соответственно. Рассмотрим декартово произведение $X \times Y$ и обозначим через p и q проекции $X \times Y$ на X и соответственно на Y

$$X \xleftarrow{p} X \times Y \xrightarrow{q} Y.$$

Каждый объект $\mathcal{E} \in \mathbf{D}^b(X \times Y)$ задает точный функтор $\Phi_{\mathcal{E}}$ из производной категории $\mathbf{D}^b(X)$ в производную категорию $\mathbf{D}^b(Y)$, который определяется следующей формулой (2.2):

$$\Phi_{\mathcal{E}}(\cdot) := \mathbf{R}^{\cdot} q_*(\mathcal{E} \overset{\mathbf{L}}{\otimes} p^*(\cdot)).$$

Каждый функтор такого вида имеет левый и правый сопряженные функторы. В Лемме 2.1.1 даются формулы для сопряженных функторов, а в Предложении 2.1.2 описывается закон композиции для данного класса точных функторов.

Таким образом, каждому гладкому проективному многообразию сопоставляется производная категория когерентных пучков на нем, а с каждым объектом $\mathcal{E} \in \mathbf{D}^b(X \times Y)$ на произведении двух таких многообразий связывается точный функтор $\Phi_{\mathcal{E}}$ из триангулированной категории $\mathbf{D}^b(X)$ в триангулированную категорию $\mathbf{D}^b(Y)$. Исследованию этого соответствия и посвящена данная работа.

Более точно, центральными вопросами для понимания данного соответствия являются следующие два:

1) Когда производные категории когерентных пучков двух разных гладких проективных многообразий эквивалентны как триангулированные категории?

2) Какова группа точных автоэквивалентностей производной категории когерентных пучков для данного фиксированного многообразия X ?

Некоторые результаты в этом направлении были уже известны. К примеру, существует исчерпывающий ответ на данные вопросы в случае, когда канонический или антиканонический пучок многообразия является обильным.

Теорема 2.1.3([10]) *Пусть X – гладкое проективное многообразие, канонический (или антиканонический) пучок которого обилен. Предположим, что категория $\mathbf{D}^b(X)$ эквивалентна как триангулированная категория производной категории $\mathbf{D}^b(X')$ для некоторого гладкого алгебраического многообразия X'. Тогда многообразие X' изоморфно X .*

В этой ситуации можно описать и группу точных автоэквивалентностей. Для любого многообразия X группа точных автоэквивалентностей $\operatorname{Auteq}\mathbf{D}^b(X)$ всегда содержит подгруппу $G(X)$, которая есть полупрямое произведение нормальной подгруппы $G_1 = \operatorname{Pic}(X) \oplus \mathbb{Z}$ и подгруппы $G_2 = \operatorname{Aut} X$, действующей естественным образом на G_1. При этом включении $G(X) \subset \operatorname{Auteq}\mathbf{D}^b(X)$ образующая $\mathbb{Z}$ переходит в функтор сдвига $[1]$, линейное расслоение $\mathcal{L} \in \operatorname{Pic}(X)$ – в функтор $\otimes\mathcal{L}$, а автоморфизм $f : X \to X$ индуцирует автоэквивалентность $\mathbf{R}f_*$.

В условии теоремы 2.1.4, группа точных автоэквивалентностей $\operatorname{Auteq}\mathbf{D}^b(X)$ совпадает с $G(X) \cong \operatorname{Aut} X \ltimes (\operatorname{Pic}(X) \oplus \mathbb{Z})$.

Во втором параграфе второй главы приводится пример двух многообразий, имеющих эквивалентные производные категории когерентных пучков. Данный пример интерес тем, что эти два многообразия бирационально изоморфны и связаны преобразованием типа флоп. В частности, это показывает, что условие обильности канонического (или антиканонического) класса в Теореме 2.1.3 не может быть ослаблено.

В начале второго параграфа напоминаются основные результаты из работы [37], в которой описано поведение производной категории когерентных пучков при раздутии гладкого подмногообразия.

Используя это описание производной категории раздутия, исследуется поведение производной категории при простейших преобразованиях типа флип и флоп.

Пусть Y – гладкое подмногообразие в гладком собственном алгебраическом многообразии X такое, что $Y \cong \mathbb{P}^k$ с нормальным расслоением $N_{X/Y} \cong \mathcal{O}_Y(-1)^{\oplus(l+1)}$. Будем предполагать, что $l \le k$.

Обозначим через $\widetilde{X}$ раздутие X с центром вдоль Y . В этом случае исключительный дивизор $\widetilde{Y}$ изоморфен произведению проективных пространств $\mathbb{P}^k \times \mathbb{P}^l$. Кроме того, в данной ситуации имеется следующее описание нормального пучка к $\widetilde{Y}$ в $\widetilde{X}$. Существует сдутие $\widetilde{X}$ такое, что $\widetilde{Y}$ проектируется на второй сомножитель $\mathbb{P}^l$. Рассмотрим диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
 & \widetilde{Y} \arrow[dl, "p"'] \arrow[d, "j"] \arrow[dr, "p^+"] & \\
Y \arrow[d, "i"'] & \widetilde{X} \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\pi^+"] & Y^+ \arrow[d, "i^+"] \\
X \arrow[rr, dashed, "fl"] & & X^+
\end{tikzcd} \tag{1}$$

Бирациональное отображение $fl : X \longrightarrow X^+$ является простейшим примером преобразования типа флип-флоп и есть флип при $l < k$ и флоп при $l = k$.

Основная теорема этого параграфа связывает производные категории когерентных пучков на многообразиях X и X^+ .

Теорема 2.2.9 *Пусть* $\mathcal{L}$ *– линейное расслоение на* $\widetilde{X}$ *. В обозначения, введенных выше, функтор*

$$\mathbf{R}\pi_*(\mathbf{L}\pi^{+*}(\cdot) \otimes \mathcal{L}) : \mathbf{D}^b(X^+) \longrightarrow \mathbf{D}^b(X)$$

является вполне строгим.

Третья глава является центральной главой данной работы. Вся она целиком посвящена доказательству того факта, что любая эквивалентность между производными категориями когерентных пучков на гладких проективных многообразиях представляется объектом на произведении.

Это утверждение является основополагающим для изучения производных категорий когерентных пучков. Без него было бы невозможно описывать все эквивалентности между производными категориями когерентных пучков и отвечать на вопрос, когда два разных многообразия имеют эквивалентные производные категории когерентных пучков.

Существует гипотеза, что все функторы представляются объектами на произведении. Однако, доказательство этой гипотезы до сих пор не известно. Тем не менее, частный случай этой гипотезы имеет место. А именно, если функтор является вполне строгим и имеет сопряженный, то он может быть представлен объектом на произведении.

Теорема 3.2.1 *Пусть* F *– точный функтор из категории* $\mathbf{D}^b(M)$ *в категорию* $\mathbf{D}^b(X)$ *, где* M *и* X *– гладкие проективные многообразия. Предположим, что* F *является вполне строгим и имеет правый (или, соответственно, левый) сопряженный функтор. Тогда существует объект* $\mathcal{E} \in \mathbf{D}^b(M \times X)$ *такой, что функтор* F *изоморфен функтору* $\Phi_{\mathcal{E}}$ *, определенному по правилу (3.6), и этот объект однозначно определен с точностью до изоморфизма.*

Отсюда мы немедленно получаем, что всякая эквивалентность представляется объектом на произведении, так как любая эквивалентность имеет сопряженную, которая совпадает с квазиобратным функтором.

Теорема 3.2.2 *Пусть* X *и* M *– два гладких проективных многообразия. Предположим, что точный функтор* $F : \mathbf{D}^b(X) \xrightarrow{\sim} \mathbf{D}^b(M)$ *является эквивалентностью триангулированных категорий. Тогда существует единственный с точностью до изоморфизма объект* $\mathcal{E} \in \mathbf{D}^b(X \times M)$ *такой, что функтор* F *изоморфен функтору* $\Phi_{\mathcal{E}}$*.*

В первом параграфе третьей главы дается определения диаграмм Постникова в триангулированной категории и их сверток, и описываются условия на диаграммы Постникова, при которых можно гарантировать существование свертки и ее единственность.

Во втором параграфе формулируются основные результаты данной главы, вводится определение ограниченного функтора, и доказывается, что функтор между ограниченными производными категориями когерентных пучков на гладких многообразиях является ограниченным.

Третий параграф целиком посвящен построению объекта $\mathcal{E} \in \mathbf{D}^b(X \times M)$, который гипотетически должен представлять заданный вполне строгий функтор $F : \mathbf{D}^b(X) \longrightarrow \mathbf{D}^b(M)$. Для этого сначала многообразие M вкладывается в проективное пространство, затем, используя резольвенту диагонали для проективного пространства, строится объект $\mathcal{E}'$ на произведении $\mathbb{P} \times X$. Во второй части этого параграфа, показывается, что построенный объект $\mathcal{E}'$ на самом деле получается из некоторого объекта $\mathcal{E}$ на $M \times X$ при естественном вложении $J : M \times X \hookrightarrow \mathbb{P} \times X$.

В четвертом параграфе приводится доказательство того, что функторы F и $\Phi_{\mathcal{E}}$ изоморфны. Для этого, вводится понятие обильной последовательности в абелевой категории, и, используя наличие такой последовательности, последовательно по длине комплекса строится естественное преобразование между функторами F и $\Phi_{\mathcal{E}}$. В заключении показывается, что данное преобразование является изоморфизмом.

Пятый параграф является приложением. В нем обсуждается кошулевость алгебры Веронезе для очень обильного пучка $\mathcal{L}$ на гладком проективном многообразии. Результаты этого параграфа являются вспомогательными и используются в третьем параграфе при построении объекта на произведении. Они вынесены в отдельный параграф из-за своего объема и для того, чтобы не перегружать главную конструкцию данной главы.

В четвертой главе изучаются производные категории когерентных пучков на К3 поверхностях.

В первом параграфе для каждой К3 поверхности над полем комплексных чисел вводятся решетка Мукаи и решетка трансцедентных циклов.

Одним из основных инвариантов поверхности типа К3 является ее группа Нерона-Севери $\mathrm{NS}(S) \subset \mathrm{H}^2(S, \mathbb{Z})$, которая в этом случае совпадает с группой Пикара $\mathrm{Pic}(S)$. Ранг решетки $\mathrm{NS}(S)$ не превосходит $h^{1,1} = 20$. Обозначим через T_S решетку трансцедентных циклов, которая по определению есть ортогональное дополнение к решетке Нерона-Севери $\mathrm{NS}(S)$ во вторых когомологиях $\mathrm{H}^2(S, \mathbb{Z})$.

На решетке когомологий $\mathrm{H}^*(S, \mathbb{Z})$ определим симметрическую билинейную форму по правилу

$$(u, u') = r \cdot s' + s \cdot r' - \alpha \cdot \alpha' \in \mathrm{H}^4(S, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$$

для всякой пары $u=(r,\alpha,s), u'=(r',\alpha',s')\in \mathrm{H}^0(S,\mathbb{Z})\oplus \mathrm{H}^2(S,\mathbb{Z})\oplus \mathrm{H}^4(S,\mathbb{Z})$. Решетку когомологий $\mathrm{H}^*(S,\mathbb{Z})$ с этой билинейной формой $(\ ,\ )$ назовем решеткой Мукаи и обозначим через $\widetilde{\mathrm{H}}(S,\mathbb{Z})$.

На решетках $\widetilde{\mathrm{H}}(S,\mathbb{Z})$ и T_S имеются естественные структуры Ходжа. В данном случае под структурами Ходжа мы понимаем то, что в пространствах $\widetilde{\mathrm{H}}(S,\mathbb{C})$ и $\mathrm{T}_S\otimes\mathbb{C}$ зафиксированы одномерное подпространство $\mathrm{H}^{2,0}(S)$.

Определение 4.1.1 *Пусть S_1 и S_2 – две К3 поверхности. Мы скажем, что их решетки Мукаи (соотв. решетки трансцедентных циклов) Ходжево изометричны, если существует изометрия между ними, которая переводит одномерное подпространство $\mathrm{H}^{2,0}(S_1)$ в $\mathrm{H}^{2,0}(S_2)$.*

Во втором параграфе дается критерий того, когда производные категории когерентных пучков на двух К3 поверхностях эквивалентны как триангулированные категории. Доказательство этого критерия основывается на том, что любая эквивалентность может быть представлена объектом на произведении.

Главная теорема этой главы говорит следующее.

Теорема 4.2.1 *Пусть S_1 и S_2 – две гладкие проективные К3 поверхности на полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Тогда производные категории когерентных пучков $\mathbf{D}^b(S_1)$ и $\mathbf{D}^b(S_2)$ эквивалентны как триангулированные категории тогда и только тогда, когда существует Ходжева изометрия $f:\widetilde{\mathrm{H}}(S_1,\mathbb{Z})\xrightarrow{\sim}\widetilde{\mathrm{H}}(S_2,\mathbb{Z})$ между решетками Мукаи поверхностей S_1 и S_2 .*

Эта теорема имеет и другой вариант.

Теорема 4.2.4 *Пусть S_1 и S_2 – две гладкие проективные К3 поверхности над полем $\mathbb{C}$. Тогда производные категории когерентных пучков $\mathbf{D}^b(S_1)$ и $\mathbf{D}^b(S_2)$ эквивалентны как триангулированные категории тогда и только тогда, когда существует Ходжева изометрия $f_\tau:\mathrm{T}_{S_1}\xrightarrow{\sim}\mathrm{T}_{S_2}$ между решетками трансцедентных циклов поверхностей S_1 и S_2 .*

Таким образом, для К3 поверхностей получается полный ответ на вопрос, когда производные категории когерентных пучков эквивалентны.

В пятой главе изучаются производные категории когерентных пучков на абелевых многообразиях и их группы автоэквивалентностей.

Пусть A – абелево многообразие и $\widehat{A}$ – двойственное абелево многообразие. В работе [33] было доказано, что производные категории когерентных пучков $\mathbf{D}^b(A)$ и $\mathbf{D}^b(\widehat{A})$ эквивалентны, и эквивалентность, которая называется преобразованием Фурье-Мукаи, может быть задана с помощью линейного расслоения Пуанкаре $\mathcal{P}_A$ на произведении $A \times \widehat{A}$ по следующему правилу

$$F \mapsto \mathbf{R}^{\cdot} p_{2*}(\mathcal{P}_A \otimes p_1^*(F)).$$

Эта конструкция Мукаи была обобщена в статье [42] следующим образом.

Рассмотрим два абелевых многообразия A и B, и изоморфизм f между абелевыми многообразиями $A \times \widehat{A}$ и $B \times \widehat{B}$. Запишем f в матричном виде

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix},$$

где x – гомоморфизм из A в B, y – из $\widehat{A}$ в B, и так далее. Мы назовем его изометричным, если обратный к f имеет следующий вид:

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} \widehat{w} & -\widehat{y} \\ -\widehat{z} & \widehat{x} \end{pmatrix}$$

Определим множество $U(A\times\widehat{A},\ B\times\widehat{B})$ как подмножество в $Iso(A\times\widehat{A},\ B\times\widehat{B})$, состоящее из изометричных изоморфизмов f. Если $B = A$, то это множество будем обозначать $U(A\times\widehat{A})$. Отметим, что $U(A\times\widehat{A})$ является подгруппой в $\mathrm{Aut}\,(A\times\widehat{A})$.

Второй параграф посвящен доказательству следующей теоремы.

Теорема 5.2.19 *Пусть A и B – два абелевых многообразия над полем k. Если производные категории когерентных пучков $\mathbf{D}^b(A)$ и $\mathbf{D}^b(B)$ эквивалентны как триангулированные категории, тогда между $A \times \widehat{A}$ и $B \times \widehat{B}$ существует изометричный изоморфизм.*

Доказательство существенно опирается на Теорему 3.2.2 из главы 3, которая говорит, что любая точная эквивалентность между производными категориями когерентных пучков гладких проективных многообразий может быть представлена объектом на произведении.

Представляя эквивалентности объектами на произведении, строится отображение из множества всех точных эквивалентностей между $\mathbf{D}^b(A)$ и $\mathbf{D}^b(B)$ в множество изометричных изоморфизмов из $A\times\widehat{A}$ в $B\times\widehat{B}$. Далее мы показывается, что это отображение функториально. В частности, получается гомоморфизм из группы точных автоэквивалентностей $\mathrm{Auteq}\,\mathbf{D}^b(A)$ в группу $U(A\times\widehat{A})$ изометричных автоморфизмов многообразия $A\times\widehat{A}$.

Как следствие из Теоремы 5.2.19 получаем, что существует только конечное число неизоморфных абелевых многообразий, производные категории которых эквивалентны $\mathbf{D}^b(A)$ для заданного абелева многообразия A

Следствие 5.2.20 *Для любого абелева многообразия A существует только конечное число неизоморфных абелевых многообразий, производные категории когерентных пучков которых эквивалентны категории $\mathbf{D}^b(A)$ (как триангулированные категории).*

В третьем параграфе более подробно изучается построенный ранее гомоморфизм групп $\mathrm{Auteq}\,(\mathbf{D}^b(X)) \longrightarrow U(A\times\widehat{A})$ и описывается ядро этого гомоморфизма, которое оказывается изоморфно прямой сумме $\mathbb{Z}$ и группы k-точек многообразия $A\times\widehat{A}$ (Предложение 5.3.3). Технически это описание опирается на тот факт, что объект на произведении абелевых многообразий, задающий эквивалентность, на самом деле является пучком с точностью до сдвига в производной категории (Предложение 5.3.2). Это утверждение ни в коем случае не является общим фактом. Оно, к примеру, не верно для К3 поверхностей, но в случае абелевых многообразий дает ключ к описанию группы автоэквивалентностей.

В последнем четвертом параграфе, в предположении, что основное поле алгебраически замкнуто и $\mathrm{char}\,(k) = 0$, доказывается утверждение обратное к утверждению Теоремы 5.2.19 . Доказательство основывается на фактах из статьи [34], в которой описываются полуоднородные расслоения на абелевых многообразиях. Поэтому в начале параграфа напоминаются необходимые нам в дальнейшем результаты из [34]. Затем приводится конструкция того, как по изометричному изоморфизму $f: A\times\widehat{A} \xrightarrow{\sim} B\times\widehat{B}$ можно построить объект $\mathcal{E}$ на произведении $A\times B$ такой, что он задает эквивалентность производных категорий.

Как следствие получаем критерий того, когда два абелевых многообразия имеют эквивалентные производные категории когерентных пучков.

Теорема 5.4.13 *Пусть A и B – два абелевых многообразия над алгебраически замкнутым полем характеристики 0 . Тогда ограниченные производные катего-*

рии когерентных пучков $\mathbf{D}^b(A)$ *и* $\mathbf{D}^b(B)$ *эквивалентны как триангулированные категории тогда и только тогда, когда существует изометричный изоморфизм* $f : A \times \widehat{A} \xrightarrow{\sim} B \times \widehat{B}$.

Более того, в этом случае получается следующее описание для группы автоэквивалентностей производной категории.

Теорема 5.4.14 *Пусть* A *абелево многообразие над алгебраически замкнутым полем характеристики* 0 *. Тогда группа точных автоэквивалентностей производной категории* $\operatorname{Auteq}\mathbf{D}^b(A)$ *может быть включена в следующую короткую точную последовательность групп:*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus (A \times \widehat{A})_k \longrightarrow \operatorname{Auteq}\mathbf{D}^b(A) \longrightarrow U(A \times \widehat{A}) \longrightarrow 1.$$

В заключении четвертого параграфа дается точное описание центрального расширения $U(A\times\widehat{A})$ с помощью $\mathbb{Z}$ и дается формула для 2-коцикла, который задает это расширение.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [37],[38], [40]. Пример из второго параграфа второй главы взят из работы [9].

Глава 1

Предварительные сведения

1.1 Триангулированные категории и точные функторы

1.1.a. Понятие триангулированной категории было впервые введено Вердье в работе [45]. Пусть $\mathcal{D}$ – некоторая аддитивная категория. Структура триангулированной категории на $\mathcal{D}$ определяется заданием следующих данных:

a) аддитивной функтор сдвига $[1] : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$, который является автоэквивалентностью.

b) некоторый класс выделенных треугольников:

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1],$$

которые должны удовлетворять набору аксиом T1-T4.

T1. a) Для каждого объекта X треугольник $X \xrightarrow{\mathrm{id}} X \longrightarrow 0 \longrightarrow X[1]$ выделен.

b) Если треугольник выделен, то любой изоморфный ему также выделен.

c) Любой морфизм $X \xrightarrow{u} Y$ можно дополнить до выделенного треугольника $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$.

T2. Треугольник $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ выделен тогда и только тогда, когда выделен треугольник $Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1] \xrightarrow{-u[1]} Y[1]$.

T3. Если даны два выделенных треугольника и два морфизма между их началами, образующие коммутативный квадрат, тогда эта диаграмма дополняется до морфизма треугольников:

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & X[1] \\
\downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \downarrow f[1] \\
X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & X'[1].
\end{array}$$

T4. Для каждой пары морфизмов $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z$ существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{x} & Z' & \longrightarrow & X[1] \\
\| & & v\downarrow & & \downarrow w & & \| \\
X & \longrightarrow & Z & \xrightarrow{y} & Y' & \xrightarrow{w'} & X[1] \\
 & & \downarrow & & \downarrow t & & \downarrow u[1] \\
 & & X' & \xrightarrow{\mathrm{id}} & X' & \xrightarrow{r} & Y[1] \\
 & & r\downarrow & & \downarrow & & \\
 & & Y[1] & \xrightarrow{x[1]} & Z'[1] & &
\end{array}$$

где первые две строчки и два центральных столбца – выделенные треугольники.

Пусть $\mathcal{D}$ – триангулированная категория. Полная аддитивная подкатегория $\mathcal{N} \subset \mathcal{D}$ называется триангулированной подкатегорией, если она замкнута относительно функтора сдвига и взятия конуса морфизма, т.е. если два объекта какого-нибудь треугольника

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow X[1]$$

принадлежат подкатегории $\mathcal{N}$, то и третий также принадлежит $\mathcal{C}$.

1.1.b. Теперь мы опишем функторы между триангулированными категориями, которые имеет смысл рассматривать.

Определение 1.1.1 *Аддитивный функтор $F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}'$ между двумя триангулированными категориями $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}'$ называется* точным *если он*

a) коммутирует с функторами сдвига, то есть зафиксирован изоморфизм функторов:

$$t_F : F \circ T \xrightarrow{\sim} T' \circ F,$$

b) переводит каждый выделенный треугольник из $\mathcal{D}$ в выделенный треугольник $\mathcal{D}'$ (используя изоморфизм t_F, мы заменяем $F(X[1])$ на $F(X)[1]$).

Из определения сразу следует, что композиция двух точных функторов также является точным функтором. Другое свойство, которое будет нам необходимо, касается сопряженных функторов.

Лемма 1.1.2 ([8],[10]) *Если функтор* $G : \mathcal{D}' \longrightarrow \mathcal{D}$ *левый (или правый) сопряженный к точному функтору* $F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}'$ *, тогда функтор* G *также является точным.*

Доказательство. Так как G является левым сопряженным к функтору F , существует канонический морфизм функторов $\mathrm{id}_{\mathcal{D}'} \to FG,\ GF \longrightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$. Последовательность морфизмов функторов

$$GT' \longrightarrow GT'FG \xrightarrow{\sim} GFTG \longrightarrow TG$$

дает нам естественный морфизм функторов $t_G : GT' \longrightarrow TG$. Так как для любых двух объектов $A \in \mathcal{D}$ и $B \in \mathcal{D}'$ имеются изоморфизмы

$$\mathrm{Hom}(G(B[1])\,,\ A) \cong \mathrm{Hom}(B[1]\,,\ F(A)) \cong \mathrm{Hom}(B\,,\ F(A)[-1]) \cong$$

$$\mathrm{Hom}(B\,,\ F(A[-1])) \cong \mathrm{Hom}(G(B)\,,\ A[-1]) \cong \mathrm{Hom}(G(B)[1]\,,\ A),$$

то по лемме Брауна [11] получаем, что $t_G : GT' \longrightarrow TG$ также является изоморфизмом.

Рассмотрим теперь некоторый выделенный треугольник $A \xrightarrow{\alpha} B \longrightarrow C \longrightarrow A[1]$ в категории $\mathcal{D}'$. Мы должны показать, что функтор G переводит его в выделенный треугольник в категории $\mathcal{D}$.

Для этого дополним морфизм $G(\alpha) : G(A) \to G(B)$ до выделенного треугольника:

$$G(A) \longrightarrow G(B) \longrightarrow Z \longrightarrow G(A)[1].$$

Так как функтор F точен, то он переводит этот треугольник в выделенный треугольник:

$$FG(A) \longrightarrow FG(B) \longrightarrow F(Z) \longrightarrow FG(A)[1].$$

Используя естественное преобразование $\mathrm{id} \to FG$, мы получаем коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccc}
A & \xrightarrow{\alpha} & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & A[1] \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\
FG(A) & \xrightarrow{FG(\alpha)} & FG(B) & \longrightarrow & F(Z) & \longrightarrow & FG(A)[1].
\end{array}$$

По аксиоме триангулированной категории существует морфизм $\mu : C \to F(Z)$, который дополняет эту коммутативную диаграмму. По сопряженности, мы получаем морфизм $\nu : G(C) \to Z$, который делает коммутативной диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccc}
G(A) & \longrightarrow & G(B) & \longrightarrow & G(C) & \longrightarrow & G(A)[1] \\
\wr\downarrow & & \wr\downarrow & & \downarrow\nu & & \wr\downarrow \\
G(A) & \longrightarrow & G(B) & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & G(A)[1]
\end{array}$$

Для доказательства леммы нам необходимо показать, что ν есть изоморфизм. Для этого возьмем некоторый объект $Y \in \mathcal{D}$ и рассмотрим диаграмму для функтора $\mathrm{Hom}(\cdot, Y)$:

$$\begin{array}{ccccc}
\to \mathrm{Hom}(G(A)[1]\,,\ Y) & \to & \mathrm{Hom}(Z\,,\ Y) & \to & \mathrm{Hom}(G(B)\,,\ Y) \to \\
\downarrow\wr & & \downarrow \mathrm{H_Y}(\nu) & & \downarrow\wr \\
\to \mathrm{Hom}(G(A)[1]\,,\ Y) & \to & \mathrm{Hom}(G(C)\,,\ Y) & \to & \mathrm{Hom}(G(B)\,,\ Y) \to \\
\downarrow\wr & & \downarrow\wr & & \downarrow\wr \\
\to \mathrm{Hom}(A[1]\,,\ F(Y)) & \to & \mathrm{Hom}(C\,,\ F(Y)) & \to & \mathrm{Hom}(B\,,\ F(Y)) \to
\end{array}$$

Точность нижней строки влечет точность средней. И значит по лемме о 5-ти гомоморфизмах получаем, что для любого Y морфизм $\mathrm{H}(\nu)$ является изоморфизмом. Следовательно, $\nu : G(C) \to Z$ также является изоморфизмом. $\square$

1.1.c. Сейчас мы дадим определение и опишем основные свойства функтора Серра, абстрактное определение которого было дано в статье [8] (см. также [10]).

Определение 1.1.3 *Пусть* $\mathcal{D}$ – k*-линейная категория с конечномерными пространствами* Hom *между объектами. Ковариантный функтор* $S : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ *называется* функтором Серра, *если он является эквивалентностью и существует бифункториальный изоморфизм*

$$\varphi_{A,B} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(A\,,\ B) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(B\,,\ SA)^*$$

для любых объектов $A, B \in \mathcal{D}$.

Лемма 1.1.4 *Всякая автоэквивалентность* $\Phi : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$ *коммутирует с функтором Серра, то есть существует естественный изоморфизм функторов* $\Phi \circ S \xrightarrow{\sim} S \circ \Phi$.

Доказательство. Для любой пары объектов A, B из $\mathcal{D}$ имеется последовательность естественных изоморфизмов:

$$\operatorname{Hom}(\Phi A\,,\ \Phi SB) \cong \operatorname{Hom}(A\,,\ SB) \cong \operatorname{Hom}(B\,,\ A)^* \cong \operatorname{Hom}(\Phi B\,,\ \Phi A)^* \cong$$
$$\cong \operatorname{Hom}(\Phi A\,,\ S\Phi B) \tag{1.1}$$

Так как Φ является эквивалентностью, то существенный образ функтора Φ есть вся категория $\mathcal{D}$, то есть с точностью до изоморфизма любой объект может быть представлен как ΦA для некоторого A. Это в частности значит, что (1.1) задает изоморфизм контравариантных функторов представленных объектами ΦSB и $S\Phi B$. По лемме Брауна [11] морфизмы между представимыми функторами однозначно соответствуют морфизмам между объектами, их представляющими. Получаем изоморфизм

$$\Phi SB \xrightarrow{\sim} S\Phi B,$$

который является функториальным по B. □

Если у нас имеются два функтора Серра в одной категории, то они изоморфны, и этот изоморфизм коммутирует с бифункториальными изоморфизмами $\phi_{A,B}$ в определении функтора Серра. Действительно, пусть S и S' – два функтора Серра в категории $\mathcal{D}$. Тогда для любого объекта A из $\mathcal{D}$ имеется естественный изоморфизм:

$$\operatorname{Hom}(A\,,\ A) \cong \operatorname{Hom}(A\,,\ SA)^* \cong \operatorname{Hom}(SA\,,\ S'A)$$

Рассматривая образ единичного морфизма id_A относительно этого отождествления, мы получаем морфизм $SA \longrightarrow S'A$, который и дает изоморфизм $S \xrightarrow{\sim} S'$.

Таким образом, функтор Серра в категории $\mathcal{D}$, если он существует, однозначно определен (с точностью до изоморфизма). Нас в дальнейшем будет интересовать функтор Серра в триангулированных категориях.

Лемма 1.1.5 ([8]) *Функтор Серра в триангулированной категории является точным.*

1.1.d. Напомним определение локализации категории и, в частности, локализации триангулированной категории по полной триангулированной подкатегории (см. [14]).

Пусть $\mathcal{C}$ – категория, и Σ – некоторый класс морфизмов в $\mathcal{C}$. Всегда существует категория $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ и функтор $Q : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$, который универсальный среди функторов, делающих морфизмы из Σ обратимыми ([14]), то есть любой функтор $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$, который обращает морфизмы из Σ включается в коммутативную диаграмму:

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[d, "Q"'] \arrow[dr, "F"] & \\
\mathcal{C}[\Sigma^{-1}] \arrow[r, dashed] & \mathcal{C}'
\end{tikzcd}
$$

Локализация категории по классу морфизмов Σ имеет хорошее описание, если Σ **допускает исчисление левых частных**, то есть выполняются следующие свойства:

L1 все тождественные морфизмы категории принадлежат Σ;

L2 композиция любых двух морфизмов из Σ также принадлежит Σ;

L3 любую диаграмму вида $X' \xleftarrow{s} X \xrightarrow{u} Y$, где $s \in \Sigma$, можно дополнить до коммутативного квадрата

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "s"'] & Y \arrow[d, dashed, "t"] \\
X' \arrow[r, dashed, "u'"] & Y'
\end{tikzcd}
$$

где $t \in \Sigma$;

L4 если морфизмы f, g и морфизм $s \in \Sigma$ обладают тем свойством, что $fs = gs$, то существует $t \in \Sigma$ такой, что $tf = tg$.

Если Σ допускает исчисление частных, то категорию $\mathcal{C}[\Sigma]$ можно описать таким простым способом. Объекты $\mathcal{C}[\Sigma]$ те же, что и объекты $\mathcal{C}$. Морфизмы из X в Y – это классы эквивалентностей диаграмм (s, f) в $\mathcal{C}$ вида

$$X \xrightarrow{f} Y' \xleftarrow{s} Y, \qquad s \in \Sigma$$

причем две диаграммы (f, s) и (g, t) эквивалентны, если их включить в коммутативную диаграмму

$$
\begin{tikzcd}
 & Y' \arrow[d] & \\
X \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "g"'] & Y''' & Y \arrow[ul, "s"'] \arrow[l, "r"'] \arrow[dl, "t"] \\
 & Y'' \arrow[u] &
\end{tikzcd}
$$

такую, что $r \in \Sigma$.

Композиция морфизмов (f, s) и (g, t) есть морфизм $(g'f, s't)$, который получается из ни достройкой с помощью квадрата из L3:

$$\begin{tikzcd}
 & & Z'' & & \\
 & Y' \arrow[ur, dashed, "g'"] & & Z' \arrow[ul, dashed, "s'"'] & \\
X \arrow[ur, "f"] & & Y \arrow[ul, "s"'] \arrow[ur, "g"] & & Z \arrow[ul, "t"']
\end{tikzcd} .$$

Легко видеть, что $\mathcal{C}[\Sigma]$, построенная таким образом действительно является категорией, и канонический функтор

$$Q : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}[\Sigma], \quad X \mapsto X, f \mapsto (f, 1)$$

обращает все морфизмы из Σ и является универсальным в этом смысле (см. [14]).

Рассмотрим полную подкатегорию $\mathcal{B} \in \mathcal{C}$ и обозначим через $\Sigma \cap \mathcal{B}$ класс морфизмов в $\mathcal{B}$, также принадлежащих Σ . Будем говорить, что $\mathcal{B}$ **кофинальная справа** в $\mathcal{C}$ относительно Σ , если для каждого $s : X \longrightarrow X'$ в Σ с $X \in \mathcal{B}$ найдется морфизм $f : X' \longrightarrow Y$ такой, что $fs \in \Sigma \cap \mathcal{B}$.

Лемма 1.1.6 ([20],[28]) *Класс* $\Sigma \cap \mathcal{B}$ *также допускает исчисление левых частных, и если* $\mathcal{B}$ *является кофинальной справа в* $\mathcal{C}$ *относительно* Σ *, то канонический функтор*

$$\mathcal{B}[(\Sigma \cap \mathcal{B})^{-1}] \longrightarrow \mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$$

является вполне строгим.

Напомним определение вполне строгого функтора.

Определение 1.1.7 *Функтор* $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ *называется* **вполне строгим***, если для любых двух объектов* $X, Y \in \mathcal{C}$ *естественное отображение*

$$\mathrm{Hom}(X,\ Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}(FX,\ FY)$$

является биекцией.

Пусть теперь $\mathcal{D}$ – триангулированная категория и $\mathcal{N}$ – полная триангулированная подкатегория. Обозначим через Σ класс морфизмов s в $\mathcal{D}$, которые включаются в точный треугольник

$$N \longrightarrow X \xrightarrow{s} X' \longrightarrow N[1],$$

где $N \in \mathcal{N}$ и назовем Σ мультипликативной системой ассоциированной с подкатегорий $\mathcal{N}$. Из общей теории локализации мы имеем аддитивную категорию $\mathcal{D}[\Sigma^{-1}]$ и аддитивный функтор локализации $Q : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}[\Sigma^{-1}]$. Мы можем оснастить категорию $\mathcal{D}[\Sigma^{-1}]$ функтором сдвига, индуцированным функтором $[1] : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$. Кроме того, определим выделенные треугольники в $\mathcal{D}[\Sigma^{-1}]$ как треугольники, изоморфные образу выделенных треугольников из $\mathcal{D}$ при локализации. Мы положим

$$\mathcal{D}/\mathcal{N} := \mathcal{D}[\Sigma^{-1}]$$

Утверждение 1.1.8 *Категория $\mathcal{D}/\mathcal{N}$, оснащенная описанной выше структурой, становится триангулированной категорией, а функтор $Q : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}/\mathcal{N}$ становится триангулированным функтором.*

Отметим, что в данной ситуации система Σ допускает исчисление левых (и правых) частных, поэтому у категории $\mathcal{D}/\mathcal{N}$ существует хорошее описание, которое было приведено выше.

1.1.e. Теперь, следуя Делиню [13] (см. также [28]), мы опишем общую конструкцию производных функторов для локализации триангулированных категорий. Пусть $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ – триангулированные категории, и $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ – точный функтор. Пусть $\mathcal{M} \subset \mathcal{C}$ и $\mathcal{N} \subset \mathcal{D}$ – полные триангулированные категории. Так как мы не предполагаем, что $F\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$, то функтор F не индуцирует ни какого функтора из $\mathcal{C}/\mathcal{M}$ в $\mathcal{D}/\mathcal{N}$. Однако может существовать некоторое каноническое приближение к индуцированному функтору, а именно точный функтор $\mathbf{R}F : \mathcal{C}/\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{D}/\mathcal{N}$ и морфизм точных функторов $\mathrm{can} : QF \longrightarrow (\mathbf{R}F)Q$. Построение происходит следующим образом. Обозначим через Σ мультипликативную систему ассоциированную с подкатегорией $\mathcal{M}$. Пусть Y – объект $\mathcal{C}/\mathcal{M}$. Мы определим контравариантный функтор $\mathbf{r}FY$ из $\mathcal{D}/\mathcal{N}$ в категорию абелевых групп по следующему правилу: значение $\mathbf{r}FY(X)$ на объекте $X \in \mathcal{D}/\mathcal{N}$ – это классы эквивалентностей пар (s, f)

$$Y \xrightarrow{s} Y', \qquad X \xrightarrow{f} FY',$$

где $s \in \Sigma$ и f – морфизм в $\mathcal{D}/\mathcal{N}$. Две такие пары (s, f) и (t, g) эквивалентны, если существуют коммутативные диаграммы в $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}/\mathcal{N}$

$$\begin{tikzcd}
 & Y' \arrow[d, "v"] \\
Y \arrow[ur, "s"] \arrow[r, "r"] \arrow[dr, "t"'] & Y''' \\
 & Y'' \arrow[u, "w"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & FY' \arrow[d, "Fv"] \\
X \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "g"'] & FY''' \\
 & FY'' \arrow[u, "Fw"']
\end{tikzcd}$$

где $r \in \Sigma$. Если функтор $\mathbf{r}FY$ представим, то мы определим $\mathbf{R}FY$ как объект, представляющий этот функтор, и будем говорить, что правый производный функтор $\mathbf{R}F$ определен на Y . В этом случае мы имеем

$$\mathrm{Hom}(X, \mathbf{R}FY) \cong \mathbf{r}FY(X).$$

Нетрудно проверить, что для любого морфизма $\alpha : Y \longrightarrow Z$ в $\mathcal{C}/\mathcal{M}$ определен морфизм функторов $\mathbf{r}F\alpha : \mathbf{r}FY \longrightarrow \mathbf{r}FZ$. Если теперь производный функтор $\mathbf{R}F$ определен на обоих объектах Y и Z , то определен и морфизм $\mathbf{R}F\alpha$. Таким образом, $\mathbf{R}F$ становится функтором $\mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{D}/\mathcal{N}$ на некоторой полной подкатегории $\mathcal{W} \subset \mathcal{C}/\mathcal{M}$, состоящей из объектов на которых $\mathbf{R}F$ определен.

Предложение 1.1.9 ([13]) *Если*

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow X[1]$$

выделенный треугольник в $\mathcal{C}/\mathcal{M}$ *, и* $\mathbf{R}F$ *определен на* X *и* Z *, то он определен также на* Y *и переводит данный треугольник в выделенный треугольник в* $\mathcal{D}/\mathcal{N}$ *. Таким образом,* $\mathcal{W}$ *– триангулированная подкатегория в* $\mathcal{C}/\mathcal{M}$ *и* $\mathbf{R}F : \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{D}/\mathcal{N}$ *– точный функтор.*

Из построения производного функтора для любого объекта $Y \in \mathcal{C}$ непосредственно следует существование канонического морфизма $\mathrm{can} : QFY \longrightarrow (\mathbf{R}F)QY$, если, конечно, $\mathbf{R}F$ определен на объекте $QY \in \mathcal{C}/\mathcal{M}$. Все такие морфизмы задают естественное преобразование триангулированных функторов $\mathrm{can} : QF\mid_{\mathcal{W}} \longrightarrow (\mathbf{R}F)Q\mid_{\mathcal{W}}$.

Левый производный функтор $\mathbf{L}F$ определяется двойственным образом: для $Y \in \mathcal{C}/\mathcal{M}$ мы определяем ковариантный функтор $\mathbf{l}FY$, значение которого на

$X \in \mathcal{D}/\mathcal{N}$ есть классы эквивалентностей пар (s, f)

$$Y' \xrightarrow{s} Y, \qquad FX' \xrightarrow{f} Y,$$

где $s \in \Sigma$, и f – морфизм в $\mathcal{D}/\mathcal{N}$. Тогда объект $\mathbf{L}FY$, если он существует, представляет функтор $\mathbf{l}FY$, т.е. $\mathrm{Hom}(\mathbf{L}FY,\ X) \cong \mathbf{l}FY(X)$. Существует канонический морфизм $\mathrm{can} : \mathbf{L}FQY \longrightarrow QFY$.

Предположим, что функтор $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ такой, что он переводит подкатегорию $\mathcal{M}$ в $\mathcal{N}$. В этом случае производные функторы $\mathbf{R}F$ и $\mathbf{L}F$ оба изоморфны каноническому функтору $\mathcal{C}/\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{D}/\mathcal{N}$, который индуцирован функтором F.

Пусть $j : \mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{C}$ – вложение полной триангулированной подкатегории, которая кофинальна справа относительно Σ. По Лемме 1.1.6 индуцированный функтор $\mathcal{V}/\mathcal{V} \cap \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{C}/\mathcal{M}$, который мы обозначим через $\mathbf{R}j$, является вполне строгим.

Лемма 1.1.10 *Для каждого объекта $V \in \mathcal{V}$ функтор $\mathbf{R}F$ определен на V тогда и только тогда, когда $\mathbf{R}(Fj)$ определен на V, и имеется изоморфизм функторов $\mathbf{R}(Fj)V \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}F\mathbf{R}jV.$*

1.1.f. Теперь мы опишем условия, при которых правый производный функтор определен на всей категории $\mathcal{C}$.

Определение 1.1.11 *Объект $Y \in \mathcal{C}$ называется F-*расщепимым *(справа) относительно $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$, если $\mathbf{R}F$ определен на Y и канонический морфизм $QFY \longrightarrow (\mathbf{R}F)QY$ является изоморфизмом.*

Следующая лемма дает характеризацию F-расщепимых объектов.

Лемма 1.1.12 *Объект $Y \in \mathcal{C}$ является F-расщепимым тогда и только тогда, когда для каждого морфизма $s : Y \longrightarrow Y'$ из Σ, морфизм QFs допускает ретракцию, т.е. существует $p : QFY' \longrightarrow QFY$ такой, что $p \circ QFs = \mathrm{id}$.*

Будем говорить, что $\mathcal{C}$ имеет достаточно много F-расщепимых объектов, (относительно $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$) если для каждого $Y \in \mathcal{C}$ существует морфизм $s : Y \longrightarrow Y_0$ из Σ такой, что Y_0 является F-расщепимым. В этом случае $\mathbf{R}F$ определен на всей категории $\mathcal{C}/\mathcal{M}$ и мы имеем

$$\mathbf{R}FY \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}FY_0 \xleftarrow{\sim} FY_0$$

В заключении этого параграфа скажем пару слов о сопряженных функторах. Предположим, что существует левый сопряженный к F функтор $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$. Допустим существуют (т.е. везде определены) производные функторы $\mathbf{R}F$ и $\mathbf{L}G$. Тогда функтор $\mathbf{L}G$ также является левым сопряженным к $\mathbf{R}F$, и, значит, имеется функториальный изоморфизм

$$\mathrm{Hom}(\mathbf{L}GX,\ Y) \cong \mathrm{Hom}(X,\ \mathbf{R}FY), \tag{1.2}$$

где $X \in \mathcal{D}/\mathcal{N}$ и $Y \in \mathcal{C}/\mathcal{M}$.

1.2 Производные категории и производные функторы.

1.2.a. Пусть $\mathcal{A}$ – аддитивная категория. Обозначим через $\mathbf{C}(\mathcal{A})$ категорию дифференциальных комплексов. Объекты этой категории – это комплексы

$$M^{\bullet} = (\cdots \longrightarrow M^p \xrightarrow{d^n} M^{p+1} \longrightarrow \cdots), \quad M^p \in \mathcal{A}, \quad p \in \mathbb{Z}, \quad d^2 = 0,$$

а морфизмы $f : M^{\bullet} \longrightarrow N^{\bullet}$ – это наборы морфизмов $f^p : M^p \longrightarrow N^p$ в категории $\mathcal{A}$, которые перестановочны с дифференциалами, то есть

$$d_N f^p - f^{p+1} d_M = 0 \qquad \text{для всех} \quad p.$$

Будем обозначать через $\mathbf{C}^{+}(\mathcal{A}), \mathbf{C}^{-}(\mathcal{A}), \mathbf{C}^{b}(\mathcal{A})$ полные подкатегории в $\mathbf{C}(\mathcal{A})$, образованные комплексами $M^{\bullet}$, для которых $M^p = 0$ для всех $p \ll 0$, соответственно $p \gg 0$, соответственно для всех $p \gg 0$ и всех $p \ll 0$.

Морфизм комплексов $f : M^{\bullet} \longrightarrow N^{\bullet}$ будет называть гомотопными нулю, если $f^p = d_N h^p + h^{p+1} d_M$ для всех $p \in \mathbb{Z}$ для некоторого семейства морфизмов $h^p : M^{p+1} \longrightarrow N^p$. Определим гомотопическую категорию $\mathbf{H}(\mathcal{A})$ как категорию, которая имеет те же самые объекты как и $\mathbf{C}(\mathcal{A})$, а морфизмы в $\mathbf{H}(\mathcal{A})$ – это классы $\overline{f}$ морфизмов между комплексами f по модулю морфизмов гомотопных нулю.

Зададим функтор сдвига $[1] : \mathbf{H}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbf{H}(\mathcal{A})$ по правилу

$$(M[1])^p = M^{p+1}, \quad d_{M[1]} = -d_M.$$

Определим стандартный треугольник в $\mathbf{H}(\mathcal{A})$ как последовательность

$$L \xrightarrow{\overline{f}} M \xrightarrow{\overline{g}} Cf \xrightarrow{\overline{h}} L[1],$$

где $f : L \longrightarrow M$ – некоторый морфизм комплексов, $Cf = M \oplus L[1]$ как градуированное векторное пространство и имеет дифференциал

$$d_{Cf} = \begin{pmatrix} d_M & f \\ 0 & -d_L \end{pmatrix},$$

морфизм g – каноническое вложение $M \longrightarrow Cf$, и $-h$ – каноническая проекция. Как обычно, Cf называется конусом морфизма f.

Лемма 1.2.1 ([45], [15]) *Категория* $\mathbf{H}(\mathcal{A})$ *, снабженная функтором сдвига* $[1]$ *и классом треугольников, изоморфных стандартным, является триангулированной категорией.*

Обозначим через $\mathbf{H}^{+}(\mathcal{A}), \mathbf{H}^{-}(\mathcal{A})$ и $\mathbf{H}^{b}(\mathcal{A})$ образы категорий $\mathbf{C}^{+}(\mathcal{A}), \mathbf{C}^{-}(\mathcal{A})$ и $\mathbf{C}^{b}(\mathcal{A})$ соответственно в категории $\mathbf{H}(\mathcal{A})$. Эти категории также являются триангулированными.

1.2.b. Пусть теперь $\mathcal{A}$ – это абелева категория. Для определения производной категории от абелевой категории мы должны напомнить понятия ацикличного комплекса и квазиизоморфизма. Для любого комплекса N и каждого $p \in \mathbb{Z}$ определены его когомологии $H^p(N) \in \mathcal{A}$, которые есть $\mathrm{Ker}\, d^p / \mathrm{Im}\, d^{p-1}$. Таким образом, для каждого целого p у нас имеется аддитивный функтор $H^p : \mathbf{C}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}$, который сопоставляет комплексу $M^{\bullet}$ его p-ую когомологию $H^p(M^{\bullet}) \in \mathcal{A}$.

Комплекс $N \in \mathbf{C}(\mathcal{A})$ называется ацикличным в n-ом члене, если $H^n(N) = 0$, и называется просто ацикличным, если все его когомологии $H^n(N), n \in \mathbb{Z}$ нулевые.

Обозначим через $\mathcal{N}$ полную подкатегорию в $\mathbf{H}(\mathcal{A})$, состоящую из всех ацикличных комплексов. Следующая лемма практически очевидна.

Лемма 1.2.2 *Подкатегория* $\mathcal{N}$ *является полной триангулированной подкатегорией в* $\mathbf{H}(\mathcal{A})$ *.*

Морфизм $\bar{f} : X \longrightarrow Y$ в категории $\mathbf{H}(\mathcal{A})$ назовем квазиизоморфизмом, если его конус является ацикличным комплексом. По другому можно сказать, что $\bar{f}$ – квазиизоморфизм, если отображение на когомологиях, которое он индуцирует, является изоморфизмом. Пусть Quis – это мультипликативная система ассоциированная с $\mathcal{N}$, то есть система, состоящая из всех квазиизоморфизмов.

Определение 1.2.3 Производная категория $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ *от абелевой категории* $\mathcal{A}$ *есть по определению локализация гомотопической категории* $\mathbf{H}(\mathcal{A})$ *по подкатегории всех ацикличных комплексов, то есть*

$$\mathbf{D}(\mathcal{A}) := \mathbf{H}(\mathcal{A})/\mathcal{N} = \mathbf{H}(\mathcal{A})[\mathsf{Quis}^{-1}].$$

Аналогично для $* \in +, -, b$ *мы определим соответствующую производную категорию* $\mathbf{D}^*(\mathcal{A})$ *как локализацию* $\mathbf{H}^*(\mathcal{A})/\mathbf{H}^*(\mathcal{A}) \cap \mathcal{N}$ *.*

Лемма 1.2.4 *Канонические функторы*

$$\mathbf{D}^*(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbf{D}(\mathcal{A}), \qquad * \in \{+, -, b\}$$

задают эквивалентности с полными подкатегориями в $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ *, которые образованы комплексами ацикличными при* $n \ll 0$ *, соответственно при* $n \gg 0$ *, соответственно при* $n \ll 0$ *и* $n \gg 0$ *. Подкатегория* $\mathbf{H}^+(\mathcal{A})$ *(соотв.* $\mathbf{H}^-(\mathcal{A})$ *) является кофинальной справа (соотв. слева) в* $\mathbf{H}(\mathcal{A})$ *относительно класса квазиизоморфизмов.*

Давайте предположим, что абелева категория $\mathcal{A}$ имеет достаточно много инъективных, то есть любой объект допускает вложение в инъективный. Обозначим через $\mathcal{I}$ полную подкатегорию в $\mathcal{A}$, состоящую из инъективных объектов. В этом случае можно показать, что сквозной функтор

$$\mathbf{H}^+(\mathcal{I}) \longrightarrow \mathbf{H}^+(\mathcal{A}) \xrightarrow{Q} \mathbf{D}^+(\mathcal{A})$$

является эквивалентностью категорий (см [20]). Аналогично, если абелева категория $\mathcal{A}$ имеет достаточно много проективных, то сквозной функтор

$$\mathbf{H}^-(\mathcal{P}) \longrightarrow \mathbf{H}^-(\mathcal{A}) \xrightarrow{Q} \mathbf{D}^-(\mathcal{A}),$$

где $\mathcal{P}$ в $\mathcal{A}$ – полная подкатегория проективных, является эквивалентностью.

1.2.c. Пусть $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ – некоторый аддитивный функтор между абелевыми категориями (точность не требуется). Тогда он очевидным образом индуцирует точный функтор $\mathbf{H}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbf{H}(\mathcal{B})$, который мы будем обозначать тем же символом F . Общая конструкция (правого) производного функтора, описанная в предыдущем параграфе, дает нам функтор $\mathbf{R}F$, который определен на некоторой полной триангулированной подкатегории в $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ со значениями в $\mathbf{D}(\mathcal{B})$. Те же самые слова можно сказать и про левый производный функтор. Мы определим n-ый правый (соотв. левый) производный функтор от F как когомологии:

$$\mathbf{R}^n FX = H^n(\mathbf{R}FX) \quad (\text{соотв.} \mathbf{L}_n FX = H^{-n}(\mathbf{L}FX)), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Обычно в приложениях правый сопряженный функтор бывает хорошо определен на подкатегории $\mathbf{D}^+(\mathcal{A})$. Используя Леммы 1.1.10 и 1.2.4, мы можем утверждать, что ограничение функтора $\mathbf{R}F$ на $\mathbf{D}^+(\mathcal{A})$ совпадает с функтором производным от ограничения F на $\mathbf{H}^+(\mathcal{A}) \subset \mathbf{H}(\mathcal{A})$.

Сейчас мы опишем условия, при которых правый производный функтор $\mathbf{R}F$ определен на все категории $\mathbf{D}^+(\mathcal{A})$. Назовем полную аддитивную подкатегорию $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}$ приспособленной справа к функтору F , если

a) функтор F переводит ацикличные комплексы из $\mathbf{C}^+(\mathcal{R})$ в ацикличные;

b) любой объект из $\mathcal{A}$ вкладывается в некоторый объект из $\mathcal{R}$.

Объекты категории $\mathcal{R}$ называются F-ацикличными справа. И, если существует такая приспособленная справа к функтору F категория $\mathcal{R}$, то часто говорят, что в категория $\mathcal{A}$ имеет достаточно много F-ацикличных (справа) объектов.

Предположим, что существует приспособленная справа к функтору $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ подкатегория $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}$. Применяя Лемму 1.1.12, не трудно проверить, что любой ограниченный справа комплекс объектов из $\mathcal{R}$ является F-расщепимым справа. Из условия b) легко вывести, что для любого объекта $X \in \mathbf{H}^+(\mathcal{A})$ существует квазиизоморфизм $X \longrightarrow X'$, где $X' \in \mathbf{H}^+(\mathcal{R})$. Как следствие получаем, что канонический функтор

$$\mathbf{H}^+(\mathcal{R})[\mathsf{Quis}^{-1}] \longrightarrow \mathbf{D}^+(\mathcal{A})$$

является эквивалентностью триангулированных категорий.

Лемма 1.2.5 *Пусть существует приспособленная справа к функтору F подкатегория $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}$. Тогда функтор $\mathbf{R}F$ определен на $\mathbf{D}^+(\mathcal{A})$, для любого ограниченного слева комплекса X имеется изоморфизм $\mathbf{R}FX \xrightarrow{\sim} X'$, где $X \longrightarrow X'$ – квазиизоморфизм с $X' \in \mathbf{H}^+(\mathcal{A})$.*

Если категория $\mathcal{A}$ имеет достаточно много иъективных, то полная подкатегория $\mathcal{I} \in \mathcal{A}$, состоящая из всех инъективных является приспособленной справа к любому аддитивному функтору. И в этом случае правый производный функтор $\mathbf{R}FX$ можно вычислять, применяя функтор F к инъективной резольвенте X' комплекса X .

Двойственным образом мы можем определить понятие подкатегории, приспособленной слева к функтору F . И если такая подкатегория существует, то определен левый производный функтор $\mathbf{L}F : \mathbf{D}^{-}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbf{D}(\mathcal{B})$.

1.3 Производные категории пучков на схемах.

1.3.a. Пусть X – некоторая схема над полем k со структурным пучком $\mathcal{O}_X$. С каждой схемой мы можем связать несколько абелевых категорий пучков на ней. Мы обозначим через $\mathcal{O}_X-\mathrm{Mod}$ абелеву категорию всех пучков $\mathcal{O}_X$ -модулей (в топологии Зариского). Категория $\mathcal{O}_X-\mathrm{Mod}$ имеет все пределы и все копределы и имеет множество порождающих. Прямые копределы являются точными. По этой причине категория $\mathcal{O}_X-\mathrm{Mod}$ является абелевой категорией Гротендика и имеет достаточно много инъективных. (см. [17],[1] IV).

Обозначим через $\mathrm{Qcoh}(X)$ полную абелеву подкатегорию в $\mathcal{O}_X-\mathrm{Mod}$, состоящую из квазикогерентных пучков, то есть таких пучков $\mathcal{O}_X$ -модулей, которые локально на X являются коядрами морфизмов свободных $\mathcal{O}_X$ -модулей. Если схема X квазикомпактна и квазиотделима, то всякий квазикогерентный пучок является прямым копределом своих подпучков конечного типа (см [18] EGA1, 9.4). В этом случае категория $\mathrm{Qcoh}(X)$ имеет множество порождающих и является абелевой категорией Гротендика, поэтому имеет достаточно много инъективных.

Третья категория, которую можно сопоставить схеме X , – это категория когерентных пучков $\mathrm{coh}(X)$. Напомним, что квазикогерентный пучок называется когерентным, если он локально конечно порожден (т.е. конечного типа) и локально всякий его конечнопорожденный подпучок конечно представим. Категория $\mathrm{coh}(X)$ является полной абелевой подкатегорией в $\mathrm{Qcoh}(X)$.

Несмотря на то, что определение (квази)когерентных пучков локально, они на самом деле фактически не зависят от топологии, а отражают глобальные свойства схемы. К примеру, можно рассмотреть не только топологию Зариского, но и, скажем, этальную или плоскую топологии. В этом случае, в то время как понятие пучка $\mathcal{O}_X$ -модулей зависит от выбора топологии, (квази)когерентные пучки не зависят (см. [39]). И для аффинной схемы категория $\mathrm{Qcoh}(X)$ эквивалентна категории модулей над соответствующей алгеброй.

В дальнейшем наше внимание будет сосредоточено на изучении категории когерентных пучков, а более точно на производной категории когерентных пучков. Однако, так как категория $\mathrm{coh}(X)$ не имеет достаточно много инъективных, то при построении производных функторов нам будут полезны категории $\mathrm{Qcoh}(X)$ и $\mathcal{O}_X-\mathrm{Mod}$.

С этого момента, чтобы не вдаваться в тонкости, которые на самом деле очень интересны, но не понадобятся нам в дальнейшем, мы ограничимся рассмотрением категории нетеровых схем. Для нетеровой схемы X полное вложение абелевых категорий $\mathrm{Qcoh}(X) \hookrightarrow \mathcal{O}_X-\mathrm{Mod}$ переводит инъективные в инъективные. Отсюда не сложной процедурой (см. [20]I.4.6, [44],B) можно вывести, что триангулированная подкатегория $\mathbf{H}^+(\mathrm{Qcoh})$ является кофинальной справа в триангулированной категории $\mathbf{H}^+(\mathcal{O}_X-\mathrm{Mod})$. Поэтому, применяя Лемму 1.1.6, получаем следующее утверждение.

Предложение 1.3.1 ([20], [6] II) *Если X нетерова схема, то канонический функтор*

$$\mathbf{D}^+(\mathrm{Qcoh}(X)) \longrightarrow \mathbf{D}^+(\mathcal{O}_X-\mathrm{Mod})$$

является вполне строгим и задает эквивалентность с полной подкатегорией $\mathbf{D}^+(\mathcal{O}_X-\mathrm{Mod})_{\mathrm{Qcoh}} \subset \mathbf{D}^+(\mathcal{O}_X-\mathrm{Mod})$, состоящей из комплексов с квазикогерентными когомологиями.

При дополнительных ограничениях на схему можно доказать аналогичное утверждение и про неограниченные производные категории.

Предложение 1.3.2 ([6] II) *Если X – нетерова схема конечной размерности, то канонический функтор*

$$\mathbf{D}(\mathrm{Qcoh}(X)) \longrightarrow \mathbf{D}(\mathcal{O}_X-\mathrm{Mod})$$

является вполне строгим и задает эквивалентность с полной подкатегорией $\mathbf{D}(\mathcal{O}_X\mathrm{-Mod})_{\mathrm{Qcoh}} \subset \mathbf{D}(\mathcal{O}_X\mathrm{-Mod})$ *, состоящей из комплексов с квазикогерентными когомологиями.*

Доказательство использует наличие функтора $Q : \mathcal{O}_X\mathrm{-Mod} \longrightarrow \mathrm{Qcoh}(X)$, сопряженного справа к функтору вложения и тот факт, что для схемы конечной размерности этот функтор имеет конечную когомологическую размерность (см. [6] II.3.7).

Теперь рассмотрим вложение абелевых категорий $\mathrm{coh}(X) \subset \mathrm{Qcoh}(X)$. Для канонического функтора между производными категориями также известны утверждения аналогичные описанным выше. Однако они касаются только ограниченных справа производных категорий.

Предложение 1.3.3 ([6] II) *Для нетеровой схемы X канонический функтор*

$$\mathbf{D}^-(\mathrm{coh}(X)) \longrightarrow \mathbf{D}^-(\mathrm{Qcoh}(X))$$

является вполне строгим и задает эквивалентность с полной подкатегорией $\mathbf{D}^-(\mathrm{Qcoh}(X))_{\mathrm{coh}}$ *.*

Комбинируя это Предложение с Предложениями 1.3.1 и 1.3.2 получаем следствие.

Следствие 1.3.4 ([6] II) *Пусть X – нетерова схема (соотв. нетерова конечной размерности). Тогда канонический функтор*

$$\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X)) \longrightarrow \mathbf{D}^b(\mathcal{O}_X\mathrm{-Mod}) \qquad (\textit{соотв.}\ \mathbf{D}^-(\mathrm{coh}(X)) \longrightarrow \mathbf{D}^-(\mathcal{O}_X\mathrm{-Mod}))$$

является вполне строгим и задает эквивалентность с полной подкатегорией $\mathbf{D}^b(\mathcal{O}_X\mathrm{-Mod})_{\mathrm{coh}}$ (соотв. $\mathbf{D}^-(\mathcal{O}_X\mathrm{-Mod})_{\mathrm{coh}}$).

1.3.b. Теперь опишем основные производные функторы между производными категориями пучков на схемах. Пусть $f : X \longrightarrow Y$ – морфизм нетеровых схем. Существует функтор обратного образа

$$f^* : \mathcal{O}_Y\mathrm{-Mod} \longrightarrow \mathcal{O}_X\mathrm{-Mod},$$

который точен справа. Так как категория $\mathcal{O}_Y$–Mod имеет достаточно много плоских $\mathcal{O}_Y$ -модулей и они f^* -ацикличны, то определен левый производный функтор

$$\mathbf{L}f^* : \mathbf{D}^-(\mathcal{O}_Y\mathrm{-Mod}) \longrightarrow \mathbf{D}^-(\mathcal{O}_X\mathrm{-Mod}).$$

Не трудно показать, что функтор $\mathbf{L}f^*$ переводит категории $\mathbf{D}^-(\mathcal{O}_Y-\mathrm{Mod})_{\mathrm{Qcoh}}$ и $\mathbf{D}^-(\mathcal{O}_Y-\mathrm{Mod})_{\mathrm{coh}}$ в категории $\mathbf{D}^-(\mathcal{O}_X-\mathrm{Mod})_{\mathrm{Qcoh}}$ и $\mathbf{D}^-(\mathcal{O}_X-\mathrm{Mod})_{\mathrm{coh}}$ соответственно. Таким образом, для нетеровых схем конечной размерности получается производный функтор обратного образа на ограниченных справа производных категориях квазикогерентных и когерентных пучков.

Если функтор f^* имеет конечную когомологическую размерность (в этом случае мы говорим, что f имеет конечную Tor-размерность) можно продолжить производный функтор $\mathbf{L}f^*$ на неограниченные производные категории. И в этом случае производный функтор также переводит комплексы с (квази)когерентными когомологиями в комплексы с (квази)когерентными когомологиями (см. [20]). Более того, если морфизм f имеет конечную Tor-размерность, то производный функтор обратного образа переводит ограниченную производную категорию в ограниченную. И, в частности, имеем функтор

$$\mathbf{L}f^* : \mathbf{D}^b(\mathcal{O}_Y-\mathrm{Mod})_{\mathrm{coh}} \longrightarrow \mathbf{D}^b(\mathcal{O}_X-\mathrm{Mod})_{\mathrm{coh}}.$$

1.3.c. Пусть $\mathcal{E}, \mathcal{F} \in \mathbf{C}(\mathcal{O}_X-\mathrm{Mod})$ – два комплекса $\mathcal{O}_X$-модулей. Определим тензорное произведение $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$ как комплекс, ассоциированный с двойным комплексом $\mathcal{E}^p \otimes \mathcal{F}^q$, то есть

$$(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F})^n = \sum_{p+q=n} E^p \otimes \mathcal{F}^q$$

с дифференциалом $d = d_{\mathcal{E}} + (-1)^n d_{\mathcal{F}}$. Гомотопии между морфизмами комплексов переносятся на тензорное произведение, и мы получаем функтор

$$\mathcal{E}\otimes : \mathbf{H}(\mathcal{O}_X-\mathrm{Mod}) \longrightarrow \mathbf{H}(\mathcal{O}_X-\mathrm{Mod}).$$

Предположим теперь, что $\mathcal{E} \in \mathbf{C}^-(\mathcal{O}_X-\mathrm{Mod})$. Категория $\mathbf{H}^-(\mathcal{O}_X-\mathrm{Mod})$ имеет достаточно много объектов, расщепимых слева для функтора $\otimes\mathcal{E}$ (см. 1.1.f.). Таковыми являются ограниченные справа комплексы плоских $\mathcal{O}_X$-модулей. Поэтому существует левый производный функтор

$$\mathcal{E} \overset{\mathbf{L}}{\otimes} : \mathbf{D}^-(\mathcal{O}_X-\mathrm{Mod}) \longrightarrow \mathbf{D}^-(\mathcal{O}_X-\mathrm{Mod}).$$

Если объекты $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ квазиизоморфны, то функторы $\mathcal{E} \overset{\mathbf{L}}{\otimes}$ и $\mathcal{E} \overset{\mathbf{L}}{\otimes}$ являются изоморфными. На самом деле, мы получаем функтор от двух переменных

$$\overset{\mathbf{L}}{\otimes} : \mathbf{D}^-(\mathcal{O}_X-\mathrm{Mod}) \times \mathbf{D}^-(\mathcal{O}_X-\mathrm{Mod}) \longrightarrow \mathbf{D}^-(\mathcal{O}_X-\mathrm{Mod}),$$

который точен по обоим аргументам. Производный функтор тензорного произведения очевидно симметричный и ассоциативный.

Предположим, что объект $\mathcal{E}$ имеет конечную Tor-размерность, то есть квазиизоморфен ограниченному комплексу плоских $\mathcal{O}_X$-модулей, тогда функтор $\mathcal{E} \overset{\mathbf{L}}{\otimes}$ можно, с одной стороны, продолжить на неограниченную производную категорию, а, с другой, путем ограничения получить функтор из ограниченной производной категории в себя. Получаем функторы

$$\mathcal{E} \overset{\mathbf{L}}{\otimes}: \mathbf{D}(\mathcal{O}_X\text{−Mod}) \longrightarrow \mathbf{D}(\mathcal{O}_X\text{−Mod}), \qquad \mathcal{E} \overset{\mathbf{L}}{\otimes}: \mathbf{D}^b(\mathcal{O}_X\text{−Mod}) \longrightarrow \mathbf{D}^b(\mathcal{O}_X\text{−Mod}).$$

И в заключении отметим, что, если объект $\mathcal{E}$ принадлежит категории $\mathbf{D}^-(\mathcal{O}_X\text{−Mod})_{\mathrm{Qcoh}}$ (соотв. $\mathbf{D}^-(\mathcal{O}_X\text{−Mod})_{\mathrm{coh}}$), то функтор $\mathcal{E} \overset{\mathbf{L}}{\otimes}$ переводит объекты с (квази)когерентными когомологиями в объекты с (квази)когерентными когомологиями.

1.3.d. Пусть $f : X \longrightarrow Y$ – некоторый морфизм нетеровых схем. Функтор прямого образа

$$f_* : \mathcal{O}_X\text{−Mod} \longrightarrow \mathcal{O}_Y\text{−Mod}$$

является точным слева. Так как категория $\mathcal{O}_X$-модулей имеет достаточно много

инъективных, то существует правый производный функтор

$$\mathbf{R}f_* : \mathbf{D}^+(\mathcal{O}_X\text{−Mod}) \longrightarrow \mathbf{D}^+(\mathcal{O}_X\text{−Mod}).$$

Более того, в этом случае функтор $\mathbf{R}f_*$ переводит подкатегорию $\mathbf{D}^+(\mathcal{O}_X\text{−Mod})_{\mathrm{Qcoh}}$ в подкатегорию $\mathbf{D}^+(\mathcal{O}_Y\text{−Mod})_{\mathrm{Qcoh}}$.

Если дополнительно функтор f_* имеет конечную когомологическую размерность, то функтор $\mathbf{R}f_*$ можно продолжить на категорию неограниченных комплексов. Это выполняется например в случае, когда X нетерова схема конечной размерности. С другой стороны, в этом случае, т.е. когда f_* имеет конечную когомологическую размерность, определен правый производный функтор между ограниченными производными категориями

$$\mathbf{R}f_* : \mathbf{D}^b(\mathcal{O}_X\text{−Mod}) \longrightarrow \mathbf{D}^b(\mathcal{O}_X\text{−Mod}).$$

Для того, чтобы правый производный функтор был определен между производными категориями когерентных пучков, необходимы дополнительные ограничения на морфизм f .

Предложение 1.3.5 ([18]III,3.2.1,[20]) *Предположим, что* $f : X \longrightarrow Y$ *является собственным морфизмом нетеровых схем. Тогда функтор* $\mathbf{R}f_*$ *посылает подкатегорию* $\mathbf{D}^+(\mathcal{O}_X\!-\!\mathrm{Mod})_{\mathrm{coh}}$ *в подкатегорию* $\mathbf{D}^+(\mathcal{O}_Y\!-\!\mathrm{Mod})_{\mathrm{coh}}$ *. Если кроме того* X *имеет конечную размерность, то аналогичное утверждение выполняется для ограниченной и неограниченной производных категорий.*

1.3.e. Пусть $\mathcal{E}, \mathcal{F} \in \mathbf{C}(\mathcal{O}_X\!-\!\mathrm{Mod})$ – два комплекса $\mathcal{O}_X$ -модулей. Определим комплекс $\underline{\mathcal{H}om}(\mathcal{E},\ \mathcal{F})$ по правилу:

$$\underline{\mathcal{H}om}^n(\mathcal{E},\ \mathcal{F}) = \prod_p \underline{\mathcal{H}om}(\mathcal{E}^p,\ \mathcal{F}^{p+n})$$

с дифференциалом $d = d_{\mathcal{E}} + (-1)^{n+1} d_{\mathcal{F}}$. Гомотопии между морфизмами комплексов переносятся на локальный $\underline{\mathcal{H}om}$, и мы получаем бифунктор

$$\underline{\mathcal{H}om} : \mathbf{H}(\mathcal{O}_X\!-\!\mathrm{Mod})^{op} \times \mathbf{H}(\mathcal{O}_X\!-\!\mathrm{Mod}) \longrightarrow \mathbf{H}(\mathcal{O}_X\!-\!\mathrm{Mod}).$$

Так как любой ограниченный слева комплекс имеет инъективную резольвенту, то получаем производный бифунктор

$$\mathbf{R}\underline{\mathcal{H}om} : \mathbf{D}(\mathcal{O}_X\!-\!\mathrm{Mod})^{op} \times \mathbf{D}^+(\mathcal{O}_X\!-\!\mathrm{Mod}) \longrightarrow \mathbf{D}(\mathcal{O}_X\!-\!\mathrm{Mod}).$$

В данной ситуации мы определим локальный гипер-Ext

$$\underline{\mathcal{E}xt}(\mathcal{E},\ \mathcal{F}) := H^i(\mathbf{R}\underline{\mathcal{H}om}(\mathcal{E},\ \mathcal{F}))$$

Для нетеровой схемы X , если $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ являются (квази)когерентными $\mathcal{O}_X$ -модулями, тогда для всех $i \geq 0$ пучки $\underline{\mathcal{E}xt}(\mathcal{E},\ \mathcal{F})$ также являются (квази)когерентными.

Если теперь $\mathcal{E} \in \mathbf{D}^-(\mathcal{O}_X\!-\!\mathrm{Mod})_{\mathrm{coh}}$ а $F \in \mathbf{D}^+(\mathcal{O}_X\!-\!\mathrm{Mod})_{\mathrm{coh}}$, тогда $\mathbf{R}\underline{\mathcal{H}om}(\mathcal{E},\ \mathcal{F})$ принадлежит $\mathbf{D}(\mathcal{O}_X\!-\!\mathrm{Mod})_{\mathrm{coh}}$.

1.3.f. Опишем основные свойства и соотношения между производными функторами, введенными в этом параграфе. Рассмотрим два морфизма $f : X \longrightarrow Y$ и $g : Y \longrightarrow Z$. В данной ситуации имеем два функтора $\mathbf{L}(gf)^*$ и $\mathbf{L}f^*\mathbf{L}g^*$ из категории $\mathbf{D}^-(\mathcal{O}_Z\!-\!\mathrm{Mod})$ в $\mathbf{D}^-(\mathcal{O}_X\!-\!\mathrm{Mod})$. Тогда естественное преобразование

$$\mathbf{L}(gf)^* \xrightarrow{\sim} \mathbf{L}f^*\mathbf{L}g^*$$

является изоморфизмом. Доказательство этого факта следует из того, что функтор g^* переводит плоские $\mathcal{O}_Z$-модули в плоские $\mathcal{O}_Y$-модули. (см. например [20]).

Аналогично, имеем изоморфизм

$$\mathbf{R}(gf)_* \longrightarrow \mathbf{R}g_*\mathbf{R}f_*$$

функторов из $\mathbf{D}^+(\mathcal{O}_X-\mathrm{Mod})$ в $\mathbf{D}^+(\mathcal{O}_X-\mathrm{Mod})$. Данное утверждение следует из того факта, что f_* переводит инъективные пучки в вялые пучки на Y, которые, в свою очередь, являются g_*-ацикличными (см. [20]).

Другое соотношение, которое мы будем довольно часто использовать, называется формулой проекции.

Предложение 1.3.6 ([20], II.5.6) *Пусть* $f : X \longrightarrow Y$ *– морфизм нетеровых схем конечной размерности. Тогда для любых объектов* $\mathcal{E} \in \mathbf{D}^-(\mathcal{O}_X-\mathrm{Mod})$ *и* $\mathcal{F} \in \mathbf{D}^-(\mathcal{O}_X-\mathrm{Mod})_{\mathrm{Qcoh}}$ *существует естественный изоморфизм функторов*

$$\mathbf{R}f_*\mathcal{E} \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}f_*(\mathcal{E} \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \mathbf{L}f^*\mathcal{F}). \tag{1.3}$$

Еще одно свойство, которое будет полезно, называется плоская замена базы.

Предложение 1.3.7 ([20], II.5.12) *Пусть* $f : X \longrightarrow Y$ *– морфизм конечного типа между нетеровыми схемами конечной размерности и* $g : Y' \longrightarrow Y$ *– плоский морфизм. Рассмотрим декартов квадрат:*

$$\begin{tikzcd} X \times_Y Y' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "g"] & Y. \end{tikzcd}$$

В данной ситуации существует естественный изоморфизм функторов

$$\mathbf{L}g^*\mathbf{R}f_*\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}f'_*\mathbf{L}g'^*\mathcal{E} \tag{1.4}$$

для любого $\mathcal{E} \in \mathbf{D}(\mathcal{O}_X-\mathrm{Mod})_{\mathrm{Qcoh}}$.

Последнее свойство, которое нам будет нужно, говорит следующее.

Предложение 1.3.8 ([20], II.5.16) *Пусть* $\mathcal{E}$ *– ограниченный комплекс локально свободных пучков конечного ранга на нетеровой схеме* X. *Тогда существуют естественные изоморфизмы функторов*

$$\mathbf{R}\underline{\mathcal{H}om}(\mathcal{F},\ \mathcal{G}) \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}\underline{\mathcal{H}om}(\mathcal{F},\ \mathcal{G} \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}\underline{\mathcal{H}om}(\mathcal{F} \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \mathcal{E}^\vee,\ \mathcal{G}) \tag{1.5}$$

для всех $\mathcal{F} \in \mathbf{D}^-(\mathcal{O}_X-\mathrm{Mod})$ *и* $\mathcal{G} \in \mathbf{D}^+(\mathcal{O}_X-\mathrm{Mod})$, *где* $\mathcal{E}^\vee := \mathbf{R}\underline{\mathcal{H}om}(\mathcal{E},\ \mathcal{O}_X)$.

Глава 2

Категории когерентных пучков и функторы между ними

2.1 Основные свойства категории когерентных пучков.

2.1.a. Начиная с этого параграфа, мы сосредоточим свое внимание на ограниченных производных категориях когерентных пучков на гладких проективных многообразиях. Для краткости вместо $\mathbf{D}^b(coh(X))$ мы далее везде будем писать просто $\mathbf{D}^b(X)$. Кроме того, мы часто будем опускать значок производного функтора в тех случаях, когда функтор точен, например для обратного образа при плоском морфизме или для тензорного умножения на локально свободный пучок.

Для гладкого проективного многообразия X размерности n ограниченная производная категория когерентных пучков обладает функтором Серра (см. Определение 1.1.3), и этот функтор совпадает с функтором $(\cdot)\otimes\omega_X[n]$, где ω_X – канонический пучок (см. [8]). Таким образом, имеется изоморфизм

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{E},\ \mathcal{F}) = \mathrm{Hom}(\mathcal{F},\ E\otimes\omega_X[n])^* \tag{2.1}$$

для любой пары объектов $\mathcal{E},\mathcal{F}\in\mathbf{D}^b(X)$.

Как было показано в предыдущем параграфе, любой морфизм $f : X \to Y$ между гладкими проективными многообразиями индуцирует два точных функтора: функтор прямого образа $\mathbf{R}f_* : \mathbf{D}^b(X) \longrightarrow \mathbf{D}^b(Y)$ и функтор обратного образа $\mathbf{L}f^* : \mathbf{D}^b(Y) \longrightarrow \mathbf{D}^b(X),$ и эти функторы сопряжены. Кроме того, каждый объект $\mathcal{E} \in \mathbf{D}^b(X)$ задает точный функтор тензорного умножения $\overset{\mathbf{L}}{\otimes} \mathcal{E} : \mathbf{D}^b(X) \longrightarrow \mathbf{D}^b(X)$.

Используя эти стандартные производные функторы, мы можем ввести новый большой класс точных функторов между производными категориями $\mathbf{D}^b(X)$ и $\mathbf{D}^b(Y)$.

Пусть X и Y – два гладких проективных многообразия над полем k размерности n и m соответственно. Рассмотрим декартово произведение $X \times Y$ и обозначим через p и q проекции $X \times Y$ на X и соответственно на Y

$$X \xleftarrow{p} X \times Y \xrightarrow{q} Y.$$

Каждый объект $\mathcal{E} \in \mathbf{D}^b(X \times Y)$ задает точный функтор $\Phi_{\mathcal{E}}$ из производной категории $\mathbf{D}^b(X)$ в производную категорию $\mathbf{D}^b(Y)$, который определяется следующей формулой:

$$\Phi_{\mathcal{E}}(\cdot) := \mathbf{R}^{\cdot} q_*(\mathcal{E} \overset{\mathbf{L}}{\otimes} p^*(\cdot)). \tag{2.2}$$

Кроме того, с тем же самым объектом $\mathcal{E} \in \mathbf{D}^b(X \times Y)$ можно связать еще и другой функтор $\Psi_{\mathcal{E}}$ из производной категории $\mathbf{D}^b(Y)$ в производную категорию $\mathbf{D}^b(X)$, определенный по правилу аналогичному (2.2):

$$\Psi_{\mathcal{E}}(\cdot) := \mathbf{R} p_*(\mathcal{E} \overset{\mathbf{L}}{\otimes} q^*(\cdot)).$$

Легко проверить, что функтор $\Phi_{\mathcal{E}}$ имеет как левый, так и правый сопряженные функторы.

Лемма 2.1.1 *Функтор $\Phi_{\mathcal{E}}$ имеет сопряженные слева и справа функторы $\Phi_{\mathcal{E}}^*$ и $\Phi_{\mathcal{E}}^!$ соответственно, которые задаются по формуле:*

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathcal{E}}^* &\cong \Psi_{\mathcal{E}^\vee \otimes q^* \omega_Y[m]}, \\ \Phi_{\mathcal{E}}^! &\cong \Psi_{\mathcal{E}^\vee \otimes p^* \omega_X[n]}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Здесь ω_X и ω_Y канонические пучки на X и Y , и $\mathcal{E}^\vee$ – удобное обозначение для $\mathbf{R}\underline{\mathcal{H}om}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{X \times Y})$.

Доказательство. Приведем доказательство для сопряженного слева функтора.

Оно получается из следующей последовательности изоморфизмов:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}(A,\ \mathbf{R}q_*(\mathcal{E}\overset{\mathbf{L}}{\otimes} p^*B)) &\cong \mathrm{Hom}(q^*A,\ \mathcal{E}\overset{\mathbf{L}}{\otimes} p^*B)\\
&\cong \mathrm{Hom}(p^*B,\ \mathcal{E}^\vee\overset{\mathbf{L}}{\otimes} q^*A\otimes\omega_{X\times Y}[n+m])^*\\
&\cong \mathrm{Hom}(B,\ \mathbf{R}p_*(\mathcal{E}^\vee\overset{\mathbf{L}}{\otimes} q^*(A\otimes\omega_Y[m]))\otimes\omega_X[n])^*\\
&\cong \mathrm{Hom}(\mathbf{R}p_*(\mathcal{E}^\vee\overset{\mathbf{L}}{\otimes} q^*(A\otimes\omega_Y[m])), B).
\end{aligned}$$

Здесь используется сопряженность функторов прямого и обратного образа, два раза используется двойственность Серра (2.1), а также формула (1.5). $\square$

2.1.b. Пусть теперь X, Y, Z – три гладких проективных многообразия, и $\mathcal{E},\mathcal{F},\mathcal{G}$ – объекты производных категорий $\mathbf{D}^b(X\times Y)$, $\mathbf{D}^b(Y\times Z)$ и $\mathbf{D}^b(X\times Z)$ соответственно. Рассмотрим следующую диаграмму проекций:

$$\begin{tikzcd}
 & & X\times Y\times Z \arrow[dll, "p_{12}"'] \arrow[d, "p_{13}"] \arrow[drr, "p_{23}"] & & \\
X\times Y \arrow[d, "\pi^1_{12}"'] \arrow[drr, "\pi^2_{12}"] & & X\times Z \arrow[dll, "\pi^1_{13}"'] \arrow[drr, "\pi^3_{13}"] & & Y\times Z \arrow[dll, "\pi^2_{23}"'] \arrow[d, "\pi^3_{23}"] \\
X & & Y & & Z
\end{tikzcd}$$

Объекты $\mathcal{E},\mathcal{F},\mathcal{G}$ задают три функтора:

$$\begin{aligned}
\Phi_{\mathcal{E}}:&\quad \mathbf{D}^b(X)\longrightarrow\mathbf{D}^b(Y),\\
\Phi_{\mathcal{F}}:&\quad \mathbf{D}^b(Y)\longrightarrow\mathbf{D}^b(Z),\\
\Phi_{\mathcal{G}}:&\quad \mathbf{D}^b(X)\longrightarrow\mathbf{D}^b(Z),
\end{aligned}$$

определенные формулой (2.2), т.е.

$$\begin{aligned}
\Phi_{\mathcal{E}} &:= \mathbf{R}\pi^2_{12*}(\mathcal{E}\overset{\mathbf{L}}{\otimes}{\pi^1_{12}}^*(\cdot)),\\
\Phi_{\mathcal{F}} &:= \mathbf{R}\pi^3_{23*}(\mathcal{F}\overset{\mathbf{L}}{\otimes}{\pi^2_{23}}^*(\cdot)),\\
\Phi_{\mathcal{G}} &:= \mathbf{R}\pi^3_{13*}(\mathcal{G}\overset{\mathbf{L}}{\otimes}{\pi^1_{13}}^*(\cdot)).
\end{aligned}$$

Рассмотрим объект ${p_{12}}^*\mathcal{E}\overset{\mathbf{L}}{\otimes}{p_{23}}^*\mathcal{F}\in\mathbf{D}^b(X\times Y\times Z)$, который далее мы всегда будем обозначать $\mathcal{E}\underset{Y}{\boxtimes}\mathcal{F}$. Следующее утверждение дает правило для композиции тех точных функторов между производными категориями, которые представлены объектами на произведении.

Предложение 2.1.2 *Композиция функторов* $\Phi_{\mathcal{F}} \circ \Phi_{\mathcal{E}}$ *изоморфна функтору* $\Phi_{\mathcal{G}}$, *представленному объектом*

$$\mathcal{G} = \mathbf{R}p_{13*}(\mathcal{E} \underset{Y}{\boxtimes} \mathcal{F}). \tag{2.4}$$

Доказательство. Утверждение следует из последовательности изоморфизмов:

$$\begin{aligned}
\Phi_{\mathcal{F}} \circ \Phi_{\mathcal{E}}(\cdot) &\cong \mathbf{R}\pi^3_{23*}(\mathcal{F} \overset{\mathbf{L}}{\otimes} {\pi^2_{23}}^*(\mathbf{R}\pi^2_{12*}(\mathcal{E} \overset{\mathbf{L}}{\otimes} {\pi^1_{12}}^*(\cdot))))\\
&\cong \mathbf{R}\pi^3_{23*}(\mathcal{F} \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \mathbf{R}p_{23*}({p_{12}}^*(\mathcal{E} \overset{\mathbf{L}}{\otimes} {\pi^1_{12}}^*(\cdot))))\\
&\cong \mathbf{R}\pi^3_{23*}\mathbf{R}p_{23*}({p_{23}}^*\mathcal{F} \overset{\mathbf{L}}{\otimes} {p_{12}}^*(\mathcal{E} \overset{\mathbf{L}}{\otimes} {\pi^1_{12}}^*(\cdot)))\\
&\cong \mathbf{R}\pi^3_{13*}\mathbf{R}p_{13*}({p_{23}}^*\mathcal{F} \overset{\mathbf{L}}{\otimes} {p_{12}}^*\mathcal{E} \overset{\mathbf{L}}{\otimes} {p_{12}}^*{\pi^1_{12}}^*(\cdot))\\
&\cong \mathbf{R}\pi^3_{13*}\mathbf{R}p_{13*}({p_{23}}^*\mathcal{F} \overset{\mathbf{L}}{\otimes} {p_{12}}^*\mathcal{E} \overset{\mathbf{L}}{\otimes} {p_{13}}^*{\pi^1_{13}}^*(\cdot))\\
&\cong \mathbf{R}\pi^3_{13*}(\mathbf{R}p_{13*}({p_{23}}^*\mathcal{F} \overset{\mathbf{L}}{\otimes} {p_{12}}^*\mathcal{E}) \overset{\mathbf{L}}{\otimes} {\pi^1_{13}}^*(\cdot)) = \mathbf{R}\pi^3_{13*}(\mathcal{G} \overset{\mathbf{L}}{\otimes} {\pi^1_{13}}^*(\cdot)).
\end{aligned}$$

Здесь мы пользуемся формулами проекции и плоской замены базы (1.3), (1.4). □

2.1.c. Таким образом, каждому гладкому проективному многообразию мы сопоставили производную категорию когерентных пучков на нем, а с каждым объектом $\mathcal{E} \in \mathbf{D}^b(X \times Y)$ на произведении двух таких многообразий мы связали точный функтор $\Phi_{\mathcal{E}}$ из триангулированной категории $\mathbf{D}^b(X)$ в триангулированную категорию $\mathbf{D}^b(Y)$ с законом композиции, описанным выше.

Следующие два вопроса являются фундаментальными для понимания данного соответствия:

- Когда производные категории когерентных пучков двух разных гладких проективных многообразий эквивалентны как триангулированные категории?
- Какова группа точных автоэквивалентностей производной категории когерентных пучков для данного фиксированного многообразия X ?

Некоторые результаты в этом направлении уже известны. К примеру, мы можем дать исчерпывающий ответ на данные вопросы в случае, когда канонический или антиканонический пучок многообразия обилен.

Теорема 2.1.3 [10] *Пусть* X *– гладкое проективное многообразие, канонический (или антиканонический) пучок которого обилен. Предположим, что*

категория $\mathbf{D}^b(X)$ *эквивалентна как триангулированная категория производной категории* $\mathbf{D}^b(X')$ *для некоторого гладкого алгебраического многообразия* X'. *Тогда многообразие* X' *изоморфно* X .

Теорема 2.1.4 [10] *Пусть* X *– гладкое проективное многообразие, канонический (или антиканонический) пучок которого обилен. Тогда группа классов изоморфизмов точных автоэквивалентностей категории* $\mathbf{D}^b(X)$ *порождена автоморфизмами многообразия, подкрутками на линейные расслоения и сдвигами в производной категории.*

В этой ситуации можно описать и группу точных автоэквивалентностей. Для любого многообразия X группа точных автоэквивалентностей $\operatorname{Auteq}\mathbf{D}^b(X)$ всегда содержит подгруппу $G(X)$, которая есть полупрямое произведение нормальной подгруппы $G_1 = \operatorname{Pic}(X) \oplus \mathbb{Z}$ и подгруппы $G_2 = \operatorname{Aut} X$, действующей естественным образом на G_1. При этом включении $G(X) \subset \operatorname{Auteq}\mathbf{D}^b(X)$ образующая $\mathbb{Z}$ переходит в функтор сдвига $[1]$, линейное расслоение $\mathcal{L} \in \operatorname{Pic}(X)$ – в функтор $\otimes\mathcal{L}$, а автоморфизм $f : X \to X$ индуцирует автоэквивалентность $\mathbf{R}f_*$.

Теперь мы можем добавить, что при условии, описанном в теореме 2.1.4, группа точных автоэквивалентностей $\operatorname{Auteq}\mathbf{D}^b(X)$ совпадает с $G(X)$, т.е. в этом случае:

$$\operatorname{Auteq}\mathbf{D}^b(X) \cong \operatorname{Aut} X \ltimes (\operatorname{Pic}(X) \oplus \mathbb{Z}).$$

Чтобы исследовать вопрос, когда два многообразия имеют эквивалентные производные категории когерентных пучков, и описывать их группы автоэквивалентностей, желательно иметь явные формулы для всех точных функторов. Существует гипотеза, что все они представляются объектами на произведении, т.е. имеют вид (2.2). В следующей главе мы дадим доказательство данной гипотезы для вполне строгих функторов и, в частности, для эквивалентностей. Собственно говоря, вся следующая глава будет посвящена доказательству данного результата. Таким образом, это даст нам возможность рассматривать только функторы вида (2.2) при исследовании вопроса об эквивалентностях производных категорий когерентных пучков на гладких проективных многообразиях. Другая задача, которая встает в связи с решением этих проблем, – это необходимость иметь критерии для определения по функтору является ли он эквивалентностью или нет. Чтобы проверить, что функтор F является эквивалентностью, достаточно показать, что он и его правый (или левый) сопряженный вполне строгие функторы (см. 1.1.7).

Существует некоторый метод для определения того, когда функтор $\Phi_{\mathcal{E}}$: $\mathbf{D}^b(X) \longrightarrow \mathbf{D}^b(Y)$ является вполне строгим. В общем случае проверить это довольно трудно, однако в некоторых ситуациях следующий критерий бывает весьма полезен.

Теорема 2.1.5 [9] *Пусть* M *и* X *– гладкие проективные многообразия над алгебраически замкнутым полем характеристики* 0, *и пусть* $\mathcal{E} \in \mathbf{D}^b(M \times X)$. *Тогда функтор* $\Phi_{\mathcal{E}}$ *является вполне строгим, если и только если выполняются следующие условия ортогональности:*

$$1)\quad \mathrm{Hom}^i_X(\Phi_{\mathcal{E}}(\mathcal{O}_{t_1})\,,\ \Phi_{\mathcal{E}}(\mathcal{O}_{t_2})) = 0 \qquad \textit{для всех } i \textit{ и } t_1 \neq t_2.$$

$$2)\quad \mathrm{Hom}^0_X(\Phi_{\mathcal{E}}(\mathcal{O}_t)\,,\ \Phi_{\mathcal{E}}(\mathcal{O}_t)) = k,$$

$$\mathrm{Hom}^i_X(\Phi_{\mathcal{E}}(\mathcal{O}_t)\,,\ \Phi_{\mathcal{E}}(\mathcal{O}_t)) = 0, \qquad \textit{для } i \notin [0, \dim M].$$

Здесь t , t_1 , t_2 *– точки многообразия* M *и* $\mathcal{O}_{t_i}$ *– соответствующие им пучки небоскребов.*

2.1.d. Предположим, что имеется четыре гладких проективных многообразия X_1, X_2, Y_1, Y_2 . Рассмотрим два объекта $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$, принадлежащие категориям $\mathbf{D}^b(X_1 \times Y_1)$ и $\mathbf{D}^b(X_2 \times Y_2)$ соответственно. Мы можем рассмотреть объект

$$\mathcal{E}_1 \boxtimes \mathcal{E}_2 \in \mathbf{D}^b((X_1 \times X_2) \times (Y_1 \times Y_2)),$$

который по определению есть $p^*_{13}(\mathcal{E}_1) \overset{\mathbf{L}}{\otimes} p^*_{24}(\mathcal{E}_2)$. Как и раньше (см. (2.2)), объекты $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_1 \boxtimes \mathcal{E}_2$ задают функторы:

$$\begin{aligned}
&\Phi_{\mathcal{E}_1} : \mathbf{D}^b(X_1) \longrightarrow \mathbf{D}^b(Y_1),\\
&\Phi_{\mathcal{E}_2} : \mathbf{D}^b(X_2) \longrightarrow \mathbf{D}^b(Y_2),\\
&\Phi_{\mathcal{E}_1\ \ \mathcal{E}_2} : \mathbf{D}^b(X_1 \times X_2) \longrightarrow \mathbf{D}^b(Y_1 \times Y_2).
\end{aligned}$$

Рассмотрим некоторый объект $\mathcal{G} \in \mathbf{D}^b(X_1 \times X_2)$ и обозначим через $\mathcal{H}$ объект $\Phi_{\mathcal{E}_1\ \ \mathcal{E}_2}(\mathcal{G}) \in \mathbf{D}^b(Y_1 \times Y_2)$. С каждым из этих двух объектов можно связать по правилу (2.2) функторы

$$\Phi_{\mathcal{G}} : \mathbf{D}^b(X_1) \longrightarrow \mathbf{D}^b(X_2), \qquad \Phi_{\mathcal{H}} : \mathbf{D}^b(Y_1) \longrightarrow \mathbf{D}^b(Y_2).$$

Лемма 2.1.6 *В обозначениях, введенных выше, существует изоморфизм функторов* $\Phi_{\mathcal{H}} \cong \Phi_{\mathcal{E}_2} \circ \Phi_{\mathcal{G}} \circ \Psi_{\mathcal{E}_1}$.

Доказательство. Немедленно следует из Предложения 2.1.2. $\square$

Если теперь Z_1, Z_2 – еще два гладких проективных многообразия, и $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ – объекты соответственно категорий $\mathbf{D}^b(Y_1 \times Z_1)$ и $\mathbf{D}^b(Y_2 \times Z_2)$, то имеются также функторы $\Phi_{\mathcal{F}_1}, \Phi_{\mathcal{F}_2}, \Phi_{\mathcal{F}_1 \;\; \mathcal{F}_2}$. По правилу (2.4) мы можем найти объекты $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$, принадлежащие категориям $\mathbf{D}^b(X_1 \times Z_1)$ и $\mathbf{D}^b(X_2 \times Z_2)$, такие что:

$$\Phi_{\mathcal{G}_1} \cong \Phi_{\mathcal{F}_1} \circ \Phi_{\mathcal{E}_1}, \qquad \Phi_{\mathcal{G}_2} \cong \Phi_{\mathcal{F}_2} \circ \Phi_{\mathcal{E}_2}.$$

Прямая проверка показывает, что существует естественное соотношение

$$\Phi_{\mathcal{F}_1 \;\; \mathcal{F}_2} \circ \Phi_{\mathcal{E}_1 \;\; \mathcal{E}_2} \cong \Phi_{\mathcal{G}_1 \;\; \mathcal{G}_2} \tag{2.5}$$

Используя его, легко доказать следующее утверждение.

Утверждение 2.1.7 *В условиях, описанных выше, предположим, что функторы $\Phi_{\mathcal{E}_1}$ и $\Phi_{\mathcal{E}_2}$ являются вполне строгими (эквивалентностями). Тогда функтор*

$$\Phi_{\mathcal{E}_1 \;\; \mathcal{E}_2} : \mathbf{D}^b(X_1 \times X_2) \longrightarrow \mathbf{D}^b(Y_1 \times Y_2)$$

также является вполне строгим (эквивалентностью).

Доказательство. Если функтор F имеет сопряженный, скажем, слева F^*, то он вполне строгий тогда и только тогда, когда композиция F^*F изоморфна тождественному функтору. Функторы $\Phi_{\mathcal{E}_i}$ имеют левые сопряженные ${\Phi_{\mathcal{E}_i}}^*$, определенные по формуле (2.3). Из того, что они вполне строгие следует, что композиции ${\Phi_{\mathcal{E}_i}}^* \circ \Phi_{\mathcal{E}_i}$ изоморфны тождественным функторам, которые представляются структурными пучками диагоналей $\Delta_i \in X_i \times X_i$. Легко проверить, что пучок $\mathcal{O}_{\Delta_1} \boxtimes \mathcal{O}_{\Delta_2}$ изоморфен структурному пучку диагонали $\mathcal{O}_{\Delta}$, где Δ – диагональ в $(X_1 \times X_2) \times (X_1 \times X_2)$. Используя формулу (2.5), получаем, что композиция ${\Phi_{\mathcal{E}_1 \;\; \mathcal{E}_2}}^* \circ \Phi_{\mathcal{E}_1 \;\; \mathcal{E}_2}$ представляется структурным пучком диагонали Δ и, значит, изоморфна тождественному функтору. Таким образом, $\Phi_{\mathcal{E}_1 \;\; \mathcal{E}_2}$ вполне строгий. Утверждение про эквивалентность доказывается аналогично. $\square$

Предположим сейчас, что функтор $\Phi_{\mathcal{E}} : \mathbf{D}^b(X) \longrightarrow \mathbf{D}^b(Y)$ является эквивалентностью, и объект $\mathcal{F} \in \mathbf{D}^b(X \times Y)$ такой, что $\Psi_{\mathcal{F}} \cong \Phi_{\mathcal{E}}^{-1}$. В этом случае функтор

$$\Phi_{\mathcal{F} \;\; \mathcal{E}} : \mathbf{D}^b(X \times X) \longrightarrow \mathbf{D}^b(Y \times Y) \tag{2.6}$$

мы будем обозначать как $Ad_{\mathcal{E}}$. Функтор $Ad_{\mathcal{E}}$ также является эквивалентностью по Утверждению 2.1.7. Кроме того, по Лемме 2.1.6 для любого объекта $\mathcal{G} \in \mathbf{D}^b(X \times X)$ существует изоморфизм функторов:

$$\Phi_{Ad_{\mathcal{E}}(\mathcal{G})} \cong \Phi_{\mathcal{E}} \circ \Phi_{\mathcal{G}} \circ \Phi_{\mathcal{E}}^{-1}. \tag{2.7}$$

2.2 Примеры эквивалентностей: бирациональные преобразования типа флоп.

2.2.a. В этом параграфе мы дадим пример двух гладких многообразий, для которых производные категории когерентных пучков эквивалентны. Конечно, примеры таких многообразий были уже известны: первый пример – это абелево многообразие и двойственное ему – был рассмотрен Мукаи (см. [33]). Принципиальное отличие примера, который мы рассмотрим в этом параграфе, в том, что эквивалентность задается бирациональным отображением. Эти преобразования называются флопами. Мы рассмотрим специальный случай флопов. Ценность данного примера состоит еще и в том, что из него следует, что условия на канонический пучок в Теореме 2.1.3 не могут быть ослаблены.

В начале параграфа мы напомним определения допустимых подкатегорий и полуортогональных разложений (см. [7], [8]).

Определение 2.2.1 *Пусть $\mathcal{B}$ – полная аддитивная подкатегория в аддитивной категории $\mathcal{A}$.* Правым ортогоналом *к $\mathcal{B}$ в $\mathcal{A}$ называется полная подкатегория $\mathcal{B}^{\perp} \subset \mathcal{A}$, состоящая из всех таких объектов C, для которых $\mathrm{Hom}(B, C) = 0$ для всех $B \in \mathcal{B}$. Двойственным образом определяется левый ортогонал ${}^{\perp}\mathcal{B}$.*

Отметим, что если $\mathcal{B}$ является триангулированной подкатегорией в триангулированной категории $\mathcal{A}$, то ${}^{\perp}\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}^{\perp}$ также являются триангулированными подкатегориями.

Определение 2.2.2 *Пусть $I : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{D}$ – вложение полной триангулированной подкатегории в триангулированную категорию $\mathcal{D}$. Будем говорить, что $\mathcal{N}$* допустима *справа (соотв., слева) если существует функтор $P : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{N}$ сопряженный справа (соотв. слева) к функтору вложения I.*

Свойство быть допустимой справа (соотв. слева) для подкатегории $\mathcal{N}$ эквивалентно следующему свойству: для каждого объекта $X \in \mathcal{D}$ существует выделенный треугольник $N \to X \to Y$, где $N \in \mathcal{N}$ и $Y \in \mathcal{N}^{\perp}$ (соотв., $Z \to X \to N$, где $Z \in {}^{\perp}\mathcal{N}$ и $N \in \mathcal{N}$). Подкатегорию будем называть просто допустимой, если она допустима как справа так и слева.

Если $\mathcal{N} \subset \mathcal{D}$ допустимая подкатегория, то мы говорим, что $\mathcal{D}$ допускает полуортогональное разложение вида $\left\langle \mathcal{N}^{\perp}, \mathcal{N} \right\rangle$ или $\left\langle \mathcal{N}, {}^{\perp}\mathcal{N} \right\rangle$. Иногда бывает, что такой процесс разложения можно продолжить дальше, раскладывая подкатегорию $\mathcal{N}$ или ортогоналы к ней. Мы дадим общее определение полуортогонального разложения.

Определение 2.2.3 *Последовательность допустимых подкатегорий* $(\mathcal{N}_0, ..., \mathcal{N}_n)$ *в триангулированной категории* $\mathcal{D}$ *называется* полуортогональной *если выполняется условие* $\mathcal{N}_j \subset \mathcal{N}_i^{\perp}$ *для всех* $0 \leq j < i \leq n$. *Полуортогональная последовательность называется* полной, *если она порождает категорию* $\mathcal{D}$. *В этом случае такая последовательность называется* полуортогональным разложением *категории* $\mathcal{D}$ *и в этом случае мы пишем:*

$$\mathcal{D} = \left\langle \mathcal{N}_0, ..., \mathcal{N}_n \right\rangle.$$

Простейший пример полуортогонального разложения возникает при наличии полного исключительного набора.

Определение 2.2.4 *Объект* E *в триангулированной категории* $\mathcal{D}$ *называется* исключительным, *если* $\mathrm{Hom}^i(E\,,\ E) = 0$ *при* $i \neq 0$ *и* $\mathrm{Hom}(E\,,\ E) = k$. *Упорядоченный набор исключительных объектов* $(E_0, ..., E_n)$, *называется* полным исключительным набором, *если он порождает категорию* $\mathcal{D}$ *и* $\mathrm{Hom}^{\cdot}(E_i\,,\ E_j) = 0$ *при* $i > j$.

Самый известный пример полного исключительного набора предоставляет проективное пространство.

Пример 2.2.5 ([3]) *На проективном пространстве* $\mathbb{P}^N$ *для каждого* $i \in \mathbb{Z}$ *набор вида*

$(\mathcal{O}(i), ..., \mathcal{O}(i+N))$ *является исключительным и полным.*

Рассмотрение главного примера этого параграфа мы начнем с напоминания фактов о раздутиях и о поведении производной категории когерентных пучков при раздутии. Все эти результаты содержатся в статье [37] (см. также [9]) .

2.2.b. Пусть X – гладкое собственное алгебраическое многообразие, и $Y \subset X$ – гладкое подмногообразие коразмерности r . Обозначим через $\widetilde{X}$ раздутие X с центром вдоль Y . Многообразие $\widetilde{X}$ является также гладким и существует коммутативная диаграмма:

$$\begin{tikzcd} \widetilde{Y} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "p"'] & \widetilde{X} \arrow[d, "\pi"] \\ Y \arrow[r, "i"] & X \end{tikzcd}$$

в которой i и j – замкнутые вложения, и $p : \widetilde{Y} \to Y$ – проективное расслоение исключительного дивизора $\widetilde{Y}$ над центром раздутия $Y,$ в частности, p – плоский морфизм. Напомним, что $\widetilde{Y} \cong \mathbb{P}(N_{X/Y})$, где $N_{X/Y}$ – нормальное расслоение к Y в X . Обозначим через $\mathcal{O}_{\widetilde{Y}}(1)$ каноническое относительно обильное линейное расслоение на $\widetilde{Y} = \mathbb{P}(N_{X/Y})$. Хорошо известно, что оно изоморфно ограничению линейного расслоения $\mathcal{O}(-\widetilde{Y})$ на $\widetilde{Y}$.

Предложение 2.2.6 [37] *Производные функторы обратного образа*

$$\mathbf{L}\pi^* : \mathbf{D}^b(X) \longrightarrow \mathbf{D}^b(\widetilde{X}), \qquad p^* : \mathbf{D}^b(Y) \longrightarrow \mathbf{D}^b(\widetilde{Y})$$

являются вполне строгими.

Доказательство. Формула проекции (1.3) дает изоморфизм:

$$\mathrm{Hom}(\mathbf{L}\pi^*F\,,\, \mathbf{L}\pi^*G) \cong \mathrm{Hom}(F\,,\, \mathbf{R}\pi_*\mathbf{L}\pi^*G) \cong \mathrm{Hom}(F\,,\, \mathbf{R}\pi_*\mathcal{O}_{\widetilde{Y}} \overset{\mathbf{L}}{\otimes} G),$$

где $F, G \in \mathbf{D}^b(X)$. Аналогично и для p^* . Комбинируя их с тем фактом, что $\mathbf{R}\pi_*\mathcal{O}_{\widetilde{X}} \cong \mathcal{O}_X$ и $\mathbf{R}p_*\mathcal{O}_{\widetilde{Y}} = \mathcal{O}_Y$ получаем доказательство. □

Предложение 2.2.7 ([37],[9]) *Для всякого обратимого пучка* $\mathcal{L}$ *на* $\widetilde{Y}$ *функтор*

$$\mathbf{R}j_*(\mathcal{L} \otimes p^*(\cdot)) : \mathbf{D}^b(Y) \longrightarrow \mathbf{D}^b(\widetilde{X})$$

является вполне строгим.

Доказательство. Чтобы доказать, что функтор вполне строгий, достаточно проверить выполнение условий 1) и 2) Теоремы 2.1.5. Для каждой замкнутой точки $y \in Y$ образ $\Phi(\mathcal{O}_y)$ является структурным пучком соответствующего слоя отображения p, рассматриваемый как пучок на $\widetilde{X}$. Так как слои над разными точками не пересекаются, то условие ортогональности 1) Теоремы 2.1.5 выполняется.

Рассмотрим структурный пучок $\mathcal{O}_F$ некоторого p-слоя $F \subset \widetilde{Y}$. Имеем изоморфизм:

$$\mathrm{Hom}^i(j_*\mathcal{O}_F,\, j_*\mathcal{O}_F) \cong \mathrm{Hom}^i(\mathbf{L}j^*j_*\mathcal{O}_F,\, \mathcal{O}_F)$$

В производной категории $\mathbf{D}^b(\widetilde{Y})$ имеется выделенный треугольник

$$\mathcal{O}_F \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{Y}}(1)[1] \longrightarrow \mathbf{L}j^*j_*\mathcal{O}_F \longrightarrow \mathcal{O}_F,$$

где $\mathcal{O}_{\widetilde{Y}}(1)$ – это относительно обильное линейное расслоение на $\widetilde{Y}$, которое изоморфно $\mathcal{O}(-\widetilde{Y})\big|_{\widetilde{Y}}$. Слой F есть проективное пространство, а ограничение пучка $\mathcal{O}_{\widetilde{Y}}(1)$ на F изоморфен $\mathcal{O}(1)$. Поэтому

$$\mathrm{Hom}^i(\mathcal{O}_F \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{Y}}(1),\, \mathcal{O}_F) = 0$$

для всех i. И значит

$$\mathrm{Hom}^i(j_*\mathcal{O}_F,\, j_*\mathcal{O}_F) \cong \mathrm{Hom}^i(\mathcal{O}_F,\, \mathcal{O}_F).$$

Следовательно, условие 2) Теоремы 2.1.5 также выполняется. □

Обозначим через $D(X)$ полную триангулированную подкатегорию в $\mathbf{D}^b(\widetilde{X})$, которая является образом категории $\mathbf{D}^b(X)$ относительно функтора $\mathbf{L}\pi^*$, а через $D(Y)_k$ обозначим полную подкатегорию в $\mathbf{D}^b(\widetilde{X})$, которая является образом категории $\mathbf{D}^b(Y)$ относительно функтора $\mathbf{R}j_*(\mathcal{O}_{\widetilde{Y}}(k) \otimes p^*(\cdot))$, где $\mathcal{O}_{\widetilde{Y}}(k) = \mathcal{O}_{\widetilde{Y}}(1)^{\otimes k}$ и $\mathcal{O}_{\widetilde{Y}}(1)$ – каноническое относительно обильное линейное расслоение на $Y = \mathbb{P}(N_{X/Y})$. Из Предложений 2.2.6 и 2.2.7 следует, что $D(X) \cong \mathbf{D}^b(X)$ и $D(Y)_k \cong \mathbf{D}^b(Y)$.

Теорема 2.2.8 ([37]) *Последовательность допустимых подкатегорий*

$$\left\langle D(Y)_{-r+1}, ..., D(Y)_{-1}, D(X) \right\rangle$$

является полуортогональной и дает полуортогональное разложение категории $\mathbf{D}^b(\widetilde{X})$.

Эта теорема позволяет описать категорию раздутия в терминах многообразия, которое раздувается, и подмногообразия в котором раздуваем.

2.2.c. Используя приведенное выше описание производной категории раздутия, мы теперь исследуем поведение производной категории при простейших преобразованиях типа флип и флоп. Рассмотрим такой пример.

Пусть Y – гладкое подмногообразие в гладком собственном алгебраическом многообразии X такое, что $Y \cong \mathbb{P}^k$ с нормальным расслоением $N_{X/Y} \cong \mathcal{O}_Y(-1)^{\oplus(l+1)}$. Будем предполагать, что $l \le k$.

Обозначим через $\widetilde{X}$ раздутие X с центром вдоль Y. В этом случае мы имеем, что исключительный дивизор $\widetilde{Y}$ изоморфен произведению проективных пространств $\mathbb{P}^k \times \mathbb{P}^l$. Кроме того, в данной ситуации имеется следующее описание нормального пучка к $\widetilde{Y}$ в $\widetilde{X}$.

$$N_{\widetilde{X}/\widetilde{Y}} = \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(\widetilde{Y})\Big|_{\widetilde{Y}} \cong \mathcal{O}(-1;-1),$$

где $\mathcal{O}(-1,-1) := p_1^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^k}(-1) \otimes p_2^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^l}(-1)$. Эти факты позволяют утверждать, что существует сдутие $\widetilde{X}$ такое, что $\widetilde{Y}$ проектируется на второй сомножитель $\mathbb{P}^l$. Это сдутие существует в аналитической категории и как результат мы получаем гладкое многообразие X^+, которое, вообще говоря, может быть не алгебраическим. Мы предположим, что оно алгебраическое. Вся геометрия, описанная выше, отражена в следующей диаграмме:

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{Y} \arrow[dl, "p"'] \arrow[d, "j"] \arrow[dr, "p^+"] & \\ Y \arrow[d, "i"'] & \widetilde{X} \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\pi^+"] & Y^+ \arrow[d, "i^+"] \\ X \arrow[rr, dashed, "fl"] & & X^+ \end{tikzcd} \tag{2.8}$$

Бирациональное отображение $fl : X \longrightarrow X^+$ является простейшим примером преобразования типа флип-флоп и есть флип при $l < k$ и флоп при $l = k$.

В дальнейшем нам понадобится формула для ограничения канонического пучка $\omega_{\widetilde{X}}$ на дивизор $\widetilde{Y}$. При раздутии гладкого подмногообразия получаем

$$\omega_{\widetilde{X}} \cong \pi^*\omega_X \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(l\widetilde{Y}).$$

Из формулы присоединения находим, что

$$\omega_X\big|_Y \cong \omega_Y \otimes \Lambda^{l+1} N^*_{X/Y} \cong \mathcal{O}_Y(l-k).$$

Комбинируя эти факты вместе получаем изоморфизм:

$$\omega_{\widetilde{X}}\big|_{\widetilde{Y}} \cong (\pi^*\omega_X \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(l\widetilde{Y}))\big|_{\widetilde{Y}} \cong p^*(\omega_X\big|_Y) \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(l\widetilde{Y})\big|_{\widetilde{Y}} \cong \mathcal{O}(-k;-l). \tag{2.9}$$

Основная теорема этого параграфа связывает производные категории когерентных пучков на многообразиях X и X^+ .

Теорема 2.2.9 *Пусть* $\mathcal{L}$ *– линейное расслоение на* $\widetilde{X}$ *. В обозначения, введенных выше, функтор*

$$\mathbf{R}\pi_*(\mathbf{L}\pi^{+*}(\cdot) \otimes \mathcal{L}) : \mathbf{D}^b(X^+) \longrightarrow \mathbf{D}^b(X)$$

является вполне строгим.

Доказательство. В начале рассмотрим ограничение $\mathcal{L}$ на $\widetilde{Y}$. Так как $\widetilde{Y} = \mathbb{P}^k \times \mathbb{P}^l$, то $\mathcal{L}\big|_{\widetilde{Y}} \cong \mathcal{O}(a;b)$ для некоторых целых чисел a и b .

Мы должны показать, что для любой пары $A, B \subset \mathbf{D}^b(X^+)$ сквозное отображение

$$\mathrm{Hom}(A\,,\ B) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\mathbf{L}\pi^{+*}A\,,\ \mathbf{L}\pi^{+*}B) \to \mathrm{Hom}(\mathbf{R}\pi_*(\mathbf{L}\pi^{+*}A \otimes \mathcal{L})\,,\ \mathbf{R}\pi_*(\mathbf{L}\pi^{+*}B \otimes \mathcal{L})) \tag{2.10}$$

является изоморфизмом. Из сопряженности функторов имеем изоморфизм

$$\mathrm{Hom}(\mathbf{R}\pi_*(\mathbf{L}\pi^{+*}A \otimes \mathcal{L}),\ \mathbf{R}\pi_*(\mathbf{L}\pi^{+*}B \otimes \mathcal{L})) \cong \mathrm{Hom}(\mathbf{L}\pi^*\mathbf{R}\pi_*(\mathbf{L}\pi^{+*}A \otimes \mathcal{L}), \mathbf{L}\pi^{+*}B \otimes \mathcal{L}).$$

Рассмотрим выделенный треугольник:

$$\mathbf{L}\pi^*\mathbf{R}\pi_*(\mathbf{L}\pi^{+*}A \otimes \mathcal{L}) \longrightarrow \mathbf{L}\pi^{+*}A \otimes \mathcal{L} \longrightarrow \bar{A}. \tag{2.11}$$

Таким образом, чтобы доказать , что сквозное отображение (2.10) является изоморфизмом, необходимо и достаточно показать, что

$$\mathrm{Hom}(\bar{A}\,,\ \mathbf{L}\pi^{+*}B \otimes \mathcal{L}) = 0. \tag{2.12}$$

Так как композиция $\mathbf{R}\pi_*\mathbf{L}\pi^*$ изоморфна тождественному функтору по Предложению 2.2.6, то , применяя функтор $\mathbf{R}\pi_*$ к выделенному треугольнику (2.11), мы получаем, что $\mathbf{R}\pi_* \bar{A} = 0$. И, следовательно, для любого объека $C \in \mathbf{D}^b(X^+)$ $\mathrm{Hom}(\mathbf{L}\pi^* C\,,\ \bar{A}) = 0$. Значит объект $\bar{A}$ принадлежит подкатегории $D(X)^{\perp}$.

Из Теоремы 2.2.8 следует полуортогональное разложение:

$$D(X)^{\perp} = \left\langle D(Y)_{-l}, ..., D(Y)_{-1} \right\rangle$$

Так как Y – это проективное пространство, то из Примера 2.2.5 следует, что каждая подкатегория $D(Y)_{-i}$ обладает полным исключительным набором. Соединяя их вместе, мы получаем полный исключительный набор в $D(X)^{\perp}$. Для нас будет удобен такой набор:

$$D(X)^{\perp} = \left\langle \begin{array}{llll} \mathbf{R}j_*\mathcal{O}(a-k;-l), & .... & .... & \mathbf{R}j_*\mathcal{O}(a;-l), \\ \mathbf{R}j_*\mathcal{O}(a-k+1;-l+1), & .... & .... & \mathbf{R}j_*\mathcal{O}(a+1;-l+1), \\ .... & .... & .... & .... \\ \mathbf{R}j_*\mathcal{O}(a-k+l-1;-1), & .... & .... & \mathbf{R}j_*\mathcal{O}(a+l-1;-1) \end{array} \right\rangle.$$

Мы можем теперь перегруппировать эту исключительную последовательность таким образом, что для категории $D(X)^{\perp}$ получается полуортогональное разложение вида

$$D(X)^{\perp} = \langle \mathcal{B}, \mathcal{A} \rangle\,,$$

где $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – подкатегории, порожденные $\mathbf{R}j_*\mathcal{O}(i;s)$ с $i \geq a$ и $i < a$ соответственно. При $1 \leq i \leq k$ и $1 \leq s \leq l$ объекты $\mathbf{R}j_*\mathcal{O}(a-i;-s)$ принадлежат одновременно подкатегориям $D(X)^{\perp}$ и $D(X^+)^{\perp} \otimes \mathcal{L}$. В частности, $\mathcal{B} \subset D(X)^{\perp} \cap (D(X^+)^{\perp} \otimes \mathcal{L})$. Применяя функтор Hom к выделенному треугольнику (2.11), получаем, что:

$$\mathrm{Hom}(\bar{A}\,,\ \mathbf{R}j_*\mathcal{O}(a-i;-s)) = 0, \qquad \text{при } 1 \leq i \leq k \text{ и } 1 \leq s \leq l.$$

Так как $\bar{A} \in D(X)^{\perp}$ и ортогонален подкатегории $\mathcal{B}$, сразу следует, что $\bar{A} \in \mathcal{A}$. Теперь заметим, что, если объект $\mathbf{R}j_*\mathcal{O}(a+i;s)$ принадлежит подкатегории $\mathcal{A}$, то i удовлетворяет неравенствам $0 \leq i < l$. Учитывая формулу (2.9) для канонического класса $\omega_{\widetilde{X}}\Big|_{\widetilde{Y}} \cong \mathcal{O}(-k;-l)$ и то, что $l \leq k$, мы получаем, что $\mathcal{A} \otimes \omega_{\widetilde{X}} \subset D(X^+)^{\perp} \otimes \mathcal{L}$. Следовательно, для любого объекта $B \in \mathbf{D}^b(X^+)$

$$\mathrm{Hom}(\mathbf{L}\pi^{+*}B \otimes \mathcal{L}\,,\ \bar{A} \otimes \omega_{\widetilde{X}}) = 0.$$

Применяя двойственность Серра (2.1), немедленно получаем необходимое равенство $\mathrm{Hom}(\bar{A}\,,\ \mathbf{L}\pi^{+*}B\otimes\mathcal{L})=0.$ □

Теорема 2.2.10 *В тех же обозначениях, если $l=k$ (и, значит, fl есть флоп) функтор $\mathbf{R}\pi_*(\mathbf{L}\pi^{+*}(\cdot)\otimes\mathcal{L})$ является эквивалентностью триангулированных категорий.*

Доказательство. По предыдущей Теореме данный функтор является вполне строгим. Левый сопряженный к нему имеет вид $\mathbf{R}\pi^+_*(\mathbf{L}\pi^*(\cdot)\otimes\mathcal{L}')$, где $\mathcal{L}'=\mathcal{L}^{-1}\otimes\omega_{\widetilde{X}}\otimes\pi^{+*}\omega^{-1}_{X^+}$. И значит по предыдущей Теореме он также является вполне строгим. Что доказывает, что оба функтора эквивалентности. □

2.2.d. Данные результаты имеют естественное обобщение. Предположим, что гладкое подмногообразие Y в гладком собственном алгебраическом многообразии X является проективизацией векторного расслоения E ранга $k+1$ над гладким многообразием Z , т.е. $Y\cong\mathbb{P}(E)\longrightarrow Z$. Допустим также, что нормальное расслоение $N_{X/Y}$ при ограничении на слой отображения $Y\longrightarrow Z$ изоморфен $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^k}(-1)^{\oplus(l+1)}$. Будем опять предполагать, что $l\leq k$.

Обозначая через $\widetilde{X}$ раздутие X с центром вдоль Y , мы снова имеем диаграмму вида (5.4), где Y^+ является проективизацией некоторого расслоения ранга $l+1$ над Z . В данной ситуации мы можем утверждать, что аналоги Теорем 2.2.9 и 2.2.10 также верны.

Другие похожие примеры возникают в случае, когда X – трехмерное многообразие, а Y – рациональная кривая, для которой выполнено $Y\cdot K_X=0$. В этом случае нормальное расслоение к Y может иметь вид $\mathcal{O}(-1)\oplus\mathcal{O}(-1),\ \mathcal{O}\oplus\mathcal{O}(-2)$ или $\mathcal{O}(1)\oplus O(-3)$. Во всех этих случаях существует бирациональное преобразование типа флоп $fl: X \dashrightarrow X^+$. И во всех этих случаях производные категории когерентных пучков X и X^+ эквивалентны. Первый случай является частным случаем Теоремы 2.2.10. Второй вариант был рассмотрен в статье [9]. И недавно эквивалентность категорий была доказана для всех этих случаев вместе в статье [12].

Глава 3

Вполне строгие функторы между производными категориями

3.1 Диаграммы Постникова и их свертки.

3.1.a. В этом параграфе мы рассмотрим диаграммы Постникова в триангулированных категориях и найдем условия, когда диаграмма Постникова имеет свертку и эта свертка однозначно определена.

Пусть $X^\bullet = \{X^c \overset{d^c}{\to} X^{c+1} \overset{d^{c+1}}{\to} \cdots \to X^0\}$, где $c < 0$ – ограниченный комплекс объектов в триангулированной категории $\mathcal{D}$. Это значит, что все композиции $d^{i+1} \circ d^i$ равны 0 .

Левая система Постникова, связанная с $X^\bullet$, есть по определению диаграмма следующего вида:

$$
\begin{tikzcd}
X^c \arrow[rr, "d^c"] \arrow[dr, "i_c = \mathrm{id}"'] \arrow[rr, phantom, "\circlearrowleft"' yshift=-4ex] & & X^{c+1} \arrow[rr, "d^{c+1}"] \arrow[dr, "i_{c+1}"] \arrow[rr, phantom, "\circlearrowleft"' yshift=-4ex] & & X^{c+2} \arrow[dr, "i_{c+2}"] & & & & X^0 \arrow[dr, "i_0"] & \\
& Y^c = X^c \arrow[ur, "j_c"] \arrow[rr, phantom, "\star" yshift=4ex] & & Y^{c+1} \arrow[ll, "{[1]}"'] \arrow[ur, "j_{c+1}"] \arrow[rr, phantom, "\star" yshift=4ex] & & Y^{c+2} \arrow[ll, "{[1]}"'] & \cdots \arrow[l] & Y^{-1} \arrow[l] \arrow[ur, "j_{-1}"] \arrow[rr, phantom, "\star" yshift=4ex] & & Y^0 \arrow[ll, "{[1]}"']
\end{tikzcd}
$$

в которой все треугольники, отмеченные $\star$ являются выделенными, а все треугольники, отмеченные с помощью $\circlearrowleft$ коммутативны (т.е. $j_k \circ i_k = d^k$). Объект $E \in \mathrm{Ob}\mathcal{D}$ называется левой сверткой комплекса $X^\bullet$, если существует левая система Постникова, связанная с $X^\bullet$ такая, что $E = Y^0$. Класс всех сверток комплекса $X^\bullet$ обозначим через $\mathrm{Tot}(X^\bullet)$. Очевидно, что системы Постникова и их свертки стабильны относительно точных функторов между триангулированными категориями.

Отметим, что класс $\mathrm{Tot}(X^\bullet)$ может содержать много неизоморфных объектов и может также быть пустым. В дальнейшем мы опишем условие достаточное для того, чтобы класс $\mathrm{Tot}(X^\bullet)$ состоял из одного объекта с точностью до изоморфизма. Следующая лемма из [5] понадобится нам в дальнейшем.

Лемма 3.1.1 *Пусть* g *– морфизм между объектами* Y *и* Y' *, которые, в свою очередь, включены в выделенные треугольники:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, dashed, "f"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, dashed, "h"] & X[1] \arrow[d, dashed, "f[1]"] \\ X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & X'[1] \end{tikzcd}$$

Если $v'gu = 0$ *, то существуют морфизмы* $f : X \to X'$ *и* $h : Z \to Z'$ *такие, что тройка* (f, g, h) *является морфизмом треугольников.*

Если в дополнении $\mathrm{Hom}(X[1]\,,\, Z') = 0,$ *тогда морфизмы* f *и* h *, делающие коммутативными первый и соответственно второй квадрат этой диаграммы, однозначно определены этими условиями.*

3.1.b. Сейчас мы докажем две леммы, которые являются обобщением предыдущей для диаграмм Постникова.

Лемма 3.1.2 *Пусть* $X^\bullet = \{X^c \xrightarrow{d^c} X^{c+1} \xrightarrow{d^{c+1}} \cdots \to X^0\}$ *– ограниченный комплекс объектов в триангулированной категории* $\mathcal{D}$ *. Предположим, что он удовлетворяет следующему условию:*

$$\mathrm{Hom}^i(X^a\,,\, X^b) = 0 \;\; \textit{для} \;\; i < 0 \;\; \textit{и} \;\; a < b. \tag{3.1}$$

Тогда существует свертка этого комплекса и все свертки изоморфны друг другу (неканонически).

Если кроме того

$$\mathrm{Hom}^i(X^a\,,\, Y^0) = 0 \;\; \textit{для} \;\; i < 0 \;\; \textit{и всех} \;\; a \tag{3.2}$$

для некоторой свертки Y^0 *(и, следовательно, для любой свертки), тогда все свертки этого комплекса канонически изоморфны друг другу.*

Лемма 3.1.3 *Пусть* $X_1^\bullet$ *и* $X_2^\bullet$ *– ограниченные комплексы, которые удовлетворяют условию (3.1), и пусть* $(f_c, ..., f_0)$ *– морфизм между этими комплексами:*

$$\begin{array}{ccccccc} X_1^c & \xrightarrow{d_1^c} & X_1^{c+1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & X_1^0 \\ \downarrow f_c & & \downarrow f_{c+1} & & & & \downarrow f_0 \\ X_2^c & \xrightarrow{d_2^c} & X_2^{c+1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & X_2^0. \end{array}$$

Предположим, что

$$\mathrm{Hom}^i(X_1^a\,,\ X_2^b) = 0 \ \ \text{для} \ \ i<0 \ \ \text{и для} \ \ a<b. \tag{3.3}$$

Тогда для каждой свертки Y_1^0 *комплекса* $X_1^\bullet$ *и для каждой свертки* Y_2^0 *комплекса* $X_2^\bullet$ *существует морфизм* $f: Y_1^0 \to Y_2^0$, *который коммутирует с морфизмом* f_0 *. Если кроме того*

$$\mathrm{Hom}^i(X_1^a\,,\ Y_2^0) = 0 \ \ \text{для} \ \ i<0 \ \ \text{и всех} \ a, \tag{3.4}$$

тогда этот морфизм однозначно определен.

Доказательство. Будем доказывать обе леммы вместе. Доказательство будем вести по индукции, а основанием индукции является Лемма 3.1.1. Пусть Y^{c+1} – конус морфизма d^c :

$$X^c \xrightarrow{d^c} X^{c+1} \xrightarrow{\alpha} Y^{c+1} \longrightarrow X^c[1]. \tag{3.5}$$

По условию $d^{c+1}\circ d^c = 0$ и $\mathrm{Hom}(X^c[1]\,,\ X^{c+2}) = 0$. Следовательно, существует единственный морфизм $\bar{d}^{c+1}: Y^{c+1} \to X^{c+2}$ такой, что $\bar{d}^{c+1}\circ\alpha = d^{c+1}$.

Рассмотрим композицию $d^{c+2}\circ\bar{d}^{c+1}: Y^{c+1}\to X^{c+3}$. Мы знаем, что $d^{c+2}\circ\bar{d}^{c+1}\circ\alpha = d^{c+2}\circ d^{c+1} = 0$, и кроме того имеем равенство $\mathrm{Hom}(X^c[1]\,,\ X^{c+3}) = 0$. Отсюда немедленно следует, что композиция $d^{c+2}\circ\bar{d}^{c+1}$ также равна 0 .

Рассматривая выделенный треугольник (3.5), мы находим, что

$$\mathrm{Hom}^i(Y^{c+1}\,,\ X^b) = 0$$

при $i<0$ и $b>c+1$. Таким образом, комплекс $Y^{c+1}\longrightarrow X^{c+2}\longrightarrow\cdots\longrightarrow X^0$ также удовлетворяет условию (3.1). По предположению индукции он имеет свертку.

Значит комплекс $X^\bullet$ также обладает сверткой, и, следовательно, класс $\mathrm{Tot}(X^\bullet)$ не пуст.

Теперь мы покажем, что при условии (3.3) всякий морфизм комплексов может быть продолжен до морфизма систем Постникова.

Рассмотрим конусы Y_1^{c+1} и Y_2^{c+1} морфизмов d_1^c и d_2^c. Существует морфизм $g_{c+1}: Y_1^{c+1} \to Y_2^{c+1}$, который дополняет пару (f_c, f_{c+1}) до морфизма треугольников:

$$\begin{array}{ccccccc}
X_1^c & \xrightarrow{d_1^c} & X_1^{c+1} & \xrightarrow{\alpha} & Y_1^{c+1} & \longrightarrow & X_1^c[1] \\
\downarrow{\scriptstyle f_c} & & \downarrow{\scriptstyle f_{c+1}} & & \downarrow{\scriptstyle g_{c+1}} & & \downarrow{\scriptstyle f_c[1]} \\
X_2^c & \xrightarrow{d_2^c} & X_2^{c+1} & \xrightarrow{\beta} & Y_2^{c+1} & \longrightarrow & X_2^c[1]
\end{array}$$

Как было показано выше, существуют однозначно определенные морфизмы $\bar{d}_i^{c+1}: Y_i^{c+1} \to X_i^{c+2}$ для $i = 1, 2$. Рассмотрим следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccc}
Y_1^{c+1} & \xrightarrow{\bar{d}_1^{c+1}} & X_1^{c+2} \\
\downarrow{\scriptstyle g_{c+1}} & & \downarrow{\scriptstyle f_{c+2}} \\
Y_2^{c+1} & \xrightarrow{\bar{d}_2^{c+1}} & X_2^{c+2}
\end{array}$$

Мы утверждаем, что этот квадрат коммутативен. Действительно, обозначим через h разность $f_{c+2} \circ \bar{d}_1^{c+1} - \bar{d}_2^{c+1} \circ g_{c+1}$. Имеется равенство $h \circ \alpha = f_{c+2} \circ d_1^{c+1} - d_2^{c+1} \circ f_{c+1} = 0$. А по условию Леммы $\mathrm{Hom}(X_1^c[1], X_2^{c+2}) = 0$. Отсюда сразу следует, что $h = 0$.

Таким образом, получается морфизм комплексов:

$$\begin{array}{ccccccc}
Y_1^{c+1} & \xrightarrow{\bar{d}_1^{c+1}} & X_1^{c+2} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & X_1^0 \\
\downarrow{\scriptstyle g_{c+1}} & & \downarrow{\scriptstyle f_{c+2}} & & & & \downarrow{\scriptstyle f_0} \\
Y_2^{c+1} & \xrightarrow{\bar{d}_2^{c+1}} & X_2^{c+2} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & X_2^0
\end{array}$$

Эти комплексы удовлетворяют условиям (3.1) и (3.3). По индуктивному предположению морфизм между этими комплексами продолжается до морфизма систем Постникова. Следовательно, получаем морфизм между системами Постникова, связанными с комплексами $X_1^\bullet$ и $X_2^\bullet$.

Кроме того, мы видим, что если все f_i изоморфизмы, то и морфизм между системами Постникова также является изоморфизмом. Следовательно, при условии (3.1) все объекты из $\mathrm{Tot}(X^\bullet)$ изоморфны.

В заключении рассмотрим морфизм между выделенными треугольниками, которые являются частью диаграмм Постникова:

$$\begin{array}{ccccccc} Y_1^{-1} & \xrightarrow{j_{1,-1}} & X_1^0 & \xrightarrow{i_{1,0}} & Y_1^0 & \longrightarrow & Y_1^{-1}[1] \\ \downarrow{\scriptstyle g_{-1}} & & \downarrow{\scriptstyle f_0} & & \downarrow{\scriptstyle g_0} & & \downarrow{\scriptstyle g_{-1}[1]} \\ Y_2^{-1} & \xrightarrow{j_{2,-1}} & X_2^0 & \xrightarrow{i_{2,0}} & Y_2^0 & \longrightarrow & Y_2^{-1}[1] \end{array}$$

Если комплексы $X_i^\bullet$ удовлетворяют условию (3.4) (т.е. $\mathrm{Hom}^i(X_1^a, Y_2^0) = 0$ при $i < 0$ и всех a), то получаем $\mathrm{Hom}(Y_1^{-1}[1], Y_2^0) = 0$. И по Лемме 3.1.1 морфизм g_0 однозначно определен. Леммы доказаны. □

3.2 Вполне строгие функторы между производными категориями когерентных пучков.

3.2.a. Пусть X и M – два гладких проективных многообразия на некотором полем k . Как и раньше мы будем обозначать через $\mathbf{D}^b(X)$ и $\mathbf{D}^b(M)$ ограниченные производные категории когерентных пучков на X и M соответственно, которые как было показано выше имеют структуру триангулированных категорий.

Рассмотрим произведение $M \times X$ и обозначим через p и π проекции $M \times X$ на M и соответственно на X :

$$M \xleftarrow{p} M \times X \xrightarrow{\pi} X.$$

Для каждого объекта $\mathcal{E} \in \mathbf{D}^b(M \times X)$ мы определили точный функтор $\Phi_{\mathcal{E}}$ из $\mathbf{D}^b(M)$ в $\mathbf{D}^b(X)$ по формуле (2.2):

$$\Phi_{\mathcal{E}}(\bullet) := \mathbf{R}\pi_*(\mathcal{E} \overset{\mathbf{L}}{\otimes} p^*(\bullet)). \tag{3.6}$$

Функтор $\Phi_{\mathcal{E}}$ имеет левый и правый сопряженные функторы $\Phi_{\mathcal{E}}^*$ и $\Phi_{\mathcal{E}}^!$ соответственно, которые задавались формулами (2.3):

$$\Phi_{\mathcal{E}}^*(\bullet) = \mathbf{R}p_*(\mathcal{E}^\vee \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \pi^*(\omega_X[\dim X] \otimes (\bullet))),$$

$$\Phi_{\mathcal{E}}^!(\bullet) = \omega_M[\dim M] \otimes \mathbf{R}p_*(\mathcal{E}^\vee \overset{\mathbf{L}}{\otimes} (\bullet)),$$

где ω_X и ω_M – канонические пучки на X и M , и по определению $\mathcal{E}^\vee := \mathbf{R}^\bullet \underline{\mathcal{H}om}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{M\times X})$.

3.2.b. Чтобы исследовать вопрос, когда два многообразия имеют эквивалентные производные категории когерентных пучков, и описывать их группы автоэквивалентностей, желательно иметь явные формулы для всех точных функторов. Существует гипотеза, что все они представляются объектами на произведении, т.е. имеют вид (3.6). Однако, доказательство этой гипотезы до сих пор не известно. Тем не менее, оказывается, что частный случай этой гипотезы имеет место. А именно, если функтор является вполне строгим и имеет сопряженный, то он может быть представлен объектом на произведении. Доказательству этого факта и посвящена данная глава. Более точно основная теорема этой главы выглядит так.

Теорема 3.2.1 *Пусть* F *– точный функтор из категории* $\mathbf{D}^b(M)$ *в категорию* $\mathbf{D}^b(X)$ *, где* M *и* X *– гладкие проективные многообразия. Предположим, что* F *является вполне строгим и имеет правый (или, соответственно, левый) сопряженный функтор. Тогда существует объект* $\mathcal{E} \in \mathbf{D}^b(M \times X)$ *такой, что функтор* F *изоморфен функтору* $\Phi_{\mathcal{E}}$ *, определенному по правилу (3.6), и этот объект однозначно определен с точностью до изоморфизма.*

Отсюда мы немедленно получаем, что всякая эквивалентность представляется объектом на произведении, так как любая эквивалентность имеет сопряженную, которая совпадает с квазиобратным функтором.

Теорема 3.2.2 *Пусть* X *и* M *– два гладких проективных многообразия. Предположим, что точный функтор* $F : \mathbf{D}^b(X) \xrightarrow{\sim} \mathbf{D}^b(M)$ *является эквивалентностью триангулированных категорий. Тогда существует единственный с точностью до изоморфизма объект* $\mathcal{E} \in \mathbf{D}^b(X \times M)$ *такой, что функтор* F *изоморфен функтору* $\Phi_{\mathcal{E}}$*.*

Эти результаты дают возможность описывать все эквивалентности между производными категориями когерентных пучков и отвечать на вопрос, когда два разных многообразия имеют эквивалентные производные категории когерентных пучков.

Прежде чем перейти к доказательству этих теорем сделаем одно замечание. Пусть F – точный функтор из категории $\mathbf{D}^b(M)$ в категорию $\mathbf{D}^b(X)$. Обозначим через F^* и $F^!$ левый и соответственно правый производные функторы, если они существуют. Если существует левый сопряженный F^* , тогда существует и правый сопряженный $F^!$ и он определяется формулой

$$F^! = S_M \circ F^* \circ S_X^{-1},$$

где S_X и S_M – функторы Серра в категориях $\mathbf{D}^b(X)$ и $\mathbf{D}^b(M)$, которые существуют и равны $(\cdot)\otimes\omega_X[\dim X]$ и соответственно $(\cdot)\otimes\omega_M[\dim M]$ (см. 2.1).

3.2.c. Пусть F – точный функтор из производной категории $\mathbf{D}^b(\mathcal{A})$ в производную категорию $\mathbf{D}^b(\mathcal{B})$. Мы будем говорить, что функтор F ограничен, если существуют $z \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ такие, что для любого объекта $A \in \mathcal{A}$ когомологии $H^i(F(A))$ равны 0 при $i \notin [z, z+n]$.

Лемма 3.2.3 *Пусть M и X – проективные многообразия и M гладкое многообразие. Если точный функтор $F : \mathbf{D}^b(M) \longrightarrow \mathbf{D}^b(X)$ имеет левый сопряженный, тогда он ограничен.*

Доказательство. Обозначим через $G : \mathbf{D}^b(X) \longrightarrow \mathbf{D}^b(M)$ левый сопряженный к F. Зафиксируем очень обильное линейное расслоение $\mathcal{L}$ на X. Оно задает вложение $i : X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$. Для любого $k < 0$ имеется правая резольвента пучка $\mathcal{O}(k)$ на $\mathbb{P}^N$ в терминах пучков $\mathcal{O}(j)$, где $j = 0, 1, .., N$, которая имеет вид

$$\mathcal{O}(k) \xrightarrow{\sim} \Big\{ V_0 \otimes \mathcal{O} \longrightarrow V_1 \otimes \mathcal{O}(1) \longrightarrow \cdots \longrightarrow V_N \otimes \mathcal{O}(N) \longrightarrow 0 \Big\}$$

где все V_j – векторные пространства ([3]). Ограничение этой резольвенты на X дает резольвенту пучка $\mathcal{L}^k$ в терминах пучков $\mathcal{L}^j$, где $j = 0, 1, ..., N$. Так как для всех $j = 0, ..., N$ ненулевые когомологии объектов $G(\mathcal{L}^j)$ принадлежат некоторому отрезку, то найдется целое z' и натуральное n' такие, что для всех $k \le 0$ когомологии $H^l(G(\mathcal{L}^k))$ равны 0 при $l \notin [z', z'+n']$. Это сразу следует из существования спектральной последовательности

$$E_1^{p,q} = V_p \otimes H^q(G(\mathcal{L}^p)) \Rightarrow H^{p+q}(G(\mathcal{L}^i)).$$

Пусть $A \in \mathbf{D}^b(M)$ – некоторый объект. Из обильности расслоения $\mathcal{L}$ следует, что если для фиксированного j имеем $\mathrm{Hom}^j(\mathcal{L}^i, F(A)) = 0$ для всех $i \ll 0$, тогда когомология $H^j(F(A))$ равна 0. По предположению, функтор G является левым сопряженным к F. Следовательно,

$$\mathrm{Hom}^j(\mathcal{L}^i, F(A)) \cong \mathrm{Hom}^j(G(\mathcal{L}^i), A).$$

Рассмотрим теперь пучок $\mathcal{F}$ на многообразии M. Так как когомологии объектов $G(\mathcal{L}^i)$ для всех $i<0$ сосредоточены на отрезке $[z', z'+n']$, то имеем что $\mathrm{Hom}^j(G(\mathcal{L}^i), \mathcal{F}) = 0$ для всех $i<0$ и $j \notin [-z'-n', -z'+\dim M]$ (здесь мы использовали тот факт, что гомологическая размерность категории $coh(M)$ равна $\dim M$). Следовательно, при тех же значениях j мы имеем, что $H^j(F(\mathcal{F})) = 0$ для любого пучка $\mathcal{F}$. И значит функтор F ограничен. □

Замечание 3.2.4 *Заменяя если необходимо функтор F при помощи сдвига в производной категории мы с этого момента и на протяжении всей главы будем предполагать, что для любого пучка $\mathcal{F}$ на M когомологии $H^i(F(\mathcal{F}))$ являются ненулевыми только при $i \in [-a, 0]$, где a – некоторое фиксированное натуральное число.*

3.3 Построение объекта, представляющего вполне строгий функтор.

3.3.a. В этом параграфе мы начнем доказывать Теорему 2.1.5. Более точно, в этом параграфе мы по вполне строгому функтору F построим некоторый объект $\mathcal{E} \in \mathbf{D}^b(M \times X)$, а в следующем параграфе мы докажем, что функторы F и $\Phi_{\mathcal{E}}$ изоморфны. Построение объекта будет проходить в несколько этапов. В начале мы рассмотрим некоторое замкнутое вложение $j : M \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ и построим некоторый объект $\mathcal{E}' \in \mathbf{D}^b(\mathbb{P}^N \times X)$. Затем мы покажем, что на самом деле этот объект приходит с подмногообразия $M \times X$, то есть существует объект $\mathcal{E} \in \mathbf{D}^b(M \times X)$ такой, что $\mathcal{E}' = \mathbf{R}J_*\mathcal{E}$, где $J = (j \times \mathrm{id})$ – замкнутое вложение $M \times X$ в $\mathbb{P}^N \times X$. И в следующем параграфе мы докажем, что функтор F изоморфен функтору $\Phi_{\mathcal{E}}$.

Выберем очень обильное линейное расслоение $\mathcal{L}$ на многообразии M такой, что $\mathrm{H}^i(\mathcal{L}^k) = 0$ для всех $k > 0$ и всех $i \neq 0$. Через j обозначим замкнутое вложение многообразия M в проективное пространство $\mathbb{P}^N$, задаваемое расслоением $\mathcal{L}$.

На произведении $\mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^N$ существует так называемая резольвента диагонали (см. [3]). Это комплекс пучков следующего вида:

$$0 \to \mathcal{O}(-N) \boxtimes \Omega^N(N) \xrightarrow{d_{-N}} \mathcal{O}(-N+1) \boxtimes \Omega^{N-1}(N-1) \to \cdots \to \mathcal{O}(-1) \boxtimes \Omega^1(1) \xrightarrow{d_{-1}} \mathcal{O} \boxtimes \mathcal{O}. \tag{3.7}$$

Этот комплекс является резольвентой структурного пучка $\mathcal{O}_\Delta$, где Δ – диагональ на произведении $\mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^N$.

Обозначим через F' функтор из категории $\mathbf{D}^b(\mathbb{P}^N)$ в категорию $\mathbf{D}^b(X)$, который является композицией $F \circ \mathbf{L}j^*$. Рассмотрим диаграмму проекций

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^N \times X & \xrightarrow{\pi'} & X \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \\ \mathbb{P}^N & & \end{array}$$

Обозначим через

$$d'_{-i} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{P}^N \times X}(\mathcal{O}(-i) \boxtimes F'(\Omega^i(i)) \, , \; \mathcal{O}(-i+1) \boxtimes F'(\Omega^{i-1}(i-1)))$$

образ морфизма d_{-i} относительно следующего сквозного отображения.

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{O}(-i) \boxtimes \Omega^i(i) \, , \; \mathcal{O}(-i+1) \boxtimes \Omega^{i-1}(i-1)) \xrightarrow{\sim}$$

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{O} \boxtimes \Omega^i(i) \, , \; \mathcal{O}(1) \boxtimes \Omega^{i-1}(i-1)) \xrightarrow{\sim}$$

$$\mathrm{Hom}(\Omega^i(i) \, , \; \mathrm{H}^0(\mathcal{O}(1)) \otimes \Omega^{i-1}(i-1)) \longrightarrow$$

$$\mathrm{Hom}(F'(\Omega^i(i)) \, , \; \mathrm{H}^0(\mathcal{O}(1)) \otimes F'(\Omega^{i-1}(i-1))) \xrightarrow{\sim}$$

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{O} \boxtimes F'(\Omega^i(i)) \, , \; \mathcal{O}(1) \boxtimes F'(\Omega^{i-1}(i-1))) \xrightarrow{\sim}$$

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{O}(-i) \boxtimes F'(\Omega^i(i)) \, , \; \mathcal{O}(-i+1) \boxtimes F'(\Omega^{i-1}(i-1)))$$

Не сложно проверить, что композиция $d'_{-i+1} \circ d'_{-i}$ равна 0 . Следовательно, мы можем рассмотреть следующий ограниченный комплекс объектов производной категории $\mathbf{D}^b(\mathbb{P}^N \times X)$:

$$C^\bullet := \{\mathcal{O}(-N) \boxtimes F'(\Omega^N(N)) \xrightarrow{d'_{-N}} \cdots \longrightarrow \mathcal{O}(-1) \boxtimes F'(\Omega^1(1)) \xrightarrow{d'_{-1}} \mathcal{O} \boxtimes F'(\mathcal{O})\}. \tag{3.8}$$

При $l<0$ имеем

$$\mathrm{Hom}^l(\mathcal{O}(-i)\boxtimes F'(\Omega^i(i))\,,\ \mathcal{O}(-k)\boxtimes F'(\Omega^k(k)))\cong$$

$$\mathrm{Hom}^l(\mathcal{O}\boxtimes F'(\Omega^i(i))\,,\ \mathrm{H}^0(\mathcal{O}(i-k))\otimes F'(\Omega^k(k)))\cong$$

$$\mathrm{Hom}^l(j^*(\Omega^i(i))\,,\ \mathrm{H}^0(\mathcal{O}(i-k))\otimes j^*(\Omega^k(k)))=0$$

Следовательно, по Лемме 3.1.2 существует свертка для комплекса $C^\bullet$, и все свертки изоморфны. Обозначим через $\mathcal{E}'$ свертку комплекса $C^\bullet$, а через γ_0 обозначим морфизм $\mathcal{O}\boxtimes F'(\mathcal{O})\xrightarrow{\gamma_0}\mathcal{E}'$. (На самом деле далее мы увидим, что все свертки комплекса $C^\bullet$ изоморфны друг другу канонически.) Пусть теперь $\Phi_{\mathcal{E}'}$ будет функтор из категории $\mathbf{D}^b(\mathbb{P}^N)$ в категорию $\mathbf{D}^b(X)$, определенный формулой (2.2).

Лемма 3.3.1 *Для всех* $k\in\mathbb{Z}$ *существуют канонические изоморфизмы*

$$f_k : F'(\mathcal{O}(k))\xrightarrow{\sim}\Phi_{\mathcal{E}'}(\mathcal{O}(k)),$$

и эти изоморфизмы функториальны, то есть для любого $\alpha:\mathcal{O}(k)\to\mathcal{O}(l)$ *диаграмма*

$$\begin{array}{ccc}
F'(\mathcal{O}(k)) & \xrightarrow{F'(\alpha)} & F'(\mathcal{O}(l))\\
{\scriptstyle f_k}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_l}\\
\Phi_{\mathcal{E}'}(\mathcal{O}(k)) & \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{E}'}(\alpha)} & \Phi_{\mathcal{E}'}(\mathcal{O}(l))
\end{array}$$

является коммутативной.

Доказательство. Сначала предположим, что $k\ge 0$.

Рассмотрим резольвенту (3.7) для диагонали $\Delta\subset\mathbb{P}^N\times\mathbb{P}^N$. Умножим ее тензорно на $\mathcal{O}(k)\boxtimes\mathcal{O}$ и возьмем прямой образ относительно проекции на второй сомножитель. Мы получим следующую резольвенту пучка $\mathcal{O}(k)$ на проективном пространстве $\mathbb{P}^N$

$$\{\mathrm{H}^0(\mathcal{O}(k-N))\otimes\Omega^N(N)\longrightarrow\cdots\longrightarrow\mathrm{H}^0(\mathcal{O}(k-1))\otimes\Omega^1(1)\longrightarrow\mathrm{H}^0(\mathcal{O}(k))\otimes\mathcal{O}\}\xrightarrow{\delta_k}\mathcal{O}(k)$$

Из условия точности функтора F' следует, что объект $F'(\mathcal{O}(k))$ является сверткой комплекса

$$\mathrm{H}^0(\mathcal{O}(k-N))\otimes F'(\Omega^N(N))\longrightarrow\cdots\longrightarrow\mathrm{H}^0(\mathcal{O}(k-1))\otimes F'(\Omega^1(1))\longrightarrow\mathrm{H}^0(\mathcal{O}(k))\otimes F'(\mathcal{O})$$

объектов категории $\mathbf{D}^b(X)$. Обозначим этот комплекс через $D_k^\bullet$.

Теперь вспомним, что по построению объект $\mathcal{E}'$ является сверткой комплекса $C^\bullet$ (3.8). Рассмотрим комплекс $C_k^\bullet := q^*\mathcal{O}(k)\otimes C^\bullet$ на $\mathbb{P}^N \times X$. Объект $q^*\mathcal{O}(k)\otimes\mathcal{E}'$ является его сверткой. И имеется морфизм $\gamma_k : \mathcal{O}(k) \boxtimes F'(\mathcal{O}) \longrightarrow q^*\mathcal{O}(k) \otimes \mathcal{E}'$, канонически получающийся из γ_0 . Комплекс $\pi'_*(C_k^\bullet)$, который есть прямой образ комплекса $(C_k^\bullet)$ при проекции на второй сомножитель, канонически изоморфен комплексу $D_k^\bullet$. Таким образом, мы видим, что объекты $F'(\mathcal{O}(k))$ и $\Phi_{\mathcal{E}'}(\mathcal{O}(k)) := \mathbf{R}\pi'_*(q^*\mathcal{O}(k)\otimes\mathcal{E}')$ оба являются свертками одного и того же комплекса $D_k^\bullet$.

По предположению функтор F является полным и строгим. Следовательно, для локально свободных пучков $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$ на $\mathbb{P}^N$ при $i < 0$ имеем равенство

$$\mathrm{Hom}^i(F'(\mathcal{G})\,,\ F'(\mathcal{H})) = \mathrm{Hom}^i(j^*(\mathcal{G})\,,\ j^*(\mathcal{H})) = 0.$$

Это, в частности, влечет, что комплекс $D_k^\bullet$ удовлетворяет условиям (3.1) и (3.2) Леммы 3.1.2. Следовательно, по этой лемме существует однозначно определенный изоморфизм $f_k : F'(\mathcal{O}(k)) \xrightarrow{\sim} \Phi_{\mathcal{E}'}(\mathcal{O}(k))$, делающий коммутативной следующую диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{H}^0(\mathcal{O}(k))\otimes F'(\mathcal{O}) & \xrightarrow{F'(\delta_k)} & F'(\mathcal{O}(k)) \\
{\scriptstyle \mathrm{id}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_k} \\
\mathrm{H}^0(\mathcal{O}(k))\otimes F'(\mathcal{O}) & \xrightarrow{\mathbf{R}\pi'_*(\gamma_k)} & \Phi_{\mathcal{E}'}(\mathcal{O}(k)).
\end{array}$$

Теперь мы покажем, что эти изоморфизмы функториальны. Для любого $\alpha : \mathcal{O}(k) \to \mathcal{O}(l)$ имеются коммутативные квадраты:

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{H}^0(\mathcal{O}(k))\otimes F'(\mathcal{O}) & \xrightarrow{F'(\delta_k)} & F'(\mathcal{O}(k)) \\
{\scriptstyle \mathrm{H}^0(\alpha)\otimes\mathrm{id}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F'(\alpha)} \\
\mathrm{H}^0(\mathcal{O}(l))\otimes F'(\mathcal{O}) & \xrightarrow{F'(\delta_l)} & F'(\mathcal{O}(l))
\end{array}$$

и

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{H}^0(\mathcal{O}(k))\otimes F'(\mathcal{O}) & \xrightarrow{\mathbf{R}\pi'_*(\gamma_k)} & \Phi_{\mathcal{E}'}(\mathcal{O}(k)) \\
{\scriptstyle \mathrm{H}^0(\alpha)\otimes\mathrm{id}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Phi_{\mathcal{E}'}(\alpha)} \\
\mathrm{H}^0(\mathcal{O}(l))\otimes F'(\mathcal{O}) & \xrightarrow{\mathbf{R}\pi'_*(\gamma_l)} & \Phi_{\mathcal{E}'}(\mathcal{O}(l))
\end{array}$$

Из этих трех коммутативных квадратов мы получаем следующие равенства:

$$f_l \circ F'(\alpha) \circ F'(\delta_k) = f_l \circ F'(\delta_l) \circ (\mathrm{H}^0(\alpha)\otimes\mathrm{id}) = \mathbf{R}\pi'_*(\gamma_l) \circ (\mathrm{H}^0(\alpha)\otimes\mathrm{id})$$
$$\Phi_{\mathcal{E}'}(\alpha) \circ f_k \circ F'(\delta_k) = \Phi_{\mathcal{E}'}(\alpha) \circ \mathbf{R}\pi'_*(\gamma_k) = \mathbf{R}\pi'_*(\gamma_l) \circ (\mathrm{H}^0(\alpha)\otimes\mathrm{id}).$$

Комплексы $D_k^\bullet$ и $D_l^\bullet$ удовлетворяют условиям Леммы 3.1.3, и, следовательно, существует единственный морфизм $h : F'(\mathcal{O}(k)) \to \Phi_{\mathcal{E}'}(\mathcal{O}(l))$, для которого

$$h \circ F'(\delta_k) = \mathbf{R}\pi'_*(\gamma_l) \circ (\mathrm{H}^0(\alpha) \otimes \mathrm{id}).$$

Таким образом, морфизм h совпадает одновременно с $f_l \circ F'(\alpha)$ и $\Phi_{\mathcal{E}'}(\alpha) \circ f_k$, что влечет равенство двух последних.

Теперь рассмотрим случай $k < 0$.

Возьмем правую резольвенту

$$\mathcal{O}(k) \xrightarrow{\sim} \left\{ V_0^k \otimes \mathcal{O} \longrightarrow \cdots \longrightarrow V_N^k \otimes \mathcal{O}(N) \right\}$$

для пучка $\mathcal{O}(k)$ на $\mathbb{P}^N$. Опять применяя Лемму 3.1.3, находим, что морфизм комплексов

$$\begin{array}{ccccc} V_0^k \otimes F'(\mathcal{O}) & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & V_N^k \otimes F'(\mathcal{O}(N)) \\ {\scriptstyle \mathrm{id} \otimes f_0} \big\downarrow \wr & & & & {\scriptstyle \mathrm{id} \otimes f_N} \big\downarrow \wr \\ V_0^k \otimes \Phi_{\mathcal{E}'}(\mathcal{O}) & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & V_N^k \otimes \Phi_{\mathcal{E}'}(\mathcal{O}(N)) \end{array}$$

задает однозначно определенный морфизм $f_k : F'(\mathcal{O}(k)) \longrightarrow \Phi_{\mathcal{E}'}(\mathcal{O}(k))$. Непосредственная проверка, которую мы опускаем, дает нам функториальность этих морфизмов. $\square$

Замечание 3.3.2 *Заметим, что объект* $\mathcal{E}' \in \mathbf{D}^b(\mathbb{P}^N \times X)$ *, построенный по функтору* F *, определен однозначно.*

3.3.b. Теперь мы докажем существование такого объекта в категории $\mathcal{E} \in \mathbf{D}^b(M \times X)$, что $\mathbf{R}J_*\mathcal{E} \cong \mathcal{E}'$, где, как и выше, J – вложение $M \times X$ в $\mathbb{P}^N \times X$.

Пусть $\mathcal{L}$ – очень обильное линейное расслоение на M и $j : M \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ – вложение в проективное пространство, задаваемое этим расслоением $\mathcal{L}$. Обозначим через A градуированную алгебру $\bigoplus\limits_{i=0}^{\infty} \mathrm{H}^0(M, \mathcal{L}^i)$.

Положим $B_0 = k$ и $B_1 = A_1$. Для $m \geq 2$ мы определим B_m по правилу

$$B_m = \mathrm{Ker}\,(B_{m-1} \otimes A_1 \xrightarrow{u_{m-1}} B_{m-2} \otimes A_2) \tag{3.9}$$

где u_{m-1} – естественное отображение, определяемое по индукции.

Определение 3.3.3 *Назовем алгебру* A n*-Кошулевой, если следующая последовательность правых* A*-модулей*

$$B_n \otimes_k A \longrightarrow B_{n-1} \otimes_k A \longrightarrow \cdots \longrightarrow B_1 \otimes_k A \longrightarrow A \longrightarrow k \longrightarrow 0$$

точна. Алгебра называется Кошулевой, если она n-Кошулева для любого n.

Предположим, что алгебра A является n-Кошулевой. Положим $R_0 = \mathcal{O}_M$, а для $m \geq 1$ обозначим через R_m ядро канонического морфизма

$$B_m \otimes \mathcal{O}_M \longrightarrow B_{m-1} \otimes \mathcal{L},$$

определенного естественным вложением $B_m \longrightarrow B_{m-1} \otimes A_1$ Используя (3.9), мы получаем канонический морфизм $R_m \longrightarrow A_1 \otimes R_{m-1}$ (на самом деле можно проверить, что $\mathrm{Hom}(R_m\,,\ R_{m-1}) \cong A_1^*$).

Более того, при $m \leq n$ n-Кошулевость алгебры A влечет точность следующего комплекса пучков:

$$0 \longrightarrow R_m \longrightarrow B_m \otimes \mathcal{O}_M \longrightarrow B_{m-1} \otimes \mathcal{L} \longrightarrow \cdots \longrightarrow B_1 \otimes \mathcal{L}^{m-1} \longrightarrow \mathcal{L}^m \longrightarrow 0. \quad (3.10)$$

На проективном пространстве $\mathbb{P}^N$ существует точный комплекс вида

$$0 \longrightarrow \Omega^m(m) \longrightarrow \Lambda^m A_1 \otimes \mathcal{O} \longrightarrow \Lambda^{m-1} A_1 \otimes \mathcal{O}(1) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{O}(m) \longrightarrow 0. \qquad (3.11)$$

Существует каноническое отображение $f_m : j^*\Omega^m(m) \longrightarrow R_m$. Действительно, так как алгебра A коммутативна, то имеются естественные вложения $\Lambda^i A_1 \subset B_i$. Поэтому существует морфизм из комплекса (3.11), ограниченного на M, в комплекс (3.10) и значит каноническое отображение $f_m : j^*\Omega^m(m) \longrightarrow R_m$.

Известно, что для любого n существует такое l, что алгебра Веронезе $A^l = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathrm{H}^0(M, \mathcal{L}^{il})$ является n-Кошулевой (Более того в статье [2] доказано, что на самом деле A^l является Кошулевой для $l \gg 0$).

В дальнейшем однако кроме n-Кошулевости алгебры Веронезе нам будут нужны некоторые дополнительные свойства. А именно, используя технику статьи [21] и заменяя пучок $\mathcal{L}$ на достаточно большую степень $\mathcal{L}^j$, мы можем доказать следующее предложение.

Предложение 3.3.4 *Для всякого целого n мы можем найти очень обильное линейное расслоение $\mathcal{L}$ такое, что*

1) алгебра A является n-Кошулевой, то есть последовательность

$$B_n \otimes_k A \longrightarrow B_{n-1} \otimes_k A \longrightarrow \cdots \longrightarrow B_1 \otimes_k A \longrightarrow A \longrightarrow k \longrightarrow 0$$

точна;

2) комплекс пучков на M

$$A_{k-n}\otimes R_n \longrightarrow A_{k-n+1}\otimes R_{n-1}\longrightarrow\cdots\longrightarrow A_{k-1}\otimes R_1\longrightarrow A_k\otimes R_0\longrightarrow \mathcal{L}^k\longrightarrow 0$$

точен для всех $k\geq 0$ *(если* $k-i<0$ *, тогда по определению* $A_{k-i}=0$ *);*

3) комплекс пучков на $M\times M$

$$\mathcal{L}^{-n}\boxtimes R_n\longrightarrow\cdots\longrightarrow\mathcal{L}^{-1}\boxtimes R_1\longrightarrow\mathcal{O}_M\boxtimes R_0\longrightarrow\mathcal{O}_\Delta$$

является точным, то есть дает n-резольвенту диагонали на $M\times M$ *.*

Доказательство этого Предложения мы дадим в Приложении 3.A.

Обозначим через T_k ядро канонического морфизма $A_{k-n}\otimes R_n\longrightarrow A_{k-n+1}\otimes R_{n-1}$. Учитывая свойство 2) Предложения 3.3.4 и то, что $\mathrm{Ext}^{n+1}(\mathcal{L}^k, T_k)=0$ для $n\gg 0$, мы находим, что любая свертка комплекса

$$A_{k-n}\otimes R_n\longrightarrow A_{k-n+1}\otimes R_{n-1}\longrightarrow\cdots\longrightarrow A_k\otimes R_0,$$

канонически изоморфна $T_k[n]\oplus\mathcal{L}^k$.

Канонические морфизмы $R_k\longrightarrow A_1\otimes R_{k-1}$ индуцируют морфизмы $\mathcal{L}^{-k}\boxtimes F(R_k)\longrightarrow\mathcal{L}^{-k+1}\boxtimes F(R_{k-1})$. Это следует из существования изоморфизмов:

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{L}^{-k}\boxtimes F(R_k),\ \mathcal{L}^{-k+1}\boxtimes F(R_{k-1}))\cong\mathrm{Hom}(F(R_k),\ \mathrm{H}^0(\mathcal{L})\otimes F(R_{k-1}))\cong$$

$$\cong\mathrm{Hom}(R_k,\ A_1\otimes R_{k-1}).$$

Более того, мы имеем комплекс объектов в категории $\mathbf{D}^b(M\times X)$

$$\mathcal{L}^{-n}\boxtimes F(R_n)\longrightarrow\cdots\longrightarrow\mathcal{L}^{-1}\boxtimes F(R_1)\longrightarrow\mathcal{O}_M\boxtimes F(R_0).\tag{3.12}$$

По Лемме 3.1.2 комплекс (3.12) имеет свертку и все свертки изоморфны. Обозначим эту свертку через $G\in\mathbf{D}^b(M\times X)$.

Для любого $k\geq 0$, объект $\mathbf{R}\pi_*(G\otimes p^*(\mathcal{L}^k))$ является сверткой комплекса

$$A_{k-n}\otimes F(R_n)\longrightarrow A_{k-n+1}\otimes F(R_{n-1})\longrightarrow\cdots\longrightarrow A_k\otimes F(R_0).\tag{3.13}$$

С другой стороны, объект $F(T_k[n]\oplus\mathcal{L}^k)$ также является сверткой этого комплекса, который очевидно удовлетворяет условию Леммы 3.1.2. Следовательно, имеется изоморфизм $\mathbf{R}\pi_*(G\otimes p^*(\mathcal{L}^k))\cong F(T_k[n]\oplus\mathcal{L}^k)$.

Из Леммы 3.2.3 и Замечания 3.2.4 следует, что для всех $k>0$ нетривиальные пучки когомологий $H^i(\mathbf{R}\pi_*(G\otimes p^*(\mathcal{L}^k)))=H^i(F(T_k)[n])\oplus H^i(F(\mathcal{L}^k))$ сконцентрированы на объединении $[-n-a,-n]\cup[-a,0]$ (число a определно в 3.2.4). Так как пучок $\mathcal{L}$ обилен, то получаем, что пучки когомологий $H^i(G)$ также сконцентрированы на $[-n-a,-n]\cup[-a,0]$. Мы можем предполагать, что $n>\dim M+\dim X+a$. В этом случае, так как категория когерентных пучков на многообразии $M\times X$ имеет гомологическую размерность равную $\dim M+\dim X$, мы получаем, что $G\cong C\oplus\mathcal{E}$, где $\mathcal{E},C$ – такие объекты категории $\mathbf{D}^b(M\times X)$, для которых $H^i(\mathcal{E})=0$ при $i\notin[-a,0]$ и $H^i(C)=0$ при $i\notin[-n-a,-n]$. Отсюда в частности получаем, что $\mathbf{R}\pi_*(\mathcal{E}\otimes p^*(\mathcal{L}^k))\cong F(\mathcal{L}^k)$. Заметим, что так как объект G определен однозначно как свертка комплекса (3.12), то и объект $\mathcal{E}$ так же определен однозначно с точностью до изоморфизма.

Теперь мы покажем, что существует изоморфизм $\mathbf{R}J_*\mathcal{E}\cong\mathcal{E}'$. Для этого рассмотрим отображение комплексов над $\mathbf{D}^b(\mathbb{P}^N\times X)$

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{O}(-n)\boxtimes F'(\Omega^n(n)) & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \mathcal{O}\boxtimes F'(\mathcal{O})\\
\big\downarrow{\scriptstyle can\quad F(f_n)} & & & & \big\downarrow{\scriptstyle can\quad F(f_0)}\\
\mathbf{R}j_*\mathcal{L}^{-n}\boxtimes F(R_n) & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \mathbf{R}j_*\mathcal{O}_M\boxtimes F(R_0).
\end{array}$$

Применяя Лемму 3.1.3, получаем существование морфизма между свертками $\phi: K\longrightarrow\mathbf{R}J_*G$.

Если $N>n$, тогда объект K неизоморфен $\mathcal{E}'$, но существует выделенный треугольник

$$S\longrightarrow K\longrightarrow\mathcal{E}'\longrightarrow S[1].$$

Таким же образом как и выше проверяется, что пучки когомологий $H^i(S)\neq 0$ только если $i\in[-n-a,-n]$. Это влечет, что $\operatorname{Hom}(S\,,\,\mathbf{R}J_*\mathcal{E})=0$ и $\operatorname{Hom}(S[1]\,,\,\mathbf{R}J_*\mathcal{E})=0$, так как когомологии $\mathbf{R}J_*\mathcal{E}$ сконцентрирована на отрезке $[-a,0]$. Отсюда следует существование единственного морфизма $\psi:\mathcal{E}'\longrightarrow\mathbf{R}J_*\mathcal{E}$, делающего коммутативной диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
K & \xrightarrow{\phi} & \mathbf{R}J_*G\\
\big\downarrow & & \big\downarrow\\
\mathcal{E}' & \xrightarrow{\psi} & \mathbf{R}J_*\mathcal{E}.
\end{array}$$

Мы знаем, что

$$\mathbf{R}\pi'_*(\mathcal{E}'\otimes q^*(\mathcal{O}(k)))\cong F(\mathcal{L}^k)\cong\mathbf{R}\pi_*(\mathcal{E}\otimes p^*(\mathcal{L}^k)).$$

Обозначим через ψ_k морфизмы $\mathbf{R}\pi'_*(\mathcal{E}' \otimes q^*(\mathcal{O}(k))) \longrightarrow \mathbf{R}\pi_*(\mathcal{E} \otimes p^*(\mathcal{L}^k))$, индуцированные морфизмом ψ . Морфизмы ψ_k могут быть включены в коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc} S^k A_1 \otimes F(\mathcal{O}) & \xrightarrow{can} & F(\mathcal{L}^k) & \xrightarrow{\sim} & \mathbf{R}\pi'_*(\mathcal{E}' \otimes q^*(\mathcal{O}(k))) \\ {\scriptstyle can}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle \psi_k} \\ A_k \otimes F(\mathcal{O}) & \xrightarrow{can} & F(\mathcal{L}^k) & \xrightarrow{\sim} & \mathbf{R}\pi_*(\mathcal{E} \otimes p^*(\mathcal{L}^k)). \end{array}$$

Из этого получаем, что ψ_k являются изоморфизмами для всех $k \geq 0$. Следовательно, ψ также есть изоморфизм. Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Предложение 3.3.5 *Существует и единственный с точностью до изоморфизма объект* $\mathcal{E} \in \mathbf{D}^b(M \times X)$ *такой, что* $\mathbf{R}J_*\mathcal{E} \cong \mathcal{E}'$ *, где* $\mathcal{E}'$ *– объект из* $\mathbf{D}^b(\mathbb{P}^N \times X)$ *, построеный в 3.3.*

3.4 Доказательство основной теоремы.

3.4.a. Основная цель данного параграфа – доказать, что функтор F , с которого мы начали, изоморфен функтору $\Phi_{\mathcal{E}}$, для объекта $\mathcal{E}$, построенного в предыдущем параграфе. Но начнем мы с доказательства некоторых утверждений про абелевы категории, которые понадобятся нам по ходу дела.

Пусть $\mathcal{A}$ – k -линейная абелева категория (мы будем далее всегда рассматривать абелевы категории, которые k -линейны).

Определение 3.4.1 *Пусть* $\{P_i |\, i \in \mathbb{Z}_{\leq 0}\}$ *– последовательность объектов из абелевой категории* $\mathcal{A}$ *. Будем называть такую последовательность* обильной*, если для каждого объекта* $X \in \mathcal{A}$ *существует целое число* N *такое, что для всех* $i < N$ *выполнены следующие условия:*

a) *канонический морфизм* $\mathrm{Hom}(P_i\,,\, X) \otimes P_i \longrightarrow X$ *является сюръективным,*

b) $\mathrm{Ext}^j(P_i\,,\, X) = 0$ *для всех* $j \neq 0$ *,*

c) $\mathrm{Hom}(X\,,\, P_i) = 0$.

Пример 3.4.2 *Если* $\mathcal{L}$ *– обильное линейное расслоение на проективном многообразии, тогда последовательность* $\{\mathcal{L}^i |\ i \in \mathbb{Z}_{\le 0}\}$ *является обильной последовательностью в абелевой категории когерентных пучков.*

Лемма 3.4.3 *Пусть* $\{P_i\}$ *– обильная последовательность в абелевой категории* $\mathcal{A}$ *. Тогда, если для объекта* X *из категории* $\mathbf{D}^b(\mathcal{A})$ *мы имеем* $\mathrm{Hom}^\bullet(P_i\,,\ X) = 0$ *для всех* $i \ll 0$ *, то* X *является нулевым объектом.*

Доказательство. Из определения обильности для $i \ll 0$ имеем

$$\mathrm{Hom}(P_i\,,\ H^k(X)) \cong \mathrm{Hom}^k(P_i\,,\ X) = 0.$$

Но морфизм $\mathrm{Hom}(P_i\,,\ H^k(X)) \otimes P_i \longrightarrow H^k(X)$ должен быть сюръективен при $i \ll 0$. Следовательно, $H^k(X) = 0$ для всех k . То есть X – нулевой объект. □

Лемма 3.4.4 *Пусть* $\mathcal{A}$ *– абелева категория конечной гомологической размерности, а* $\{P_i\}$ *– обильная последовательность в абелевой категории* $\mathcal{A}$ *. Тогда, если объект* $X \in \mathbf{D}^b(\mathcal{A})$ *такой, что* $\mathrm{Hom}^\bullet(X\,,\ P_i) = 0$ *для всех* $i \ll 0$ *, то* X *является нулевым объектом.*

Доказательство. Предположим, что объект X нетривиален. Сдвигая этот объект в производной категории, если это необходимо, можем предполагать, что крайняя правая ненулевая когомология объекта X имеет номер 0 . Рассмотрим канонический морфизм $X \longrightarrow H^0(X)$. Найдется номер i_1 , для которого существует сюръективное отображение $P_{i_1}^{\oplus k_1} \longrightarrow H^0(X)$. Обозначим через Y_1 его ядро. По предположению $\mathrm{Hom}^\bullet(X\,,\ P_{i_1}) = 0$, и значит $\mathrm{Hom}^1(X\,,\ Y_1) \neq 0$. Далее возьмем сюръективное отображение $P_{i_2}^{\oplus k_2} \longrightarrow Y_1$, которое существует для достаточно отрицательного номера i_2 . Через Y_2 обозначим ядро этого отображения. Снова, условие $\mathrm{Hom}^\bullet(X\,,\ P_{i_2}) = 0$ дает нам $\mathrm{Hom}^2(X\,,\ Y_2) \neq 0$. Продолжая эту процедуру, мы получим противоречие с конечностью гомологической размерности категории $\mathcal{A}$. □

Лемма 3.4.5 *Пусть* $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *– абелевы категории, и категория* $\mathcal{A}$ *имеет конечную гомологическую размерность. Пусть* $\{P_i\}$ *– обильная последовательность в категории* $\mathcal{A}$ *. Предположим, что* F *– точный функтор из категории* $\mathbf{D}^b(\mathcal{A})$ *в* *категорию* $\mathbf{D}^b(\mathcal{B})$ *, который имеет правый и левый сопряженные функторы* $F^!$ *и* F^* *соответственно. Если отображения*

$$\mathrm{Hom}^k(P_j\,,\,P_i) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}^k(F(P_j)\,,\,F(P_i))$$

есть изоморфизмы при $j < i$ *и для всех* k *, тогда функтор* F *является вполне строгим.*

Доказательство. Возьмем канонический морфизм $f_i : P_i \longrightarrow F^!F(P_i)$ и рассмотрим выделенный треугольник

$$P_i \xrightarrow{f_i} F^!F(P_i) \longrightarrow C_i \longrightarrow P_i[1].$$

По предположению при $j < i$ имеем изоморфизмы:

$$\mathrm{Hom}^k(P_j\,,\,P_i) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}^k(F(P_j)\,,\,F(P_i)) \cong \mathrm{Hom}^k(P_j\,,\,F^!F(P_i)).$$

Таким образом, $\mathrm{Hom}^\bullet(P_j\,,\,C_i) = 0$ при $j < i$. Из Леммы 3.4.3 следует, что $C_i = 0$. И значит f_i является изоморфизмом.

Теперь для произвольного объекта X рассмотрим каноническое отображение $g_X : F^*F(X) \longrightarrow X$ и выделенный треугольник

$$F^*F(X) \xrightarrow{g_X} X \longrightarrow C_X \longrightarrow F^*F(X)[1].$$

Мы имеем последовательность изоморфизмов

$$\mathrm{Hom}^k(X\,,\,P_i) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}^k(X\,,\,F^!F(P_i)) \cong \mathrm{Hom}^k(F^*F(X)\,,\,P_i).$$

Отсюда следует, что $\mathrm{Hom}^\bullet(C_X\,,\,P_i) = 0$ для всех i . По Лемме 3.4.4 получаем, что $C_X = 0$. И значит g_X – изоморфизм. Что и доказывает, что функтор F является вполне строгим. $\square$

3.4.b. Теперь мы можем сформулировать и доказать основное Предложение этого раздела, которое необходимо нам для доказательства основной Теоремы 3.2.1 этой главы. Но надо отметить, что данное Предложение представляет самостоятельный интерес.

Пусть $\mathcal{A}$ – абелева категория с обильной последовательностью $\{P_i | i \in \mathbb{Z}_{\le 0}\}$. Обозначим через j вложение полной подкатегории $\mathcal{C}$ с объектами $\mathrm{Ob}\mathcal{C} := \{P_i \mid i \in$

$\mathbb{Z}\}$ в категорию $\mathbf{D}^b(\mathcal{A})$. В этой ситуации мы можем показать, что если для функтора $F : \mathbf{D}^b(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbf{D}^b(\mathcal{A})$ существует изоморфизм $F|_{\mathcal{C}}$ с тождественным функтором на $\mathcal{C}$, тогда это преобразование может быть продолжено до изоморфизма на все $\mathbf{D}^b(\mathcal{A})$.

Предложение 3.4.6 *Пусть $\mathcal{A}$ – абелева категория с обильной последовательностью $\{P_i | \; i \in \mathbb{Z}_{\leq 0}\}$. Обозначим через j вложение полной подкатегории $\mathcal{C}$ с объектами $Ob\,\mathcal{C} := \{P_i \mid i \in \mathbb{Z}_{\leq 0}\}$ в категорию $\mathbf{D}^b(\mathcal{A})$. Пусть $F : \mathbf{D}^b(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbf{D}^b(\mathcal{A})$ – некоторая автоэквивалентность. Предположим, что существует изоморфизм функторов $f : j \xrightarrow{\sim} F|_{\mathcal{C}}$. Тогда этот изоморфизм может быть продолжен до изоморфизма $\mathrm{id} \xrightarrow{\sim} F$ на всю категорию $\mathbf{D}^b(\mathcal{A})$.*

Доказательство. Во-первых, так как F коммутирует с прямыми суммами, то мы можем продолжить преобразование f на все прямые суммы объектов категории $\mathcal{C}$ покомпонентно.

Отметим, что объект $X \in \mathbf{D}^b(\mathcal{A})$ изоморфен объекту из $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{Hom}^j(P_i\,,\,X) = 0$ при $j \neq 0$ и всех $i \ll 0$. Отсюда следует, что объект $F(X)$ в этом случае также изоморфен объекту из $\mathcal{A}$, потому что

$$\mathrm{Hom}^j(P_i\,,\,F(X)) \cong \mathrm{Hom}^j(F(P_i)\,,\,F(X)) \cong \mathrm{Hom}^j(P_i\,,\,X) = 0$$

при $j \neq 0$ и всех $i \ll 0$.

Шаг 1. Пусть теперь X – объект из категории $\mathcal{A}$. Зафиксируем сюръективный морфизм $v : P_i^{\oplus k} \longrightarrow X$. Существует изоморфизм $f_i : P_i^{\oplus k} \xrightarrow{\sim} F(P_i^{\oplus k})$ и два выделенных треугольника:

$$\begin{array}{ccccccc}
Y & \xrightarrow{u} & P_i^{\oplus k} & \xrightarrow{v} & X & \longrightarrow & Y[1] \\
 & & \downarrow f_i & & & & \\
F(Y) & \xrightarrow{F(u)} & F(P_i^{\oplus k}) & \xrightarrow{F(v)} & F(X) & \longrightarrow & F(Y)[1]
\end{array}$$

Давайте проверим, что $F(v) \circ f_i \circ u = 0$. Для этого рассмотрим сюръективный морфизм $w : P_j^{\oplus l} \longrightarrow Y$. Достаточно проверить, что $F(v) \circ f_i \circ u \circ w = 0$. Пусть $f_j : P_j^{\oplus l} \xrightarrow{\sim} F(P_j^{\oplus l})$ – канонический изоморфизм. Используя коммутационные соотношения для f_i и f_j , имеем равенства

$$F(v) \circ f_i \circ u \circ w = F(v) \circ F(u \circ w) \circ f_j = F(v \circ u \circ w) \circ f_j = 0.$$

Так как $\mathrm{Hom}(Y[1]\,,\,F(X)) = 0$, то по Лемме 3.1.1 существует единственный морфизм $f_X : X \longrightarrow F(X)$, который коммутирует с f_i .

Теперь рассмотрим конус C_X морфизма f_X . Используя изоморфизмы

$$\mathrm{Hom}(P_i\,,\,X) \cong \mathrm{Hom}(F(P_i)\,,\,F(X)) \cong \mathrm{Hom}(P_i\,,\,F(X)),$$

находим, что $\mathrm{Hom}^j(P_i\,,\,C_X) = 0$ для всех j и $i \ll 0$. Следовательно, по Лемме 3.4.3 $C_X = 0$ и f_X является изоморфизмом.

Шаг 2. Теперь мы покажем, что f_X не зависит от выбора накрытия $v : P_i^{\oplus k} \longrightarrow X$. Рассмотрим два таких сюръективных морфизма $v_1 : P_{i_1}^{\oplus k_1} \longrightarrow X$ и $v_2 : P_{i_2}^{\oplus k_2} \longrightarrow X$. Мы всегда можем подобрать два таких сюръективных морфизма $w_1 : P_j^{\oplus l} \longrightarrow P_{i_1}^{\oplus k_1}$ и $w_2 : P_j^{\oplus l} \longrightarrow P_{i_2}^{\oplus k_2}$, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} P_j^{\oplus l} & \xrightarrow{w_2} & P_{i_2}^{\oplus k_2} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle w_1} & & \Big\downarrow{\scriptstyle v_2} \\ P_{i_1}^{\oplus k_1} & \xrightarrow{v_1} & X. \end{array}$$

Очевидно, что достаточно проверить совпадение преобразований f_X , построенных по v_1 и $v_1 \circ w_1$. Для этого давайте рассмотрим коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc} P_j^{\oplus l} & \xrightarrow{w_1} & P_{i_1}^{\oplus k_1} & \xrightarrow{v_1} & X \\ \Big\downarrow{\scriptstyle f_j} & & \Big\downarrow{\scriptstyle v_2} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f_X} \\ F(P_j^{\oplus l}) & \xrightarrow{F(w_1)} & F(P_{i_1}^{\oplus k_1}) & \xrightarrow{F(v_1)} & F(X). \end{array}$$

Здесь изоморфизм f_X построен по v_1 . Оба квадрата этой диаграммы коммутативны. Так как существует только один морфизм из X в $F(X)$, который коммутирует с f_j , то f_X , построенный по v_1 , совпадает с морфизмом, построенным по $v_1 \circ w_1$.

Шаг 3. Теперь мы должны проверить, что морфизмы f_X задают естественное преобразование функторов на категории $\mathcal{A}$. То есть мы должны проверить, что для любого морфизма $X \xrightarrow{\phi} Y$ имеется равенство:

$$f_Y \circ \phi = F(\phi) \circ f_X.$$

Рассмотрим сюръективный морфизм $P_j^{\oplus l} \xrightarrow{v} Y$. Подберем теперь индекс $i \ll 0$ и сюръективный морфизм $P_i^{\oplus k} \xrightarrow{u} X$ такие, что композиция $\phi \circ u$ поднимается до морфизма $\psi : P_i^{\oplus k} \longrightarrow P_j^{\oplus l}$. Мы можем сделать это, потому что при $i \ll 0$ отображение $\mathrm{Hom}(P_i^{\oplus k}, P_j^{\oplus l}) \to \mathrm{Hom}(P_i^{\oplus k}, Y)$ сюръективно. Получаем коммутативный квадрат:

$$
\begin{array}{ccc}
P_i^{\oplus k} & \xrightarrow{u} & X \\
\downarrow{\scriptstyle\psi} & & \downarrow{\scriptstyle\phi} \\
P_j^{\oplus l} & \xrightarrow{v} & Y.
\end{array}
$$

Обозначим через h_1 и h_2 композиции $f_Y \circ \phi$ и $F(\phi) \circ f_X$ соответственно. Имеем равенства:

$$h_1 \circ u = f_Y \circ \phi \circ u = f_Y \circ v \circ \psi = F(v) \circ f_j \circ \psi = F(v) \circ F(\psi) \circ f_i$$

и

$$h_2 \circ u = F(\phi) \circ f_X \circ u = F(\phi) \circ F(u) \circ f_i = F(\phi \circ u) \circ f_i = F(v \circ \psi) \circ f_i = F(v) \circ F(\psi) \circ f_i$$

Таким образом, морфизмы h_t при $t = 1, 2$ делают следующую диаграмму коммутативной

$$
\begin{array}{ccccccc}
Z & \longrightarrow & P_i^{\oplus k} & \xrightarrow{u} & X & \longrightarrow & Z[1] \\
& & {\scriptstyle F(\psi) \circ f_i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h_t} & & \\
F(W) & \longrightarrow & F(P_j^{\oplus l}) & \xrightarrow{F(v)} & F(Y) & \longrightarrow & F(W)[1].
\end{array}
$$

Так как $\mathrm{Hom}(Z[1], F(Y)) = 0$, то по Лемме 3.1.1 получаем, что $h_1 = h_2$. И значит $f_Y \circ \phi = F(\phi) \circ f_X$.

Шаг 4. Определим преобразование $f_{X[n]} : X[n] \longrightarrow F(X[n]) \cong F(X)[n]$ для каждого $X \in \mathcal{A}$ по формуле

$$f_{X[n]} = f_X[n].$$

Нетрудно показать, что определенные таким образом преобразования коммутируют с любым морфизмом $u \in \mathrm{Ext}^k(X, Y)$. Действительно, всякий элемент $u \in \mathrm{Ext}^k(X, Y)$ может быть представлен как композиция $u = u_0 u_1 \cdots u_k$ некоторых элементов $u_i \in \mathrm{Ext}^1(Z_i, Z_{i+1})$, где $Z_0 = X, Z_k = Y$. Значит достаточно проверить коммутирование с элементами $u \in \mathrm{Ext}^1(X, Y)$. Для этого рассмотрим диаграмму:

$$
\begin{array}{ccccccc}
Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & X & \xrightarrow{u} & Y[1] \\
{\scriptstyle f_Y}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_Z} & & & & \downarrow{\scriptstyle f_Y[1]} \\
F(Y) & \longrightarrow & F(Z) & \longrightarrow & F(X) & \xrightarrow{F(u)} & F(Y)[1].
\end{array}
$$

По одной из аксиом триангулированной категории найдется морфизм $h : X \to F(X)$ такой, что (f_Y, f_Z, h) есть морфизм треугольников. С другой стороны, так как $\mathrm{Hom}(Y[1]\,,\ F(X)) = 0$, то по Лемме 3.1.1, морфизм h определен однозначно тем условием, что коммутирует с f_Z . Но f_X также коммутирует с f_Z . Следовательно, получаем, что $h = f_X$, и значит

$$f_Y[1] \circ u = F(u) \circ f_X.$$

Шаг 5. Заключительную часть доказательства будем вести индукцией по длине отрезка, в котором находятся нетривиальные когомологии объекта. Для этого рассмотрим полную подкатегорию $j_n : \mathcal{D}_n \hookrightarrow \mathbf{D}^b(\mathcal{A})$ in $\mathbf{D}^b(\mathcal{A})$, состоящую из объектов, имеющих нетривиальные когомологии в некотором (нефиксированном) отрезке длины n . Мы будем доказывать, что существует единственное продолжение естественного преобразования f до естественного функториального изоморфизма $f_n : j_n \longrightarrow F\,|_{\mathcal{D}_n}$.

Выше мы уже показали это для $n = 1$, то есть для основания индукции.

Теперь, чтобы сделать шаг индукции, предположим, что при $n = a,\ a \geq 1$ утверждение уже доказано. Пусть X – некоторый объект из $\mathcal{D}_{a+1}$ и положим, для определенности, что когомологии $H^p(X)$ являются нетривиальными при $p \in [-a, 0]$. Возьмем P_i из обильной последовательности с достаточно отрицательным номером i такой, что

$$\begin{aligned} &a) \quad \mathrm{Hom}^j(P_i\,,\ H^p(X)) = 0 \text{ для всех } p \text{ и для } j \neq 0, \\ &b) \quad \text{существует сюръективный морфизм } \ u : P_i^{\oplus k} \longrightarrow H^0(X), \\ &c) \quad \mathrm{Hom}(H^0(X)\,,\ P_i) = 0. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Условие a) и стандартная спектральная последовательность дает нам изоморфизм $\mathrm{Hom}(P_i\,,\ X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(P_i\,,\ H^0(X))$. И значит, мы можем найти морфизм $v : P_i^{\oplus k} \longrightarrow X$ такой, что композиция v с каноническим морфизмом

$X \longrightarrow H^0(X)$ совпадает с u . Рассмотрим выделенный треугольник:

$$Y[-1] \longrightarrow P_i^{\oplus k} \xrightarrow{v} X \longrightarrow Y.$$

Так как объект Y принадлежит $\mathcal{D}_a$, то по предположению индукции изоморфизм f_Y уже существует и коммутирует с f_i . Имеем диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccc} P_i^{\oplus k} & \xrightarrow{v} & X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & P_i^{\oplus k}[1] \\ \downarrow{\scriptstyle f_i} & & \vdots{\scriptstyle f_X} & & \downarrow{\scriptstyle f_Y} & & \downarrow{\scriptstyle f_i[1]} \\ F(P_i^{\oplus k}) & \xrightarrow{F(v)} & F(X) & \longrightarrow & F(Y) & \longrightarrow & F(P_i^{\oplus k})[1]. \end{array} \tag{3.15}$$

Далее, последовательность изоморфизмов

$$\mathrm{Hom}(X\ ,\ F(P_i^{\oplus k})) \cong \mathrm{Hom}(X\ ,\ P_i^{\oplus k}) \cong \mathrm{Hom}(H^0(X)\ ,\ P_i^{\oplus k}) = 0$$

дает нам возможность применить Лемму 3.1.1 к g равному f_Y . Из которой следует, что существует единственный морфизм $f_X : X \longrightarrow F(X)$, дополняющий диаграмму до морфизма треугольников. Очевидно, что f_X на самом деле является изоморфизмом, так как изоморфизмами являются f_i и f_Y .

Шаг 6. Теперь мы должны показать, что f_X не зависит от выбора i и u . Пусть нам даны два сюръективных морфизма $u_1 : P_{i_1}^{\oplus k_1} \longrightarrow H^0(X)$ и $u_2 : P_{i_2}^{\oplus k_2} \longrightarrow H^0(X)$, удовлетворяющие условиям a), b) и c). Тогда можем подобрать достаточно отрицательное j и сюръективные морфизмы w_1, w_2 , делающие коммутативной следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} P_j^{\oplus l} & \xrightarrow{w_2} & P_{i_2}^{\oplus k_2} \\ \downarrow{\scriptstyle w_1} & & \downarrow{\scriptstyle u_2} \\ P_{i_1}^{\oplus k_1} & \xrightarrow{u_1} & H^0(X). \end{array}$$

Обозначим через $v_1 : P_{i_1}^{\oplus k_1} \longrightarrow X, v_2 : P_{i_2}^{\oplus k_2} \longrightarrow X$ морфизмы, соответствующие u_1 и u_2 . Так как $\mathrm{Hom}(P_j\ ,\ X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(P_j\ ,\ H^0(X))$, то получаем, что $v_2 w_2 = v_1 w_1$.

Существует морфизм $\phi : Y_j \longrightarrow Y_{i_1}$ такой, что тройка (w_1, id, ϕ) является морфизмом треугольников:

$$\begin{array}{ccccccc} P_j^{\oplus l} & \xrightarrow{v_1 \circ w_1} & X & \xrightarrow{y} & Y_j & \longrightarrow & P_j^{\oplus l}[1] \\ {\scriptstyle w_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \phi} & & \downarrow{\scriptstyle w_1[1]} \\ P_{i_1}^{\oplus k_1} & \xrightarrow{v_1} & X & \xrightarrow{y_1} & Y_{i_1} & \longrightarrow & P_{i_1}^{\oplus k_1}[1], \end{array}$$

то есть $\phi y = y_1$.

Так как Y_j и Y_{i_1} имеют нетривиальные когомологии только в отрезке

$[-a,-1]$, то по предположению индукции имеем коммутативный квадрат:

$$\begin{array}{ccc} Y_j & \xrightarrow{\phi} & Y_{i_1} \\ {\scriptstyle f_{Y_j}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_{Y_{i_1}}} \\ F(Y_j) & \xrightarrow{F(\phi)} & F(Y_{i_1}). \end{array}$$

Обозначим через $f_X^j, f_X^{i_1}, f_X^{i_2}$ морфизмы, построенные по правилу, описанному выше, которые дополняют до коммутативной диаграмму (3.15)

при v соответственно равном $v = v_1 w_1,\ v = v_1,\ v = v_2$. Как было уже доказано выше, морфизм $f_X^{i_1}$ однозначно (Лемма 3.1.1) определен условием, что

$$F(y_1) f_X^{i_1} = f_{Y_{i_1}} y_1.$$

С другой стороны, имеем равенства:

$$F(y_1) f_X^j = F(\phi y) f_X^j = F(\phi) F(y) f_X^j = F(\phi) F_{Y_j} y = f_{Y_{i_1}} \phi y = f_{Y_{i_1}} y_1,$$

которые немедленно дают $f_X^j = f_X^{i_1}$. Аналогично получаем $f_X^j = f_X^{i_2}$. Таким образом, морфизм f_X не зависит от выбора i и морфизма $u : P_i^{\oplus k} \longrightarrow H^0(X)$ и , значит, определен абсолютно однозначно.

Шаг 7. Мы получили некоторое продолжение преобразования f_a на категорию $\mathcal{D}_{a+1}$. Нам осталось доказать, что это продолжение также является естественным преобразованием из j_{a+1} в $F\,|_{\mathcal{D}_{a+1}}$, то есть, что для всякого морфизма $\phi : X \longrightarrow Y$, где X, Y из $\mathcal{D}_{a+1}$, получается коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi} & Y \\ {\scriptstyle f_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_Y} \\ F(X) & \xrightarrow{F(\phi)} & F(Y). \end{array} \tag{3.16}$$

Мы будем редуцировать эту проблему к случаю, когда оба объекта X и Y принадлежат $\mathcal{D}_a$.

Существует два случая.

Случай 1. Рассмотрим случай, когда старшая нетривиальная когомология объекта X (без потери общности мы можем предполагать, что она равна 0) имеет индекс строго больше чем у объекта Y . Возьмем сюръективный морфизм $u : P_i^{\oplus k} \longrightarrow H^0(X)$, удовлетворяющий условиям a), b), c), и построим как и выше поднятие его до морфизма $v : P_i^{\oplus k} \longrightarrow X$. Имеем выделенный треугольник:

$$P_i^{\oplus k} \xrightarrow{v_1} X \xrightarrow{\alpha} Z \longrightarrow P_i^{\oplus k}[1].$$

Если мы выберем i достаточно отрицательным, то $\mathrm{Hom}(P_i^{\oplus k}, Y) = 0$. Применяя функтор $\mathrm{Hom}(-, Y)$ к этому треугольнику, находим, что существует морфизм $\psi : Z \longrightarrow Y$ такой, что $\phi = \psi\alpha$. Мы знаем, что f_X, построенный ранее, удовлетворяет соотношению

$$F(\alpha)f_X = f_Z\alpha.$$

Если мы предположим, что

$$F(\psi)f_Z = f_Y\psi,$$

тогда получим, что

$$F(\phi)f_X = F(\psi)F(\alpha)f_X = F(\psi)f_Z\alpha = f_Y\psi\alpha = f_Y\phi.$$

Это значит, что для проверки коммутативности квадрата (3.16) мы можем заменить X на Z. А верхняя грань нетривиальных когомологий для Z на единицу меньше, чем у X. Более того мы видим, что если X принадлежит категории $\mathcal{D}_k$, с $k > 1$, то Z принадлежит $\mathcal{D}_{k-1}$, а если X принадлежит $\mathcal{D}_1$, то Z также принадлежит $\mathcal{D}_1$, но номер его нетривиальной когомологии на единицу меньше.

Случай 2. Теперь рассмотрим другой случай: старшая нетривиальная когомология Y (опять можем считать, что ее номер равен 0) имеет номер не меньше чем у X. Возьмем сюръективный морфизм $u : P_i^{\oplus k} \longrightarrow H^0(Y)$, удовлетворяющий условиям a), b), c) и построим морфизм $v : P_i^{\oplus k} \longrightarrow Y$, который однозначно определен морфизмом u. Рассмотри выделенный треугольник:

$$P_i^{\oplus k} \xrightarrow{v} Y \xrightarrow{\beta} W \longrightarrow P_i^{\oplus k}. \tag{3.17}$$

Обозначим через ψ композицию $\beta \circ \phi$.

Если мы теперь предположим, что

$$F(\psi)f_X = f_W\psi,$$

тогда, так как $F(\beta)f_Y = f_W\beta$, мы будем иметь:

$$F(\beta)(f_Y\phi - F(\phi)f_X) = f_W\beta\phi - f(\beta\phi)f_X = f_W\psi - F(\psi)f_X = 0. \tag{3.18}$$

Мы снова будем выбирать i достаточно отрицательным, так чтобы выполнялось зануление $\mathrm{Hom}(X, P_i^{\oplus k}) = 0$. Так как объект $F(P_i^{\oplus k})$ изоморфен объекту $P_i^{\oplus k}$, то $\mathrm{Hom}(X\,,\,F(P_i^{\oplus k}))=0$. Теперь применяя функтор $\mathrm{Hom}(X\,,\,F(-))$ к треугольнику (3.17), мы находим, что $F(\beta)$ задает вложение пространства $\mathrm{Hom}(X\,,\,F(Y))$ в $\mathrm{Hom}(X\,,\,F(W))$. Из равенства (3.18) теперь сразу следует равенство $f_Y\phi = F(\phi)f_X$.

Таким образом, чтобы проверить коммутативность квадрата (3.16) мы можем заменить Y на объект W , верхняя граница нетривиальных когомологий которого на единицу меньше чем у Y . Если Y принадлежал $\mathcal{D}_k,\ k>1$, то W принадлежит уже $\mathcal{D}_{k-1}$. Если Y принадлежал $\mathcal{D}_1$, то объект W также принадлежит $\mathcal{D}_1$, но номер его нетривиальной когомологии на единицу меньше.

Предположим сейчас, что объекты X и Y лежат в категории $\mathcal{D}_{a+1},\ a>1$. В зависимости от того, какой из двух случаев, 1) или 2), применим, мы можем заменить либо объект X , либо Y на объект лежащий уже в категории $\mathcal{D}_a$. Повторяя, если необходимо эту процедуру, мы уменьшим верхнюю границу когомологий этого объекта так, что другой случай будет применим. Тогда мы сможем уменьшить длину нетривиальных когомологий у второго объекта и придем к ситуации, когда оба объекта уже лежат в категории $\mathcal{D}_a$. И тем самым сделаем шаг индукции.

В заключении отметим, что при построении изоморфизмов f_X , они всегда были определены однозначно. Это значит, что естественное преобразование из id в F , которое мы построили, является единственным. И предложение доказано $\square$

3.4.c. Доказательство теоремы. 1) Существование. Предложение 3.3.5 и Лемма 3.3.1 позволяют по функтору F построить объект $\mathcal{E}\in\mathbf{D}^b(M\times X)$ такой, что существует изоморфизм функторов $\bar{f}: F\big|_{\mathcal{C}}\xrightarrow{\sim}\Phi_{\mathcal{E}}\big|_{\mathcal{C}}$ на полной подкатегории $\mathcal{C}\subset\mathbf{D}^b(M)$, где $\mathrm{Ob}\mathcal{C}=\{\mathcal{L}^i\ |\ \ i\in\mathbb{Z}\}$ и $\mathcal{L}$ – очень обильное расслоение на M , для которого $\mathrm{H}^i(M,\mathcal{L}^k)=0$, при $k>0$ и $i\neq 0$.

По Лемме 3.4.5 функтор $\Phi_{\mathcal{E}}$ является вполне строгим. Кроме того, так как имеются изоморфизмы:

$$F^!(\bar{f}): F^!\circ F\big|_{\mathcal{C}}\cong \mathrm{id}_{\mathcal{C}}\xrightarrow{\sim} F^!\circ\Phi_{\mathcal{E}}\big|_{\mathcal{C}},$$

$$\Phi_{\mathcal{E}}^*(\bar{f}): \Phi_{\mathcal{E}}^*\circ F\big|_{\mathcal{C}}\xrightarrow{\sim}\Phi_{\mathcal{E}}^*\circ\Phi_{\mathcal{E}}\big|_{\mathcal{C}}\cong \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$$

то опять по Лемме 3.4.5 функторы $F^!\circ\Phi_{\mathcal{E}}$ и $\Phi_{\mathcal{E}}^*\circ F$ также являются вполне строгими. А так как они сопряжены друг другу, то эти функторы $F^!\circ\Phi_{\mathcal{E}}$ и $\Phi_{\mathcal{E}}^*\circ F$ на самом деле являются эквивалентностями.

Рассмотрим снова изоморфизм $F^!(\bar f): F^! \circ F\big|_{\mathcal C} \cong \mathrm{id}_{\mathcal C} \xrightarrow{\sim} F^! \circ \Phi_{\mathcal E}\big|_{\mathcal C}$ на подкатегории $\mathcal C$. По Предложению 3.4.6 мы можем продолжить его до изоморфизма на всем $\mathbf{D}^b(M)$, то есть $\mathrm{id} \xrightarrow{\sim} F^! \circ \Phi_{\mathcal E}$.

Так как $F^!$ является сопряженным справа к F , то мы получаем морфизм функторов $f : F \longrightarrow \Phi_{\mathcal E}$, для которого $f|_{\mathcal C} = \bar f$. Осталось проверить, что f есть изоморфизм. Действительно, давайте возьмем конус C_Z канонического морфизма $f_Z : F(Z) \longrightarrow \Phi_{\mathcal E}(Z)$. Так как $F^!(f_Z)$ является изоморфизмом, мы получаем, что $F^!(Z) = 0$. Следовательно, для любого объекта Y имеем $\mathrm{Hom}(F(Y)\,,\, C_Z) = 0$. Далее, так как $F(\mathcal L^k) \cong \Phi_{\mathcal E}(\mathcal L^k)$ для всех k , получаем последовательность изоморфизмов

$$\mathrm{Hom}^i(\mathcal L^k\,,\, \Phi^!_{\mathcal E}(C_Z)) = \mathrm{Hom}^i(\Phi_{\mathcal E}(\mathcal L^k)\,,\, C_Z)) = \mathrm{Hom}^i(F(\mathcal L^k)\,,\, C_Z)) = 0$$

для всех k и i .

Применяя Лемму 3.4.3 сразу получаем, что $\Phi^!_{\mathcal E}(C_Z) = 0$. Следовательно, $\mathrm{Hom}(\Phi_{\mathcal E}(Z)\,,\, C_Z) = 0$. Это влечет, что треугольник для морфизма f_Z должен расщепляться, то есть $F(Z) = C_Z[-1] \oplus \Phi_{\mathcal E}(Z)$. Но как мы уже видели $\mathrm{Hom}(F(Y)\,,\, C_Z) = 0$ для любого Y , и значит для $Z[1]$ также. А это может быть только если $C_Z = 0$ и f_Z – изоморфизм.

2) Единственность. Единственность представляющего объекта на самом деле следует из построения, так как всякий раз мы имеем однозначность при построении объекта. Но давайте пройдем это еще раз. Предположим существуют два объекта $\mathcal E_1$ and $\mathcal E_2$ в категории $D^b(M \times X)$, для которых $\Phi_{\mathcal E_1} \cong F \cong \Phi_{\mathcal E_2}$. Рассмотрим функтор $F' = \mathbf{L} j^* \circ F$, где как и выше $j : M \longrightarrow \mathbb P^N$ – вложение с помощью подходящего очень обильного линейного расслоения. Объекты $\mathbf{R} J_* \mathcal E_i,\ i = 1, 2$ оба должны быть свертками комплекса (3.8)

$$C^\bullet := \{\mathcal O(-N) \boxtimes F'(\Omega^N(N)) \xrightarrow{d'_{-N}} \cdots \longrightarrow \mathcal O(-1) \boxtimes F'(\Omega^1(1)) \xrightarrow{d'_{-1}} \mathcal O \boxtimes F'(\mathcal O)\}.$$

Но как было показано выше все свертки этого комплекса изоморфны по Лемме 3.1.2. Таким образом, $\mathbf{R} J_* \mathcal E_1 \cong \mathbf{R} J_* \mathcal E_2$. Применяя теперь Предложение 3.3.5, получаем, что и сами $\mathcal E_1$ и $\mathcal E_2$ также изоморфны. $\square$

Из главной Теоремы 3.2.1 немедленно получаем как следствие следующий результат.

Теорема 3.4.7 *Пусть M и X – гладкие проективные многообразия. Предположим функтор $F : \mathbf{D}^b(M) \longrightarrow \mathbf{D}^b(X)$ является эквивалентностью триангулированных категорий. Тогда существует объект $\mathcal{E} \in \mathbf{D}^b(M \times X)$ такой, что функторы F и $\Phi_{\mathcal{E}}$ изоморфны, и этот объект определен однозначно с точностью до изоморфизма.*

3.A Приложение: n-кошулевость однородной координатной алгебры.

3.A.a. Факты собранные в этом приложении не являются оригинальными. В той или иной форме они известны. Однако, не имея хорошей ссылки, мы вынуждены привести собственное доказательство утверждения,

которое используется в основном тексте и в той форме, которая нам необходима. Мы в основном используем технику из статьи [21].

Пусть X – гладкое проективное многообразие и $\mathcal{L}$ – очень обильное линейное расслоение на X, удовлетворяющее дополнительному условию $\mathrm{H}^i(X, \mathcal{L}^k) = 0$ для всех $k > 0$ и $i \neq 0$. Обозначим через A координатную алгебру многообразия X относительно расслоения $\mathcal{L}$, то есть $A = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathrm{H}^0(X, \mathcal{L}^k)$.

Рассмотрим многообразие X^n для некоторого $n \in \mathbb{N}$. В дальнейшем будем обозначать через $\pi_i^{(n)}$ проекцию X^n на i-ую компоненту, а через $\pi_{ij}^{(n)}$ – проекцию X^n на произведение i-ой и j-ой компонент. Определим подмногообразия $\Delta^{(n)}_{(i_1,\dots,i_k)(i_{k+1},\dots,i_m)} \subset X^n$ следующим образом:

$$\Delta^{(n)}_{(i_1,\dots,i_k)(i_{k+1},\dots,i_m)} := \left\{ (x_1, \dots, x_n) \mid x_{i_1} = \dots = x_{i_k};\ x_{i_{k+1}} = \dots = x_m \right\}.$$

Для краткости будем писать $S_i^{(n)}$ вместо $\Delta^{(n)}_{(n,\dots,i)}$. Очевидно, что $S_i^{(n)} \cong X^i$.

Теперь, положим

$$T_i^{(n)} := \bigcup_{k=1}^{i-1} \Delta^{(n)}_{(n,\dots,i)(k,k-1)}, \qquad \Sigma^{(n)} := \bigcup_{k=1}^{n} \Delta^{(n)}_{(k,k-1)}.$$

(По определению $T_1^{(n)}$ и $T_2^{(n)}$ – пустые подмножества). Легко видеть, что $T_i^{(n)} \subset S_i^{(n)}$.

Обозначим через $J_{\Sigma^{(n)}}$ пучок идеалов подсхемы $\Sigma^{(n)} \subset X^n$ а через $\mathcal{I}_i^{(n)}$ пучок на X^n , который является ядром естественного отображения $\mathcal{O}_{S_i^{(n)}} \longrightarrow \mathcal{O}_{T_i^{(n)}} \longrightarrow 0$.

Зафиксируем на время m и $k \le m$. Пусть s – вложение подмногообразия $S_k^{(m)} \cong X^{k-1} \times X$ в X^k , которое по определению многообразия $S_k^{(m)}$ является тождественным по первым $k-1$ компонентам и диагонально по последней k-ой компоненте. Обозначим через p проекцию $S_k^{(m)}$ на X^{k-1} , которое есть произведение первых $k-1$ сомножителей.

Лемма 3.A.1 *Пучок* $\mathcal{I}_1^{(m)}$ *изоморфен пучку* $\mathcal{O}_{\Delta^{(n)}_{(n,\dots,1)}}$ *, а при* $k > 1$ *пучок* $\mathcal{I}_k^{(m)}$ *изоморфен* $s_*p^*(J_{\Sigma(k-1)})$ *. В частности при* $k > 1$ *имеются изоморфизмы:*

$$\begin{array}{lll}
a) & \mathrm{H}^j(X^m, \mathcal{I}_k^{(m)} \otimes (\mathcal{L} \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{L}^i)) = & \\
 & \mathrm{H}^j(X^{k-1}, J_{\Sigma(k-1)} \otimes (\mathcal{L} \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{L})) \otimes A_{m-k+i} & \textit{для всех} \quad i > 0 \\
b) & \mathbf{R}^j \pi_{1*}^{(m)} (\mathcal{I}_k^{(m)} \otimes (\mathcal{O} \boxtimes \mathcal{L} \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{L}^i)) & \\
 & \cong \mathbf{R}^j \pi_{1*}^{(k-1)} (J_{\Sigma(k-1)} \otimes (\mathcal{O} \boxtimes \mathcal{L} \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{L})) \otimes A_{m-k+i} & \textit{для всех} \quad i > 0 \\
c) & \mathbf{R}^j \pi_{1m*}^{(m)} (\mathcal{I}_k^{(m)} \otimes (\mathcal{O} \boxtimes \mathcal{L} \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{L}^i)) & \\
 & \cong \mathbf{R}^j \pi_{1*}^{(k-1)} (J_{\Sigma(k-1)} \otimes (\mathcal{O} \boxtimes \mathcal{L} \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{L})) \boxtimes \mathcal{L}^{m-k+i} & \textit{для всех} \quad i
\end{array}$$

Доказательство. Утверждение про то, что при $k > 1$ пучок $\mathcal{I}_k^{(m)}$ изоморфен $s_*p^*(J_{\Sigma(k-1)})$, сразу следует из определений пучка $\mathcal{I}_k^{(m)}$ и подсхем $T_k^{(m)}$ и $S_k^{(m)}$. Все остальное немедленное следствие этого факта. □

Используя индукцию по n , несложно проверить, что следующий комплекс на X^n

$$P_n^\bullet : 0 \longrightarrow J_{\Sigma(n)} \longrightarrow \mathcal{I}_n^{(n)} \longrightarrow \mathcal{I}_{n-1}^{(n)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{I}_2^{(n)} \longrightarrow \mathcal{I}_1^{(n)} \longrightarrow 0$$

является точным. В качестве примера отметим, что при $n = 2$ этот комплекс есть короткая точная последовательность на $X \times X$:

$$P_2^\bullet : 0 \longrightarrow J_\Delta \longrightarrow \mathcal{O}_{X \times X} \longrightarrow \mathcal{O}_\Delta \longrightarrow 0$$

Лемма 3.A.2 *Пусть* X *– гладкое проективное многообразие с обильным линейным расслоением* $\mathcal{M}$ *. Тогда для любого натурального числа* k *существует* i *такое, что для расслоения* $\mathcal{L} = \mathcal{M}^i$ *и всех* $1 < m \le k$ *выполняются следующие* *свойства:*

$$\left.\begin{array}{lll} a) & \mathrm{H}^j(X^m, J_{\Sigma(m)} \otimes (\mathcal{L} \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{L})) = 0 & \textit{для} \quad j \neq 0 \\ b) & \mathbf{R}^j \pi_{1*}^{(m)}(J_{\Sigma(m)} \otimes (\mathcal{O} \boxtimes \mathcal{L} \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{L})) = 0 & \textit{для} \quad j \neq 0 \\ c) & \mathbf{R}^j \pi_{1m*}^{(m)}(J_{\Sigma(m)} \otimes (\mathcal{O} \boxtimes \mathcal{L} \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{L} \boxtimes \mathcal{O})) = 0 & \textit{для} \quad j \neq 0 \end{array}\right\} \qquad (3.19)$$

Доказательство. Для любого m линейные расслоения $\mathcal{M} \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{M}$, $\mathcal{O} \boxtimes \mathcal{M} \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{M}$ и $\mathcal{O} \boxtimes \mathcal{M} \cdots \boxtimes \mathcal{M} \boxtimes \mathcal{O}$ на X^m являются соответственно обильным, $\pi_1^{(m)}$ -обильным и $\pi_{1m}^{(m)}$ -обильным. Поэтому для каждого из них найдется целое число такое, что для всех степеней этих расслоений больших данного числа свойства a), b) и c) выполнены. Возьмем максимальное среди этих чисел по всем $m \leq k$. Обозначим этот максиму через i . Тогда для $\mathcal{L} = \mathcal{M}^i$ свойства a), b) и c) также выполнены. □

3.A.b. Введем следующие обозначения:

$$B_n := \mathrm{H}^0(X^n, J_{\Sigma(n)} \otimes (\mathcal{L} \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{L})), \qquad R_{n-1} := \mathbf{R}^0 \pi_{1*}^{(n)}(J_{\Sigma(n)} \otimes (\mathcal{O} \boxtimes \mathcal{L} \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{L})).$$

Предложение 3.A.3 *Пусть* $\mathcal{L}$ *– очень обильное расслоение на гладком проективном многообразии* X *, которое удовлетворяет условию (3.19) для всех* m *таких, что* $1 < m \leq n + \dim X + 2$ *. Тогда*

1) *алгебра* A *является n-Кошулевой, то есть последовательность*

$$B_n \otimes_k A \longrightarrow B_{n-1} \otimes_k A \longrightarrow \cdots \longrightarrow B_1 \otimes_k A \longrightarrow A \longrightarrow k \longrightarrow 0$$

точна;

2) *комплекс пучков на* X

$$A_{k-n} \otimes R_n \longrightarrow A_{k-n+1} \otimes R_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow A_{k-1} \otimes R_1 \longrightarrow A_k \otimes R_0 \longrightarrow \mathcal{L}^k \longrightarrow 0$$

точен для всех $k \geq 0$ *(если* $k - i < 0$ *, тогда по определению* $A_{k-i} = 0$ *);*

3) *комплекс пучков на* $X \times X$

$$\mathcal{L}^{-n} \boxtimes R_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{L}^{-1} \boxtimes R_1 \longrightarrow \mathcal{O}_M \boxtimes R_0 \longrightarrow \mathcal{O}_\Delta$$

является точным, то есть дает n-резольвенту диагонали на $X \times X$ *.*

Доказательство.

1) Во-первых, комбинируя Леммы 3.A.1 и 3.A.2 , для всех $1 < m \le n + \dim X + 2$ получаем:

$$\begin{array}{ll} 1) & \mathrm{H}^0(X^m, \mathcal{I}_k^{(m)} \otimes (\mathcal{L} \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{L}^i)) = \\ & \mathrm{H}^0(X^{k-1}, J_{\Sigma^{(k-1)}} \otimes (\mathcal{L} \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{L})) \otimes A_{m-k+i} = B_{k-1} \otimes A_{m-k+i} \\ 2) & \mathrm{H}^j(X^m, \mathcal{I}_k^{(m)} \otimes (\mathcal{L} \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{L}^i)) = 0 \quad \text{при} \quad j \neq 0. \end{array} \tag{3.20}$$

Рассмотрим комплексы $P_m^\bullet \otimes (\mathcal{L} \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{L})$ при $m \le n + \dim X + 1$. Применяя к ним функтор H^0 и используя условие (3.20), мы получаем точные последовательности:

$$0 \longrightarrow B_m \longrightarrow B_{m-1} \otimes_k A_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow B_1 \otimes_k A_{m-1} \longrightarrow A_m \longrightarrow 0$$

для всех $m \le n + \dim X + 1$.

Теперь положим $m = n + \dim X + 1$ и обозначим через 0 $W_m^\bullet$ комплекс

$$\mathcal{I}_m^{(m)} \longrightarrow \mathcal{I}_{m-1}^{(m)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{I}_2^{(m)} \longrightarrow \mathcal{I}_1^{(m)} \longrightarrow 0,$$

который является правой резольвентой пучка $J_{\Sigma^{(m)}}$. Возьмем комплекс $W_m^\bullet \otimes (\mathcal{L} \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{L} \boxtimes \mathcal{L}^i)$ и применим к нему функтор H^0 . Мы получаем последовательность:

$$B_{m-1} \otimes_k A_i \longrightarrow B_{m-2} \otimes_k A_{i+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow B_1 \otimes_k A_{m+i-2} \longrightarrow A_{m+i-1} \longrightarrow 0$$

Из свойства (3.20) 2) следует, что когомологии этого комплекса есть $\mathrm{H}^j(X^m, J_{\Sigma^{(m)}} \otimes (\mathcal{L} \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{L} \boxtimes \mathcal{L}^i))$. Из условия (3.19) b) следует, что

$$\mathrm{H}^j(X^m, J_{\Sigma^{(m)}} \otimes (\mathcal{L} \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{L} \boxtimes \mathcal{L}^i)) = \mathrm{H}^j(X, \mathbf{R}^0\pi_{m*}^{(m)}(J_{\Sigma^{(m)}} \otimes (\mathcal{L} \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{L} \boxtimes \mathcal{O})) \otimes \mathcal{L}^i)$$

Следовательно, они тривиальны при $j > \dim X$ и значит имеется точная последовательность:

$$B_n \otimes_k A_{m-n+i-1} \longrightarrow B_{n-1} \otimes_k A_{m-n+i} \longrightarrow \cdots \longrightarrow B_1 \otimes_k A_{m+i-2} \longrightarrow A_{m+i-1} \longrightarrow 0$$

при $i \ge 1$. А при $i \le 1$ точность была доказана ранее. То есть алгебра A является n-Кошулевой.

2) Доказательство аналогично доказательству пункта 1). Имеем изоморфизмы:

$$\begin{array}{ll} 1) & \mathbf{R}^0\pi_{1*}^{(m)}(\mathcal{I}_k^{(m)} \otimes (\mathcal{O} \boxtimes \mathcal{L} \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{L})) \cong \\ & \mathbf{R}^0\pi_{1*}^{(k-1)}(J_{\Sigma^{(k-1)}} \otimes (\mathcal{O} \boxtimes \mathcal{L} \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{L})) \otimes A_{m-k+1} \\ 2) & \mathbf{R}^j\pi_{1*}^{(m)}(\mathcal{I}_k^{(m)} \otimes (\mathcal{O} \boxtimes \mathcal{L} \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{L})) = 0 \quad \text{для всех} \quad j \neq 0 \end{array} \tag{3.21}$$

Применяя теперь функтор $\mathbf{R}^0\pi_{1*}^{(m)}$ к комплексам $P_m^\bullet \otimes (\mathcal{O} \boxtimes \mathcal{L} \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{L}))$ при $m \le n + \dim X + 2$, мы получаем точный комплекс пучков на X :

$$0 \longrightarrow R_{m-1} \longrightarrow A_1 \otimes R_{m-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow A_{m-2} \otimes R_1 \longrightarrow A_{m-1} \otimes R_0 \longrightarrow \mathcal{L}^{m-1} \longrightarrow 0$$

для $m \le n + \dim X + 2$.

Рассмотрим $m = n + \dim X + 2$. Применяя функтор $\mathbf{R}^0\pi_{1*}^{(m)}$ к комплексу

$$W_m^\bullet \otimes (\mathcal{O} \boxtimes \mathcal{L} \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{L} \boxtimes \mathcal{L}^i)),$$

мы получаем комплекс

$$A_i \otimes R_{m-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow A_{m+i-3} \otimes R_1 \longrightarrow A_{m+i-2} \otimes R_0 \longrightarrow \mathcal{L}^{m+i-2} \longrightarrow 0.$$

По свойству (3.21) когомологии этого комплекса есть

$$\mathbf{R}^j\pi_{1*}^{(m)}(J_{\Sigma^{(m)}} \otimes (\mathcal{O} \boxtimes \mathcal{L} \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{L} \boxtimes \mathcal{L}^i)) \cong \\ \mathbf{R}^j p_{1*}(\mathbf{R}^0\pi_{1m*}^{(m)}(J_{\Sigma^{(m)}} \otimes (\mathcal{O} \boxtimes \mathcal{L} \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{L} \boxtimes \mathcal{O})) \otimes (\mathcal{O} \boxtimes \mathcal{L}^i)),$$

которые тривиальны при $j > \dim X$. Значит последовательность пучков на X

$$A_{k-n} \otimes R_n \longrightarrow A_{k-n+1} \otimes R_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow A_{k-1} \otimes R_1 \longrightarrow A_k \otimes R_0 \longrightarrow \mathcal{L}^k \longrightarrow 0$$

точна для всех $k \ge 0$.

3) Рассмотрим комплекс $W_{n+2}^\bullet \otimes (\mathcal{O} \boxtimes \mathcal{L} \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{L} \boxtimes \mathcal{L}^{-n})$ на X^{n+2} . Применяя теперь функтор $\mathbf{R}^0\pi_{1(n+2)*}^{(n+2)}$ к нему, мы получаем следующий комплекс на $X \times X$:

$$\mathcal{L}^{-n} \boxtimes R_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{L}^{-1} \boxtimes R_1 \longrightarrow \mathcal{O}_M \boxtimes R_0 \longrightarrow \mathcal{O}_\Delta \tag{3.22}$$

Вспоминая условие c) Леммы 3.A.1 и условие (3.19) b), находим что когомологии этого комплекса изоморфны пучкам

$$\mathbf{R}^j\pi_{1(n+2)*}^{(n+2)}(J_{\Sigma^{(n+2)}} \otimes (\mathcal{O} \boxtimes \mathcal{L} \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{L} \boxtimes \mathcal{O})) \otimes (\mathcal{O} \boxtimes \mathcal{L}^{-n}),$$

которые по свойству (3.19) c) равны 0 при $j > 0$. То есть комплекс (3.22) является точным. $\square$

Глава 4

Производные категории когерентных пучков на К3 поверхностях

4.1 К3 поверхности и решетка Мукаи.

4.1.a. Эта глава целиком посвящена производным категориям когерентных пучков на поверхностях типа К3 над полем комплексных чисел. Главный вопрос, который нас будет интересовать, и на который мы дадим ответ: когда две разных К3 поверхности имеют эквивалентные категории когерентных пучков. Как и раньше мы рассматриваем производные категории как триангулированные и эквивалентность понимаем, как эквивалентность между триангулированными категориями.

Напомним, что для гладких проективных многообразий с обильным каноническим или антиканоническим классом существует процедура восстановления производной категории когерентных пучков (см. Теорему 2.1.3). Однако для многообразий другого типа вопрос этот нетривиальный и особенно интересен для многообразий с тривиальным каноническим классом. В следующей главе мы будем очень подробно исследовать на этот предмет класс абелевых многообразий. Но начнем мы с К3 поверхностей.

Мы начнем с основных необходимых нам фактов про К3 поверхности, которые мы будем считать гладкими Напомним, что поверхность типа К3 – это компактная алгебраическая поверхность S, для которой $K_S = 0$ и $\mathrm{H}^1(S, \mathbb{Z}) = 0$. Такие поверхности на самом деле являются односвязными. Можно показать, что вторые когомологии $\mathrm{H}^2(S, \mathbb{Z})$ не имеют кручения и являются четной решеткой ранга 22 относительно формы пересечения. Кроме того, из формулы Нетера следует, что $p_g(S) = 1$ и $h^{1,1}(S) = 20$.

Одним из основных инвариантов поверхности типа K3 является ее группа Нерона-Севери $\mathrm{NS}(S) \subset \mathrm{H}^2(S, \mathbb{Z})$, которая в этом случае совпадает с группой Пикара $\mathrm{Pic}(S)$. Ранг решетки $\mathrm{NS}(S)$ не превосходит $h^{1,1} = 20$. Обозначим через T_S решетку трансцедентных циклов, которая по определению есть ортогональное дополнение к решетке Нерона-Севери $\mathrm{NS}(S)$ во вторых когомологиях $\mathrm{H}^2(S, \mathbb{Z})$.

Теперь, обозначим через td_S класс Тодда поверхности S, который есть элемент $\mathrm{H}^*(S, \mathbb{Q})$. Он имеет вид $1 + 2w$, где $1 \in \mathrm{H}^0(S, \mathbb{Z})$ – это единица кольца когомологий $\mathrm{H}^*(S, \mathbb{Z})$, и $w \in \mathrm{H}^4(S, \mathbb{Z})$ – фундаментальный коцикл S. Рассмотрим положительный квадратный корень $\sqrt{td_S} = 1 + w$, который для K3 поверхности лежит в кольце целых когомологий $\mathrm{H}^*(S, \mathbb{Z})$.

Для любого когерентного пучка на S

определен характер Черна, который по аддитивности продолжается на всю производную категорию когерентных пучков. Если F – объект $\mathbf{D}^b(S)$, то характер Черна

$$ch(F) = r(F) + c_1(F) + \frac{1}{2}(c_1^2 - 2c_2)$$

принадлежит целым когомологиям $\mathrm{H}^*(S, \mathbb{Z})$. Для любого объекта F мы определим элемент

$$v(F) = ch(F) \cdot \sqrt{td_S} \in \mathrm{H}^*(S, \mathbb{Z})$$

и назовем его вектором, ассоциированный с F (или вектором Мукаи).

На решетке когомологий $\mathrm{H}^*(S, \mathbb{Z})$ определим симметрическую билинейную форму по правилу

$$(u, u') = r \cdot s' + s \cdot r' - \alpha \cdot \alpha' \in \mathrm{H}^4(S, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$$

для всякой пары $u = (r, \alpha, s), u' = (r', \alpha', s') \in \mathrm{H}^0(S, \mathbb{Z}) \oplus \mathrm{H}^2(S, \mathbb{Z}) \oplus \mathrm{H}^4(S, \mathbb{Z})$. Решетку когомологий $\mathrm{H}^*(S, \mathbb{Z})$ с этой билинейной формой $(\ ,\ )$ назовем решеткой Мукаи и обозначим через $\widetilde{\mathrm{H}}(S, \mathbb{Z})$. Отметим, что данная билинейная форма отличается от обычной формы пересечения знаком $(-)$ на вторых когомологиях. И значит решетка Мукаи $\widetilde{\mathrm{H}}(S,\mathbb{Z})$ изоморфна решетке $\mathrm{U}\perp-\mathrm{H}^2(S,\mathbb{Z})$, где U – гиперболическая решетка $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$.

Для любых двух объектов F и G, спаривание $(v(F),v(G))$ есть по определению H^4-компонента элемента $ch(F)^\vee\cdot ch(G)\cdot td_S$. Следовательно, по Теореме Римана-Роха-Гротендика имеем равенство:

$$(v(F),v(G))=\chi(F,G):=\sum_i(-1)^i\dim\mathrm{Ext}^i(F\,,\,G).$$

На решетках $\widetilde{\mathrm{H}}(S,\mathbb{Z})$ и T_S имеются естественные структуры Ходжа. В данном случае под структурами Ходжа мы понимаем то, что в пространствах $\widetilde{\mathrm{H}}(S,\mathbb{C})$ и $\mathrm{T}_S\otimes\mathbb{C}$ зафиксированы одномерное подпространство $\mathrm{H}^{2,0}(S)$.

Определение 4.1.1 *Пусть S_1 и S_2 – две К3 поверхности. Мы скажем, что их решетки Мукаи (соотв. решетки трансцедентных циклов) Ходжево изометричны, если существует изометрия между ними, которая переводит одномерное подпространство $\mathrm{H}^{2,0}(S_1)$ в $\mathrm{H}^{2,0}(S_2)$.*

4.1.b. Пусть сейчас $\mathcal{E}$ – это произвольный объект из производной категории произведения $\mathbf{D}^b(S_1\times S_2)$. Рассмотрим алгебраический цикл

$$Z_{\mathcal{E}}:=p^*\sqrt{td_{S_1}}\cdot ch(\mathcal{E})\cdot\pi^*\sqrt{td_{S_2}} \tag{4.1}$$

на произведении $S_1\times S_2$, где p и π – проекции в диаграмме

$$\begin{array}{ccc} S_1\times S_2 & \xrightarrow{\pi} & S_2\\ {\scriptstyle p}\big\downarrow & & \\ S_1 & & . \end{array}$$

В случае К3 поверхностей цикл Z, который a priori является рациональным, на самом деле целый.

Лемма 4.1.2 [35] *Для всякого объекта $\mathcal{E}\in\mathbf{D}^b(S_1\times S_2)$ характер Черна $ch(\mathcal{E})$ и цикл $Z_{\mathcal{E}}$ являются целыми, то есть принадлежат $\mathrm{H}^*(S_1\times S_2,\mathbb{Z})$.*

Таким образом, цикл Z задает отображение из решетки целых когомологий поверхности S_1 в целые когомологии S_2:

$$\begin{array}{cccc} f_Z: & \mathrm{H}^*(S_1,\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \mathrm{H}^*(S_2,\mathbb{Z})\\ & \cup & & \cup\\ & \alpha & \mapsto & \pi_*(Z\cdot p^*(\alpha)). \end{array} \tag{4.2}$$

Следующее предложение аналогично Теореме 4.9 из работы [35].

Предложение 4.1.3 *Если объект* $\mathcal{E}$ *такой, что функтор* $\Phi_{\mathcal{E}}$ *из категории* $\mathbf{D}^b(S_1)$ *в категорию* $\mathbf{D}^b(S_2)$ *является вполне строгим, то:*

1) $f_{Z_{\mathcal{E}}}$ *является изометрией между решетками* $\widetilde{\mathrm{H}}(S_1,\mathbb{Z})$ *и* $\widetilde{\mathrm{H}}(S_2,\mathbb{Z})$ *,*

2) обратное отображение к f *совпадает с гомоморфизмом*

$$\begin{array}{rccc} f': & \mathrm{H}^*(S_2,\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \mathrm{H}^*(S_1,\mathbb{Z}) \\ & \cup & & \cup \\ & \beta & \mapsto & p_*(Z_{\mathcal{E}}^{\vee}\cdot\pi^*(\beta)), \end{array}$$

определенным циклом

$$Z_{\mathcal{E}}^{\vee} = p^*\sqrt{td_{S_1}}\cdot ch(\mathcal{E}^{\vee})\cdot\pi^*\sqrt{td_{S_2}},$$

где $\mathcal{E}^{\vee} := \mathbf{R}^{\bullet}\underline{\mathcal{H}om}(\mathcal{E},\mathcal{O}_{S_1\times S_2})$.

Доказательство. Левый и правый сопряженные функторы к $\Phi_{\mathcal{E}}$ изоморфны и задаются по формуле:

$$\Phi_{\mathcal{E}}^* = \Phi_{\mathcal{E}}^! = \mathbf{R}p_*(\mathcal{E}^{\vee}\overset{\mathbf{L}}{\otimes}\pi^*(\bullet))[2].$$

Так как $\Phi_{\mathcal{E}}$ вполне строгий, то композиция $\Phi_{\mathcal{E}}^*\circ\Phi_{\mathcal{E}}$ изоморфны тождественному функтору $\mathrm{id}_{\mathbf{D}^b(S_1)}$.

Тождественный функтор $\mathrm{id}_{\mathbf{D}^b(S_1)}$ задается структурным пучком $\mathcal{O}_{\Delta}$ диагонали $\Delta\subset S_1\times S_1$.

Используя формулу проекции и Теорему Римана-Роха-Гротендика, можно найти, что композиция $f'\circ f$ представляется циклом $p_1^*\sqrt{td_{S_1}}\cdot ch(\mathcal{O}_{\Delta})\cdot p_2^*\sqrt{td_{S_1}}$, где p_1,p_2 – проекции $S_1\times S_1$ на сомножители. Опять по Теореме Римана-Роха-Гротендика находим, что этот цикл есть цикл Δ . Следовательно, композиция $f'\circ f$ является тождественным отображением, и значит f есть изоморфизм между $\mathrm{H}^*(S_1,\mathbb{Z})$ и $\mathrm{H}^*(S_2,\mathbb{Z})$, по той причине, что обе они являются свободными абелевыми группами одинакового ранга.

Обозначим через $\nu_S : S\longrightarrow Spec\,\mathbb{C}$ структурный морфизм S . Тогда спаривание (α,α') на решетке $\widetilde{\mathrm{H}}(S,\mathbb{Z})$ можно записать как $\nu_*(\alpha^{\vee}\cdot\alpha')$. Из формулы проекции получаем:

$$\begin{aligned}(\alpha, f(\beta)) &= \nu_{S_2,*}(\alpha^\vee \cdot \pi_*(\pi^*\sqrt{td_{S_2}} \cdot ch(\mathcal{E}) \cdot p^*\sqrt{td_{S_1}} \cdot p^*(\beta))) = \\ &= \nu_{S_2,*}\pi_*(\pi^*(\alpha^\vee) \cdot p^*(\beta) \cdot ch(\mathcal{E}) \cdot \sqrt{td_{S_1\times S_2}}) = \\ &= \nu_{S_1\times S_2,*}(\pi^*(\alpha^\vee) \cdot p^*(\beta) \cdot ch(\mathcal{E}) \cdot \sqrt{td_{S_1\times S_2}})\end{aligned}$$

для произвольных $\alpha \in \mathrm{H}^*(S_2, \mathbb{Z}), \beta \in \mathrm{H}^*(S_1, \mathbb{Z})$. Аналогичным образом имеем:

$$(\beta, f'(\alpha)) = \nu_{S_1\times S_2,*}(p^*(\beta^\vee) \cdot \pi^*(\alpha) \cdot ch(\mathcal{E})^\vee \cdot \sqrt{td_{S_1\times S_2}}).$$

Следовательно, $(\alpha, f(\beta)) = (f'(\alpha), \beta)$. Так как $f' \circ f$ – тождественное отображение, то

$$(f(\alpha), f(\alpha')) = (f'f(\alpha), \alpha') = (\alpha, \alpha').$$

И значит f – это изометрия. □

4.2 Критерий эквивалентности для производных категорий когерентных пучков.

4.2.a. В этом параграфе мы дадим критерий того, когда производные категории когерентных пучков на двух K3 поверхностях эквивалентны как триангулированные категории. Этот критерий по виду очень напоминает строгую Теорему Торелли для K3 поверхностей, которая говорит, что две K3 поверхности S_1 и S_2 изоморфны тогда и только тогда, когда их решетки вторых когомологий ходжево изометричны, то есть существует изометрия

$$\mathrm{H}^2(S_1, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^2(S_2, \mathbb{Z}),$$

продолжение которой до отображения комплексных когомологий переводит подпространство $\mathrm{H}^{2,0}(S_1)$ в $\mathrm{H}^{2,0}(S_2)$ (см. [31]).

Наш главный результат этой главы выглядит так.

Теорема 4.2.1 *Пусть S_1 и S_2 – две гладкие проективные K3 поверхности на полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Тогда производные категории когерентных пучков $\mathbf{D}^b(S_1)$ и $\mathbf{D}^b(S_2)$ эквивалентны как триангулированные категории тогда и только тогда, когда существует Ходжева изометрия $f : \widetilde{\mathrm{H}}(S_1, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathrm{H}}(S_2, \mathbb{Z})$ между решетками Мукаи поверхностей S_1 и S_2 .*

Эта теорема имеет и другой вариант, который также может быть интересен (см. Теорему 4.2.4).

Доказательство Теоремы 4.2.1 разобьем на две части и на два Предложения. Доказательство первого Предложения существенно опирается на главную Теорему 3.2.1 предыдущей главы,

так как использует тот факт, что любая эквивалентность может быть представлена объектом на произведении.

Предложение 4.2.2 *Пусть* S_1 *и* S_2 *– две К3 поверхности такие, что их производные категории когерентных пучков эквивалентны. Тогда существует Ходжева изометрия между решетками трансцедентных циклов* T_{S_1} *и* T_{S_2} *.*

Доказательство. По Теореме 3.2.2 существует объект $\mathcal{E}$ на произведении $S_1 \times S_2$, который задает эквивалентность. Из Предложения 4.1.3 следует, что $f_{Z_\mathcal{E}}$ задает Ходжеву изометрию между решетками Мукаи $\widetilde{\mathrm{H}}(S_1,\mathbb{Z})$ и $\widetilde{\mathrm{H}}(S_2,\mathbb{Z})$. Так как цикл Z является алгебраическим, мы получаем две изометрии $f_{alg} : -\mathrm{NS}(S_1)\perp\mathrm{U} \xrightarrow{\sim} -\mathrm{NS}(S_2)\perp\mathrm{U}$ и $f_\tau : \mathrm{T}_{S_1} \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_{S_2}$, где $\mathrm{NS}(S_1), \mathrm{NS}(S_2)$ – решетки Нерона-Севери, и $\mathrm{T}_{S_1}, \mathrm{T}_{S_2}$ – решетки трансцедентных циклов. Очевидно, что f_τ является Ходжевой изометрией. □

Доказательство в обратную сторону существенно использует результаты статьи [35], где исследованы многообразия модулей расслоений на К3 поверхностях, а также использует Теорему 2.1.5, в которой дается критерий того, когда функтор является вполне строгим (см. [9])

Предложение 4.2.3 *Пусть* S_1 *и* S_2 *– две проективные К3 поверхности. Предположим, что существует Ходжева изометрия*

$$f : \widetilde{\mathrm{H}}(S_2,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathrm{H}}(S_1,\mathbb{Z}).$$

Тогда ограниченные производные категории когерентных пучков $\mathbf{D}^b(S_1)$ *и* $\mathbf{D}^b(S_2)$ *эквивалентны.*

Доказательство. Положим $v = f(0,0,1) = (r,l,s)$ и $u = f(1,0,0) = (p,k,q)$. Без потери общности мы можем предполагать, что $r > 1$. Действительно на решетке Мукаи существуют два типа Ходжевых изометрий. Первый тип – это умножение на характер Черна e^m линейного расслоения:

$$\phi_m(r,l,s) = (r, l + rm, s + (m,l) + \frac{r}{2}m^2).$$

Второй тип – это перестановка r и s. Таким образом, мы можем заменить f так, что $r > 1$.

Очевидно, что вектор $v \in \mathrm{U} \perp -\mathrm{NS}(S_1)$ является изотропным, то есть $(v, v) = 0$. В замечательной работе Мукаи [35] доказано, что в этом случае существует поляризация A на поверхности К3 S_1 такая, что многообразие модулей $\mathcal{M}_A(v)$ расслоений стабильных относительно поляризации A, для которых вектор Мукаи совпадает с v, является гладкой проективной К3 поверхностью. Более того, так как существует вектор $u \in \mathrm{U} \perp -\mathrm{NS}(S_1)$ такой, что $(v, u) = 1$, то многообразие модулей $\mathcal{M}_A(v)$ является тонким. Следовательно, существует универсальное расслоение $\mathcal{E}$ на произведении $S_1 \times \mathcal{M}_A(v)$.

Универсальное расслоение $\mathcal{E}$ задает функтор $\Phi_{\mathcal{E}} : \mathbf{D}^b(\mathcal{M}_A(v)) \longrightarrow \mathbf{D}^b(S_1)$. Для этого функтора мы легко можем проверить условия Теоремы 2.1.5. Действительно $\Phi_{\mathcal{E}}(\mathcal{O}_t) = \mathcal{E}_t$, где $\mathcal{E}_t$ – стабильное расслоение на S_1, для которого $v(\mathcal{E}_t) = v$. Все эти пучки простые и, конечно, $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{E}_t, \mathcal{E}_t) = 0$ для $i \notin [0, 2]$. Что дает условие 2) Теоремы 2.1.5.

Так как E_t стабильны, то $\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_{t_1}, \mathcal{E}_{t_2}) = 0$. И по двойственности Серра $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{E}_{t_1}, \mathcal{E}_{t_2}) = 0$. Изотропность вектора v влечет, что и $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}_{t_1}, \mathcal{E}_{t_2}) = 0$. Таким образом, пучки $\mathcal{E}_{t_1}$ и $\mathcal{E}_{t_2}$ ортогональны для любых разных точек t_1, t_2.

По Теореме 2.1.5 получаем, что функтор $\Phi_{\mathcal{E}}$ является вполне строгим.

На самом деле, функтор $\Phi_{\mathcal{E}}$ не только вполне строгий, но и является эквивалентностью. Действительно, обозначим через $\mathcal{D}$ образ категории $\mathbf{D}^b(\mathcal{M}_A(v))$ в $\mathbf{D}^b(S_1)$. Так как она является допустимой (см. Определение 2.2.2), то существуют правый и левый ортогоналы к ней, которые из-за того, что канонический класс на К3 поверхности тривиален, совпадают друг с другом в данном случае. Таким образом, полуортогональное разложение вида $\left\langle \mathcal{D}^{\perp}, \mathcal{D} \right\rangle$ является полностью ортогональным. Рассмотрим обильное линейное расслоение $\mathcal{L}$ на $\mathcal{M}_A(v)$. Все степени $\mathcal{L}^{\otimes i}$ являются неразложимыми объектами и значит принадлежат какой-нибудь подкатегории $\mathcal{D}$ или $\mathcal{D}^{\perp}$ и все одной и той же. Но $\{\mathcal{L}^i\}$ образуют обильную последовательность (см. Определение 3.4.1). По Лемме 3.4.3 ортогонал к подкатегории, порожденной обильной последовательностью равен 0. Таким образом, так как $\mathcal{D}$ не тривиальна, мы получаем, что $\mathcal{D}^{\perp} = 0$. Следовательно, $\Phi_{\mathcal{E}}$ – эквивалентность.

Теперь, цикл $Z_{\mathcal{E}}$, определенный по формуле (4.1), индуцирует Ходжеву изометрию $g : \widetilde{\mathrm{H}}(\mathcal{M}_A(v), \mathbb{Z}) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{H}}(S_1, \mathbb{Z})$ такую, что $g(0,0,1) = v = (r, l, s)$. Следовательно, $f^{-1} \circ g$ также является Ходжевой изометрией и переводит $(0,0,1)$ в $(0,0,1)$. Следовательно, $f^{-1} \cdot g$ индуцирует Ходжеву изометрию между решетками вторых когомологий поверхностей S_2 и $\mathcal{M}_A(v)$. И, следовательно, по сильной теореме Торелли поверхности S_2 и $\mathcal{M}_A(v)$ изоморфны ([31]). $\square$

Данное Предложение и Предложение 4.1.3 дают доказательство Теоремы 4.2.1 .

4.2.b. Существует другая версия Теоремы 4.2.1 , которая дает критерий эквивалентности производных категорий в терминах решетки трансцедентных циклов.

Теорема 4.2.4 *Пусть* S_1 *и* S_2 *– две гладкие проективные K3 поверхности над полем* $\mathbb{C}$ *. Тогда производные категории когерентных пучков* $\mathbf{D}^b(S_1)$ *и* $\mathbf{D}^b(S_2)$ *эквивалентны как триангулированные категории тогда и только тогда, когда существует Ходжева изометрия* $f_\tau : \mathrm{T}_{S_1} \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_{S_2}$ *между решетками трансцедентных циклов поверхностей* S_1 *и* S_2 *.*

Эта утверждение является следствием Теоремы 4.2.1 и следующего предложения.

Предложение 4.2.5 [41] *Пусть* $\phi_1, \phi_2 : \mathrm{T} \longrightarrow \mathrm{H}$ *– два примитивных вложения решетки* T *в четную унимодулярную решетку* H *. Предположим, что ортогональное дополнение* $\mathrm{N} := \phi_1(\mathrm{T})^\perp$ *в* H *содержит гиперболическую решетку* $\mathrm{U} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ *как подрешетку. Тогда* ϕ_1 *и* ϕ_2 *эквивалентны, то есть существует изометрия* γ *решетки* H *такая, что* $\phi_1 = \gamma\phi_2$ *.*

Действительно, предположим имеется Ходжева изометрия

$$f_\tau : \mathrm{T}_{S_2} \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_{S_1}.$$

Мы знаем, что ортогональное дополнение к решетке трансцедентных циклов T_S в решетке Мукаи $\widetilde{\mathrm{H}}(S, \mathbb{Z})$ изоморфно решетке $-\mathrm{NS}(S) \perp \mathrm{U}$. И значит по предыдущему Предложению 4.2.5 существует изометрия

$$f : \widetilde{\mathrm{H}}(S_2, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathrm{H}}(S_1, \mathbb{Z})$$

такая, что $f\big|_{\mathrm{T}_{S_2}} = f_\tau$. Таким образом, изометрия f является также Ходжевой. Следовательно, по Теореме 4.2.1 производные категории когерентных пучков на поверхностях S_1 и S_2 эквивалентны.

Глава 5

Абелевы многообразия

5.1 Производные категории когерентных пучков: основные результаты.

В этой главе мы исследуем производные категории когерентных пучков на абелевых многообразиях и их группы автоэквивалентностей.

Пусть A – абелево многообразие и $\widehat{A}$ – двойственное абелево многообразие. В работе [33] было доказано, что производные категории когерентных пучков $\mathbf{D}^b(A)$ и $\mathbf{D}^b(\widehat{A})$ эквивалентны, и эквивалентность, которая называется преобразованием Фурье-Мукаи, может быть задана с помощью линейного расслоения Пуанкаре $\mathcal{P}_A$ на произведении $A \times \widehat{A}$ по следующему правилу

$$F \mapsto \mathbf{R}^{\cdot} p_{2*}(\mathcal{P}_A \otimes p_1^*(F)).$$

Эта конструкция Мукаи была обобщена в статье [42] следующим образом.

Рассмотрим два абелевых многообразия A и B, и изоморфизм f между абелевыми многообразиями $A \times \widehat{A}$ и $B \times \widehat{B}$. Запишем f в матричном виде

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix},$$

где x – гомоморфизм из A в B, y – из $\widehat{A}$ в B, и так далее. Мы назовем его изометричным, если обратный к f имеет следующий вид:

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} \widehat{w} & -\widehat{y} \\ -\widehat{z} & \widehat{x} \end{pmatrix}$$

В статье [42] доказывается, что, если для двух абелевых многообразий над алгебраически замкнутым полем A и B существует изометричный изоморфизм между $A\times\widehat{A}$ и $B\times\widehat{B}$, то производные категории когерентных пучков $\mathbf{D}^b(A)$ и $\mathbf{D}^b(B)$ эквивалентны.

В этой главе мы доказываем равносильность этих условий над алгебраически замкнутым полем характеристики 0 , то есть, производные категории $\mathbf{D}^b(A)$ и $\mathbf{D}^b(B)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда существует изометричный изоморфизм из $A\times\widehat{A}$ в $B\times\widehat{B}$. На самом деле, в одну сторону это утверждение верно над произвольным полем (Теорема 5.2.19). Как следствие этой теоремы получаем, что существует только конечное число неизоморфных абелевых многообразий, производные категории которых эквивалентны $\mathbf{D}^b(A)$ для заданного абелева многообразия A (Следствие 5.2.20). Доказательство существенно опирается на Теорему 3.2.2 из главы 3, которая говорит, что любая точная эквивалентность между производными категориями когерентных пучков гладких проективных многообразий может быть представлена объектом на произведении.

Представляя эквивалентности объектами на произведении, мы построим отображение из множества всех точных эквивалентностей между $\mathbf{D}^b(A)$ и $\mathbf{D}^b(B)$ в множество изометричных изоморфизмов из $A\times\widehat{A}$ в $B\times\widehat{B}$.

Далее мы покажем, что это отображение функториально (Предложение 5.2.15). В частности, получается гомоморфизм из группы точных автоэквивалентностей категории $\mathbf{D}^b(A)$ в группу $U(A\times\widehat{A})$ изометричных автоморфизмов многообразия $A\times\widehat{A}$.

В параграфе 5.3 мы описываем ядро этого гомоморфизма, которое оказывается изоморфно прямой сумме $\mathbb{Z}$ и группы k -точек многообразия $A\times\widehat{A}$ (Предложение 5.3.3). Технически это описание опирается на тот факт, что объект на произведении абелевых многообразий, задающий эквивалентность, на самом деле является пучком с точностью до сдвига в производной категории (Предложение 5.3.2). Это утверждение ни в коем случае не является общим фактом. Оно, к примеру, не верно для K3 поверхностей, но в случае абелевых многообразий дает ключ к описанию группы автоэквивалентностей.

В последнем параграфе 5.4, в предположении, что основное поле алгебраически замкнуто и $\operatorname{char}(k)=0$, мы приводим другое доказательство утверждения из [42], основанное на фактах из статьи [34], в которой описываются полуоднородные расслоения на абелевых многообразий. В частности, получаем точную последовательность групп

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus (A \times \widehat{A})_k \longrightarrow \operatorname{Auteq} \mathbf{D}^b(A) \longrightarrow U(A \times \widehat{A}) \longrightarrow 1.$$

В заключении, мы описываем центральное расширение $U(A \times \widehat{A})$ с помощью $\mathbb{Z}$ и даем формулу для 2-коцикла, который задает это расширение.

5.2 Эквивалентности между категориями когерентных пучков на абелевых многообразиях.

5.2.a. Пусть A – абелево многообразие размерности n на полем k. Будем обозначать через $m : A \times A \to A$ морфизм композиции, который считается определенным над полем k, и через e – k-точку, которая является единицей групповой структуры.

Обозначим через $\widehat{A}$ двойственное абелево многообразие, которое является многообразием модулей линейных расслоений на A, принадлежащих $\operatorname{Pic}^0(A)$. Более того, $\widehat{A}$ является тонким многообразием модулей. Поэтому на произведении $A \times \widehat{A}$ существует универсальное линейное расслоение $\mathcal{P}$, которое называется расслоением Пуанкаре. Это расслоение определяется однозначно тем, что для любой k-точки $\alpha \in \widehat{A}$ ограничение $\mathcal{P}$ на $A \times \{\alpha\}$ изоморфно линейному расслоению из $\operatorname{Pic}^0(A)$, соответствующему α, и в дополнении ограничение $\mathcal{P}\Big|_{\{e\}\times\widehat{A}}$ должно быть тривиальным.

Определение 5.2.1 *Линейное расслоение на A, которое соответствует k-точке $\alpha \in \widehat{A}$, будем обозначать далее $\mathcal{P}_\alpha$.*

Более того, если имеется несколько абелевых многообразий $A_1, ..., A_m$ и k-точка $(\alpha_1, ..., \alpha_m) \in \widehat{A}_1 \times \cdots \times \widehat{A}_m$, тогда будем обозначать через $\mathcal{P}_{(\alpha_1,...,\alpha_k)}$ линейное расслоение $\mathcal{P}_{\alpha_1} \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{P}_{\alpha_k}$ на произведении $A_1 \times \cdots \times A_k$.

Для любого гомоморфизма абелевых многообразий $f : A \to B$ определен двойственный гомоморфизм $\widehat{f} : \widehat{B} \to \widehat{A}$. Поточечно он устроен так, что точку $\beta \in \widehat{B}$ переводит в точку $\alpha \in \widehat{A}$ тогда и только тогда, когда линейное расслоение $f^*\mathcal{P}_\beta$ совпадает с расслоением $\mathcal{P}_\alpha$ на A.

Дважды двойственное абелево многообразие $\widehat{\widehat{A}}$ может быть естественным образом отождествлено с A при помощи расслоений Пуанкаре на $A \times \widehat{A}$ и на $\widehat{A} \times \widehat{\widehat{A}}$. Другими словами, существует единственный изоморфизм $\kappa_A : A \xrightarrow{\sim} \widehat{\widehat{A}}$ такой, что поднятие расслоения Пуанкаре $\mathcal{P}_{\widehat{A}}$ при изоморфизме $1 \times \kappa_A : \widehat{A} \times A \xrightarrow{\sim} \widehat{A} \times \widehat{\widehat{A}}$ совпадает с расслоением Пуанкаре $\mathcal{P}_A$, т.е. $(1 \times \kappa_A)^* P_{\widehat{A}} \cong \mathcal{P}_A$.

Таким образом, $\widehat{\ }$ является инволюцией на категории абелевых многообразий, т.е. контровариантным функтором, чей квадрат изоморфен тождественному функтору $\kappa : \mathrm{id} \xrightarrow{\sim} \widehat{\widehat{\ }}$.

Замечание 5.2.2 ($k = \mathbb{C}$) Пусть A – абелево многообразие над $\mathbb{C}$. Выберем базис $l_1, ..., l_{2n}$ в $\mathrm{H}_1(A, \mathbb{Z})$ и двойственный базис $l_1^*, ..., l_{2n}^*$ в $\mathrm{H}_1(\widehat{A}, \mathbb{Z}) \cong \mathrm{H}_1(A, \mathbb{Z})^*$. Пусть теперь $l_1^{**}, ..., l_{2n}^{**}$ – это базис в $\mathrm{H}_1(\widehat{\widehat{A}}, \mathbb{Z})$, двойственный к $l_1^*, ..., l_{2n}^*$. Изоморфизм $\kappa_A : A \xrightarrow{\sim} \widehat{\widehat{A}}$ индуцирует отождествление $\mathrm{H}_1(A, \mathbb{Z})$ с $\mathrm{H}_1(\widehat{\widehat{A}}, \mathbb{Z})$, при котором элементы l_i переходят в $-l_i^{**}$ (!). Знак минус происходит из-за того, что формы $c_1(\mathcal{P}_A)$ и $c_1(\mathcal{P}_{\widehat{A}})$ кососимметричны.

Замечание 5.2.3 ($k = \mathbb{C}$) Пусть $f : A \to B$ – некоторый гомоморфизм комплексных абелевых многообразий, и $\widehat{f} : \widehat{A} \to \widehat{B}$ – двойственный к нему. Зафиксируем базисы в гомологиях $\mathrm{H}_1(A, \mathbb{Z})$ и $\mathrm{H}_1(B, \mathbb{Z})$, и двойственные к ним базисы в первых гомологиях $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$. Обозначим через F и $\widehat{F}$ матрицы линейных отображений между первыми гомологиями, индуцируемые f и $\widehat{f}$. Тогда матрица $\widehat{F}$ транспонирована к F.

Рассмотрим гомоморфизм $f : A \to \widehat{A}$. Если теперь, используя κ, мы будем считать, что $\widehat{f}$ также является гомоморфизмом из A в $\widehat{A}$, то матрицы F и $\widehat{F}$ будут кососо-транспонированы друг другу, т.е. $\widehat{F} = -F^t$.

Расслоение Пуанкаре $\mathcal{P}$ предоставляет нам пример точной эквивалентности между производными категориями когерентных пучков двух, в общем случае неизоморфных, многообразий A и $\widehat{A}$. Рассмотрим проекции

$$A \xleftarrow{p} A \times \widehat{A} \xrightarrow{q} \widehat{A}$$

и функтор $\Phi_{\mathcal{P}} : \mathbf{D}^b(A) \longrightarrow \mathbf{D}^b(\widehat{A})$, определенный по формуле (2.2): $\Phi_{\mathcal{P}}(\cdot) = \mathbf{R}q_*(\mathcal{P} \otimes p^*(\cdot))$. Следующее предложение доказано в ([33]).

Предложение 5.2.4 ([33]) *Пусть $\mathcal{P}$ — расслоение Пуанкаре на $A \times \widehat{A}$. Тогда* *функтор* $\Phi_{\mathcal{P}} : \mathbf{D}^b(A) \longrightarrow \mathbf{D}^b(\widehat{A})$ *является точной эквивалентностью, и существует изоморфизм функторов*

$$\Psi_{\mathcal{P}} \circ \Phi_{\mathcal{P}} \cong (-1_A)^*[n],$$

где (-1_A) *– отображение взятия обратного.*

Замечание 5.2.5 В статье ([33]) это утверждение доказано для абелевых многообразий над алгебраически замкнутым полем. Однако оно верно и над произвольным полем, т.к. двойственное многообразие и расслоение Пуанкаре определено всегда над тем же самым полем (см. например [36]). А утверждение про эквивалентность будет следовать из Леммы 5.2.12 .

5.2.b. Для любой k-точки $a \in A$ существует автоморфизм сдвига $m(\cdot, a) : A \to A$, который мы будем обозначать T_a , и для k-точки $\alpha \in \widehat{A}$ обозначим через $\mathcal{P}_\alpha$ соответствующее линейное расслоение на A .

Рассмотрим теперь k-точку $(a, \alpha) \in A \times \widehat{A}$. С каждой такой точкой можно связать функтор из $\mathbf{D}^b(A)$ в себя по правилу:

$$\Phi_{(a,\alpha)}(\cdot) := T_{a*}(\cdot) \otimes \mathcal{P}_\alpha = T_{-a}^*(\cdot) \otimes \mathcal{P}_\alpha. \tag{5.1}$$

Функтор $\Phi_{(a,\alpha)}$ представляется пучком

$$S_{(a,\alpha)} = \mathcal{O}_{\Gamma_a} \otimes p_2^*(\mathcal{P}_\alpha) \tag{5.2}$$

на произведении $A \times A$, где Γ_a – это график автоморфизма сдвига T_a . Очевидно, что функтор $\Phi_{(a,\alpha)}$ является автоэквивалентностью.

Множество функторов $\Phi_{(a,\alpha)}$, параметризованных $A \times \widehat{A}$, можно соединить в один функтор из $\mathbf{D}^b(A \times \widehat{A})$ в $\mathbf{D}^b(A \times A)$, который будет

переводить структурный пучок точки $\mathcal{O}_{(a,\alpha)}$ в $S_{(a,\alpha)}$. (Заметим, что этим условием функтор не определяется однозначно, а только с точностью до умножения на линейное расслоение, поднятое с $A \times \widehat{A}$.)

Мы определим этот функтор $\Phi_{S_A} : \mathbf{D}^b(A \times \widehat{A}) \longrightarrow \mathbf{D}^b(A \times A)$ как композицию двух других.

Рассмотрим объект $\mathrm{P}_A = p_{14}^* \mathcal{O}_\Delta \otimes p_{23}^* \mathcal{P} \in \mathbf{D}^b((A \times \widehat{A}) \times (A \times A))$ и обозначим через $\mu_A : A \times A \longrightarrow A \times A$ морфизм, который переводит точку (a_1, a_2)

в $(a_1, m(a_1, a_2))$. У нас появляются два функтора:

$$\Phi_{\mathrm{P}_A} : \mathbf{D}^b(A \times \widehat{A}) \longrightarrow \mathbf{D}^b(A \times A), \qquad \mathbf{R}\mu_{A*} : \mathbf{D}^b(A \times A) \longrightarrow \mathbf{D}^b(A \times A).$$

Определение 5.2.6 *Функтор* Φ_{S_A} *есть композиция* $\mathbf{R}\mu_{A*} \circ \Phi_{\mathrm{P}_A}$.

Мы можем явно описать объект S_A на произведении $(A \times \widehat{A}) \times (A \times A)$, представляющий функтор Φ_{S_A}. Но так как явная формула нам в дальнейшем не понадобится, то мы приведем ее без доказательства.

Лемма 5.2.7 *Объект* S_A *на произведении* $(A \times \widehat{A}) \times (A \times A)$ *, представляющий функтор* Φ_{S_A}, *задается следующей формулой:*

$$S_A = (m \cdot p_{13}, p_4)^* \mathcal{O}_\Delta \otimes p_{23}^* \mathcal{P}_A.$$

Где $(m \cdot p_{13}, p_4)$ *– это морфизм на* $A \times A$, *переводящий точку* (a_1, α, a_3, a_4) *в точку* $(m(a_1, a_3), a_4)$.

Утверждение 5.2.8 *Функтор* Φ_{S_A} *является эквивалентностью и для каждой* k *-точки* $(a, \alpha) \in A \times \widehat{A}$

a) *структурный пучок точки* $\mathcal{O}_{(a,\alpha)}$ *переводит в пучок* $S_{(a,\alpha)}$, *определенный формулой (5.2);*

b) *линейное расслоение* $\mathcal{P}_{(\alpha,a)}$ *на* $A \times \widehat{A}$ *переводит в объект* $\mathcal{O}_{\{-a\} \times A} \otimes p_2^* \mathcal{P}_\alpha[n]$.

Доказательство. Функтор Φ_{S_A} является по определению композицией функторов $\mathbf{R}\mu_{A*}$ и Φ_{P_A} , которые есть эквивалентности: первый по очевидным соображениям, а для второго это следует из Утверждения 2.1.7 и Предложения 5.2.4 .

Функтор Φ_{P_A} переводит структурный пучок точки $\mathcal{O}_{(a,\alpha)}$ в пучок $\mathcal{O}_{A \times \{a\}} \otimes p_1^* \mathcal{P}_\alpha$. Далее функтор $\mathbf{R}\mu_{A*}$ посылает пучок $\mathcal{O}_{A \times \{a\}} \otimes p_1^* \mathcal{P}_\alpha$ в пучок $\mathcal{O}_{\Gamma_a} \otimes p_1^*(\mathcal{P}_\alpha)$.

Таким же образом, применяя Предложение 5.2.4 , находим, что функтор Φ_{P_A} переводит линейное расслоение $\mathcal{P}_{(\alpha,a)}$ в объект $\mathcal{O}_{\{-a\} \times A} \otimes p_2^* \mathcal{P}_\alpha[n]$, а функтор $\mathbf{R}\mu_{A*}$ посылает объект $\mathcal{O}_{\{-a\} \times A} \otimes p_2^* \mathcal{P}_\alpha[n]$ в себя. □

5.2.c. Предположим, что A и B – два абелевых многообразия, производные категории когерентных пучков которых эквивалентны. Зафиксируем некоторую эквивалентность. По Теореме 3.2.2 она представляется объектом на произведении. Таким образом, имеется объект $\mathcal{E} \in \mathbf{D}^b(A \times B)$ и эквивалентность $\Phi_{\mathcal{E}} : \mathbf{D}^b(A) \xrightarrow{\sim} \mathbf{D}^b(B)$.

Рассмотрим функтор

$$Ad_{\mathcal{E}} : \mathbf{D}^b(A \times A) \xrightarrow{\sim} \mathbf{D}^b(B \times B),$$

который определяется формулой (2.6) и является эквивалентностью. Рассмотрим композицию функторов $\Phi_{S_B}^{-1} \circ Ad_{\mathcal{E}} \circ \Phi_{S_A}$.

Определение 5.2.9 *Обозначим через* $\mathcal{J}(\mathcal{E})$ *объект, представляющий функтор*

$$\Phi_{S_B}^{-1} \circ Ad_{\mathcal{E}} \circ \Phi_{S_A}.$$

Таким образом, существует коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{D}^b(A \times \widehat{A}) & \xrightarrow{\Phi_{S_A}} & \mathbf{D}^b(A \times A) \\ {\scriptstyle \Phi_{\mathcal{J}(\mathcal{E})}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Ad_{\mathcal{E}}} \\ \mathbf{D}^b(B \times \widehat{B}) & \xrightarrow{\Phi_{S_B}} & \mathbf{D}^b(B \times B) \end{array} \qquad (5.3)$$

Следующая теорема позволяет описать объект $\mathcal{J}(\mathcal{E})$ и является основной при описании абелевых многообразий, обладающих эквивалентными производными категориями когерентных пучков.

Теорема 5.2.10 *Существует гомоморфизм абелевых многообразий* $f_{\mathcal{E}} : A \times \widehat{A} \longrightarrow B \times \widehat{B}$, *являющийся изоморфизмом, и линейное расслоение* $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ *на* $A \times \widehat{A}$ *такое, что объект* $\mathcal{J}(\mathcal{E})$ *изоморфен* $i_*(\mathcal{L}_{\mathcal{E}})$ *, где* i *– это вложение многообразия* $A \times \widehat{A}$ *в* $(A \times \widehat{A}) \times (B \times \widehat{B})$ *в качестве графика изоморфизма* $f_{\mathcal{E}}$ *.*

5.2.d. Прежде чем перейти к доказательству теоремы, мы сформулируем две леммы, которые позволят нам считать поле k алгебраически замкнутым. Обозначим через $\bar{k}$ алгебраическое замыкание k . Положим $\bar{X} := X \times_{Spec(k)} Spec(\bar{k})$ и обозначим через $\bar{\mathcal{F}}$ обратный образ $\mathcal{F}$ относительно морфизма $\bar{X} \longrightarrow X$.

Лемма 5.2.11 *Пусть* $\mathcal{F}$ *когерентный пучок на гладком многообразии* X *. Предположим, что существуют замкнутое подмногообразие* $j : Z \hookrightarrow \bar{X}$ *и обратимый пучок* $\mathcal{L}$ *на* Z *такой, что* $\bar{\mathcal{F}} \cong j_*\mathcal{L}$ *. Тогда существуют замкнутое подмногообразие* $i : Y \hookrightarrow X$ *и обратимый пучок* $\mathcal{M}$ *на* Y *такой, что* $\mathcal{F} \cong i_*\mathcal{M}$ *и* $j = \bar{i}$ *.*

Доказательство. Вопрос локальный, поэтому можно считать, что у нас имеется аффинное многообразие $X = Spec(A)$ и A-модуль M. Обозначим через $J \subset A$ аннулятор модуля M, а через $J' \subset \bar{A} = A \otimes_k \bar{k}$ аннулятор модуля $\bar{M} = M \otimes_k \bar{k}$. Пусть $\{e_i\}$ – базис поля $\bar{k}$ над k, тогда $\bar{M} = \oplus M e_i$ как модуль над A. Очевидно, что $J \otimes_k \bar{k} \subseteq J'$. Но, с другой стороны, если элемент $\sum a_i \otimes e_i \in \bar{A}$ принадлежит J', то $\sum a_i m \otimes e_i = 0$ для любого $m \in M$. И значит, каждый a_i принадлежит J. Таким образом, $J \otimes_k \bar{k} = J'$.

Из условия мы знаем, что $\bar{M}$ проективным модулем ранга 1 над алгеброй $\bar{B} := \bar{A}/J' = B \otimes_k \bar{k}$, где $B = A/J$, и $\bar{M} = M \otimes_B \bar{B}$. Теперь, так как $\bar{B}$ является строго плоской B-алгеброй, то M как B-модуль также проективный ранга 1. (см. например [19] (3.1.4)). $\square$

Следующая лемма говорит нам, что свойство функтора быть вполне строгим (эквивалентностью) стабильно относительно расширения полей.

Лемма 5.2.12 *Пусть X и Y – гладкие проективные многообразия над полем k, и пусть $\mathcal{E}$ - объект производной категории $\mathbf{D}^b(X \times Y)$. Рассмотрим расширение полей F/k и многообразия*

$$X' = X \underset{Spec(k)}{\times} Spec(F), \qquad Y' = Y \underset{Spec(k)}{\times} Spec(F).$$

Обозначим через $\mathcal{E}'$ поднятие объекта $\mathcal{E}$ в категорию $\mathbf{D}^b(X' \times Y')$. Тогда функтор $\Phi_{\mathcal{E}} : \mathbf{D}^b(X) \longrightarrow \mathbf{D}^b(Y)$ вполне строгий (эквивалентность), если и только если функтор $\Phi_{\mathcal{E}'} : \mathbf{D}^b(X') \longrightarrow \mathbf{D}^b(Y')$ является вполне строгим (эквивалентностью).

Доказательство. $\Rightarrow$ Как и раньше обозначим через ${\Phi_{\mathcal{E}}}^*$ левый сопряженный к функтору $\Phi_{\mathcal{E}}$. Если функтор $\Phi_{\mathcal{E}}$ является вполне строгим, тогда композиция $\Phi_{\mathcal{E}} \circ {\Phi_{\mathcal{E}}}^*$ есть тождественный функтор $\mathrm{id}_{\mathbf{D}^b(X)}$, который, как мы знаем, представляется структурным пучком диагонали $\mathcal{O}_\Delta$ в произведении $X \times X$. Следовательно, используя Предложение 2.1.2 и теорему о плоской замене базы, находим, что композиция $\Phi_{\mathcal{E}'} \circ {\Phi_{\mathcal{E}'}}^*$ также представляется структурным пучком диагонали $\mathcal{O}_{\Delta'}$, где Δ' — это диагональ в $X' \times X'$. И значит, функтор $\Phi_{\bar{\mathcal{E}}}$ также вполне строгий.

$\Leftarrow$ Рассмотрим композицию $\Phi_{\mathcal{E}} \circ {\Phi_{\mathcal{E}}}^*$. Она представляется некоторым объектом $\mathcal{J}$ на $X \times X$. Существует канонический морфизм $\phi : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{O}_\Delta$. Так как функтор $\Phi_{\bar{\mathcal{E}}}$ вполне строгий по предположению, то морфизм $\phi' : \mathcal{J}' \longrightarrow \mathcal{O}_{\Delta'}$ является изоморфизмом. Отсюда немедленно следует, что и сам ϕ есть изоморфизм. А значит, функтор $\Phi_{\mathcal{E}}$ вполне строгий.

Аналогично доказываются утверждения и про эквивалентность, которая следует из строгости и полноты сопряженного функтора. □

5.2.e. Доказательство Теоремы 5.2.10 . Пользуясь Леммами 5.2.11 и 5.2.12 , мы можем перейти к алгебраическому замыканию поля k .

Шаг 1. Обозначим через e и e' замкнутые точки многообразий $A\times\widehat{A}$ и соответственно $B\times\widehat{B}$, которые являются единицами групповых структур. Рассмотрим пучок небоскребов $\mathcal{O}_e$ и вычислим его образ относительно функтора $\Phi_{\mathcal{J}(\mathcal{E})}$. По определению, мы знаем, что

$$\Phi_{\mathcal{J}(\mathcal{E})} = \Phi_{S_B}^{-1}\circ Ad_{\mathcal{E}}\circ\Phi_{S_A}.$$

По Утверждению 5.2.8 функтор Φ_{S_A} переводит пучок $\mathcal{O}_e$ в структурный пучок диагонали $\mathcal{O}_{\Delta(A)}$ на $A\times A$. Так как структурный пучок диагонали представляет тождественный функтор, то из формулы (2.7) следует, что $Ad_{\mathcal{E}}(\mathcal{O}_{\Delta(A)})$ есть структурный пучок диагонали $\mathcal{O}_{\Delta(B)}$ на многообразии $B\times B$. А он в свою очередь переходит в структурный пучок $\mathcal{O}_{e'}$ под действием функтора $\Phi_{S_B}^{-1}$ по тому же Утверждению 5.2.8 .

Шаг 2. Таким образом, получаем, что

$$\mathcal{J}(\mathcal{E})\overset{\mathbf{L}}{\otimes}\mathcal{O}_{\{e\}\times(B\times\widehat{B})}\cong\mathcal{O}_{\{e\}\times\{e'\}}.$$

Из этого следует, что существует аффинная окрестность $U=Spec(R)$ точки e в топологии Зариского такая, что объект $\mathcal{J}':=\mathcal{J}(\mathcal{E})\mid_{U\times(B\times\widehat{B})}$ есть когерентный пучок с носителем, который пересекает слой $\{e\}\times(B\times\widehat{B})$ в точке $\{e\}\times\{e'\}$. Напомним, что носитель любого когерентного пучка является замкнутым подмножеством.

Рассмотрим теперь некоторую аффинную окрестность $V=Spec(S)$ точки e' в $B\times\widehat{B}$. Пересечение носителя пучка $\mathcal{J}'$ с дополнением $B\times\widehat{B}\setminus V$ является замкнутым подмножеством, проекция которого на $A\times\widehat{A}$ - замкнутое подмножество, не содержащее точку e .

Таким образом, уменьшая, если необходимо, U , мы можем считать что оно все еще аффинно, а носитель пучка $\mathcal{J}'$ содержится в $U\times V$. Это значит, что существует когерентный пучок $\mathcal{F}$ на $U \times V$ такой, что $j_*(\mathcal{F}) = \mathcal{J}'$, где j - это вложение $U \times V$ в $U \times (B \times \widehat{B})$. Обозначим через M конечно порожденный $R \otimes S$ -модуль, который соответствует пучку $\mathcal{F}$, то есть $\mathcal{F} = \widetilde{M}$. Кроме того, заметим, что M является конечнопорожденным R модулем, так как прямой образ при проекции когерентного пучка $\mathcal{J}' = j_* \mathcal{F}$ является когерентным пучком.

Пусть m – максимальный идеал в R , соответствующий точке e . Мы знаем, что

$$M \otimes_R R/m \cong R/m.$$

Значит, существует гомоморфизм R-модулей $\phi : R \longrightarrow M$, который после тензорного умножения на R/m становится изоморфизмом. Таким образом, носители когерентных пучков $\mathrm{Ker}\,\phi$ и $\mathrm{Coker}\,\phi$ не содержат точку e . Поэтому, заменяя U на меньшую аффинную окрестность точки e , которая не пересекается с носителями пучков $\mathrm{Ker}\,\phi$ и $\mathrm{Coker}\,\phi$, мы получаем, что ϕ есть изоморфизм. Следовательно, существует подсхема $X(U) \subset U \times (B \times \widehat{B})$ такая, что проекция $X(U) \longrightarrow U$ является изоморфизмом и

$$\mathcal{J}' = \mathcal{J}(\mathcal{E}) \mid_{U \times (B \times \widehat{B})} \cong \mathcal{O}_{X(U)}.$$

Шаг 3. Мы получили тем самым, что для любой замкнутой точки $(a, \alpha) \in U$

$$\Phi_{\mathcal{J}(\mathcal{E})}(\mathcal{O}_{(a,\alpha)}) \cong \mathcal{O}_{(b,\beta)}$$

для некоторой замкнутой точки $(b, \beta) \in B \times \widehat{B}$. Если мы теперь рассмотрим произвольную замкнутую точку $(a, \alpha) \in A \times \widehat{A}$, то ее всегда можно представить как сумму $(a, a') = (a_1, \alpha_1) + (a_2, \alpha_2)$, где точки $(a_1, \alpha_1), (a_2, \alpha_2)$ принадлежат U . Обозначим через (b_1, β_1) и (b_2, β_2) образы этих точек относительно функтора $\Phi_{\mathcal{J}(\mathcal{E})}$. Функтор Φ_{S_A}, как мы знаем, переводит структурный пучок $\mathcal{O}_{(a,\alpha)}$ в пучок $S_{(a,\alpha)}$. Обозначим через $\mathcal{G}$ объект $Ad_{\mathcal{E}}(S_{(a,\alpha)})$. Чтобы вычислить его воспользуемся соотношением (2.7). Мы имеем

$$\Phi_{\mathcal{G}} \cong \Phi_{\mathcal{E}} \circ \Phi_{(a,\alpha)} \circ \Phi_{\mathcal{E}}^{-1}.$$

Но функтор $\Phi_{(a,\alpha)}$, который по определению (5.1) есть $T_a^*(\cdot) \otimes \mathcal{P}_\alpha$, можно представить как композицию $\Phi_{(a_1,\alpha_1)} \Phi_{(a_2,\alpha_2)}$. Таким образом, получаем последовательность изоморфизмов

$$\Phi_{\mathcal{G}} \cong \Phi_{\mathcal{E}} \circ \Phi_{(a,\alpha)} \circ \Phi_{\mathcal{E}}^{-1} \cong \Phi_{\mathcal{E}} \circ \Phi_{(a_1,\alpha_1)} \circ \Phi_{\mathcal{E}}^{-1} \cong \Phi_{\mathcal{E}} \circ \Phi_{(a_2,\alpha_2)} \circ \Phi_{\mathcal{E}}^{-1} \cong \Phi_{(b_1,\beta_1)} \circ \Phi_{(b_2,\beta_2)} \cong \Phi_{(b,\beta)}$$

где $(b,\beta)=(b_1,\beta_1)+(b_2,\beta_2)$. И значит, объект $\mathcal{G}$ изоморфен $S_{(b,\beta)}$. Окончательно получаем, что

$$\Phi_{\mathcal{J}(\mathcal{E})}(\mathcal{O}_{(a,\alpha)})\cong\mathcal{O}_{(b,\beta)}$$

для любой замкнутой точки $(a,\alpha)\in A\times\widehat{A}$.

Теперь, повторяя процедуру Шага 2, мы можем для каждой замкнутой точки (a,a') найти некоторую окрестность W и подсхему $X(W)\subset W\times(B\times\widehat{B})$ такую, что проекция $X(W)\longrightarrow W$ является изоморфизмом, и $\mathcal{J}\mid_{W\times(B\times\widehat{B})}\cong\mathcal{O}_{X(W)}$.

Склеивая все эти окрестности, мы находим подмногообразие $i:X\hookrightarrow(A\times\widehat{A})\times(B\times\widehat{B})$ такое, что проекция $X\longrightarrow A\times\widehat{A}$ есть изоморфизм, а пучок $\mathcal{J}(\mathcal{E})$ изоморфен пучку $i_*\mathcal{L}$, где $\mathcal{L}$ — линейное расслоение на X . Подмногообразие X задает гомоморфизм из $A\times\widehat{A}$ в $B\times\widehat{B}$, который индуцирует эквивалентность производных категорий. Следовательно, этот гомоморфизм является изоморфизмом. $\square$

В частности, из Теоремы сразу следует, что если абелевы многообразия A и B имеют эквивалентные производные категории когерентных пучков, то многообразия $A\times\widehat{A}$ и $B\times\widehat{B}$ изоморфны. Ниже мы покажем, что этот изоморфизм должен удовлетворять некоторому дополнительному условию (см. Предложение 5.2.18).

Следствие 5.2.13 *Изоморфизм $f_{\mathcal{E}}$ переводит k-точку $(a,\alpha)\in A\times\widehat{A}$ в точку $(b,\beta)\in B\times\widehat{B}$ тогда и только тогда, когда эквивалентности*

$$\Phi_{(a,\alpha)}:\mathbf{D}^b(A)\xrightarrow{\sim}\mathbf{D}^b(A),\qquad \Phi_{(b,\beta)}:\mathbf{D}^b(B)\xrightarrow{\sim}\mathbf{D}^b(B),$$

определенные по формуле (5.1), связаны следующим соотношением:

$$\Phi_{(b,\beta)}\circ\Phi_{\mathcal{E}}\cong\Phi_{\mathcal{E}}\circ\Phi_{(a,\alpha)},$$

или в терминах объектов это значит, что

$$T_{b*}\mathcal{E}\otimes\mathcal{P}_\beta\cong T_{-a*}\mathcal{E}\otimes\mathcal{P}_\alpha=T_a^*\mathcal{E}\otimes\mathcal{P}_\alpha$$

Доказательство. По Теореме 5.2.10 функтор $\Phi_{\mathcal{J}(\mathcal{E})}$ переводит структурный пучок точки $\mathcal{O}_{(a,\alpha)}$ в структурный пучок точки $\mathcal{O}_{(b,\beta)}$, где $(b,\beta)=f_{\mathcal{E}}(a,\alpha)$. Из Утверждения 5.2.8 следует, что функтор Φ_{S_A} посылает пучок $\mathcal{O}_{(a,\alpha)}$ в $S_{(a,\alpha)}$. А пучок $S_{(a,\alpha)}$, в свою очередь, представляет функтор

$$\Phi_{(a,\alpha)}=T_{a*}(\cdot)\otimes\mathcal{P}_\alpha.$$

Теперь, используя диаграмму (5.3), мы видим, что при отображении $f_{\mathcal{E}}$ точка (a,α) переходит в точку (b,β) тогда и только тогда, когда $S_{(b,\beta)} \cong Ad_{\mathcal{E}}(S_{(a,\alpha)})$. Применяя формулу (2.7), находим, что $\Phi_{(b,\beta)} \cong \Phi_{\mathcal{E}} \circ \Phi_{(a,\alpha)} \circ \Phi_{\mathcal{E}}^{-1}$. □

5.2.f. В дальнейшем нам понадобится явная формула для объекта $\mathcal{J}(\mathcal{E})$ в частном случае, когда $A = B$ и эквивалентность $\Phi_{\mathcal{E}}$ есть $\Phi_{(a,\alpha)}$, определенная формулой (5.1).

Предложение 5.2.14 *Пусть $A = B$. Рассмотрим объект $S_{(a,\alpha)}$ на $A \times A$, который представляет эквивалентность $\Phi_{(a,\alpha)}$, определенную формулой (5.1). Тогда пучок $\mathcal{J}(S_{(a,\alpha)})$ есть $\Delta_* \mathcal{P}_{(\alpha,-a)}$, где Δ это диагональное вложение $A \times \widehat{A}$ в $(A \times \widehat{A}) \times (A \times \widehat{A})$ и $\mathcal{P}_{(\alpha,a)}$ линейное расслоение на $A \times \widehat{A}$ определенное в 5.2.1 .*

Доказательство. Как мы знаем из Утверждения 5.2.8 , функтор Φ_{S_A} посылает структурный пучок $\mathcal{O}_{(a',\alpha')}$ в пучок $S_{(a',\alpha')}$ на $A \times A$ (формула (5.2)). Далее функтор $Ad_{S_{(a,\alpha)}}$ переводит пучок $S_{(a',\alpha')}$ в себя, так как по формуле (2.7) мы знаем, что объект $Ad_{S_{(a,\alpha)}}(S_{(a',\alpha')})$ представляет функтор

$$\Phi_{(a,\alpha)} \circ \Phi_{(a',\alpha')} \circ \Phi_{(a,\alpha)}^{-1}.$$

Который, в свою очередь, изоморфен $\Phi_{(a',\alpha')}$, так как все такие функторы коммутируют друг с другом. Таким образом, мы получаем, что функтор, задаваемый пучком $\mathcal{J}(S_{(a,\alpha)})$ переводит структурный пучок любой точки в себя, и значит, это есть некоторое линейное расслоение L, сосредоточенное на диагонали.

Чтобы найти теперь линейное расслоение L , мы посмотрим, куда этот функтор переводит расслоение $\mathcal{P}_{(\alpha',a')}$. Снова применяя Утверждение 5.2.8 , видим, что функтор Φ_{S_A} переводит расслоение $\mathcal{P}_{(\alpha',a')}$ в объект $\mathcal{O}_{\{-a'\} \times A} \otimes p_2^*(\mathcal{P}_{\alpha'})[n]$. Нетрудно проверить, что далее этот объект под действием функтора $Ad_{S_{(a,\alpha)}}$ переходит в объект $\mathcal{O}_{\{-a'+a\} \times A} \otimes p_2^*(\mathcal{P}_{\alpha'+\alpha})[n]$. И, следовательно, расслоение $\mathcal{P}_{(\alpha',a')}$ под действием функтора, задаваемого пучком $\mathcal{J}(S_{(a,\alpha)})$, переходит в расслоение $\mathcal{P}_{(\alpha'+\alpha,a'-a)}$. То есть расслоение L изоморфно $\mathcal{P}_{(\alpha,-a)}$. □

5.2.g. Для абелевых многообразий A и B обозначим через $\mathcal{E}q(A,B)$ множество всех точных эквивалентностей с точностью до изоморфизма из категории $\mathbf{D}^b(A)$ в категорию $\mathbf{D}^b(B)$.

Давайте введем в рассмотрение два группоида $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{D}$ (т.е. категории в которых все морфизмы обратимы). Объекты обоих — это абелевы многообразия. Морфизмы в группоиде $\mathfrak{A}$ будут изоморфизмы между ними как алгебраическими группами. Морфизмы в $\mathfrak{B}$ — это точные эквивалентности между категориями когерентных пучков на абелевых многообразиях, то есть

$$\mathcal{M}or_{\mathfrak{A}}(A,\ B) := Iso(A,\ B),$$
$$\mathcal{M}or_{\mathfrak{D}}(A,\ B) := \mathcal{E}q(A,\ B).$$

По Теореме 5.2.10 имеется отображение из множества $\mathcal{E}q(A,B)$ в множество $Iso(A\times\widehat{A},\ B\times\widehat{B})$, которое сопоставляет эквивалентности $\Phi_{\mathcal{E}}$ изоморфизм $f_{\mathcal{E}}$. Рассмотрим отображение F из $\mathfrak{D}$ в $\mathfrak{A}$, которое сопоставляет абелеву многообразию A многообразие $A\times\widehat{A}$ и на морфизмах действует описанным выше способом.

Предложение 5.2.15 *Отображение* $F:\mathfrak{D}\longrightarrow\mathfrak{A}$ *является функтором.*

Доказательство. Чтобы доказать утверждение, надо только проверить, что F уважает композицию морфизмов. Рассмотрим три абелевых многообразия A,B,C. И пусть $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ — объекты категорий $\mathbf{D}^b(A\times B)$ и $\mathbf{D}^b(B\times C)$ соответственно такие, что функторы

$$\Phi_{\mathcal{E}}:\mathbf{D}^b(A)\longrightarrow\mathbf{D}^b(B),$$
$$\Phi_{\mathcal{F}}:\mathbf{D}^b(B)\longrightarrow\mathbf{D}^b(C)$$

являются эквивалентностями. Обозначим через $\mathcal{G}$ объект в $\mathbf{D}^b(A\times C)$, который представляет композицию этих функторов.

Соотношение (2.5) дает нам изоморфизм $Ad_{\mathcal{G}}\cong Ad_{\mathcal{F}}\circ Ad_{\mathcal{E}}$. И, следовательно, получаем, что

$$\Phi_{\mathcal{J}(\mathcal{F})}\circ\Phi_{\mathcal{J}(\mathcal{E})}\cong(\Phi_{S_A}^{-1}\circ Ad_{\mathcal{F}}\circ\Phi_{S_A})\circ(\Phi_{S_A}^{-1}\circ Ad_{\mathcal{E}}\circ\Phi_{S_A})\cong\Phi_{S_A}^{-1}\circ Ad_{\mathcal{G}}\circ\Phi_{S_A}\cong\Phi_{\mathcal{J}(\mathcal{G})}$$

По Теореме 5.2.10 все объекты $\mathcal{J}(\mathcal{E}),\mathcal{J}(\mathcal{F}),\mathcal{J}(\mathcal{G})$ являются линейными расслоениями, сосредоточенными на графиках изоморфизмов $f_{\mathcal{E}},f_{\mathcal{F}},f_{\mathcal{G}}$. Таким образом, получается равенство $f_{\mathcal{G}}=f_{\mathcal{F}}\cdot f_{\mathcal{E}}$. □

Следствие 5.2.16 *Пусть* A *— абелево многообразие и* $\Phi_{\mathcal{E}}$ *— автоэквивалентность производной категории* $\mathbf{D}^b(A)$. *Тогда соответствие* $\Phi_{\mathcal{E}}\mapsto f_{\mathcal{E}}$ *задает гомоморфизм групп*

$$\gamma_A:\mathrm{Auteq}\,\mathbf{D}^b(A)\longrightarrow\mathrm{Aut}\,(A\times\widehat{A}).$$

5.2.h. Таким образом, имеется функтор $F:\mathfrak{D}\longrightarrow\mathfrak{A}$. Наша дальнейшая цель – описать его. Для этого мы должны выяснить, какие элементы из $Iso(A\times\widehat{A},\ B\times\widehat{B})$ могут быть реализованы как $f_{\mathcal{E}}$ для некоторого $\mathcal{E}$, а также ответить на вопрос, когда для двух эквивалентностей $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ имеется равенство $f_{\mathcal{E}_1}=f_{\mathcal{E}_2}$.

Рассмотрим произвольный морфизм $f:A\times\widehat{A}\longrightarrow B\times\widehat{B}$. Удобно записать его в виде матрицы

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix},$$

где α — это морфизм из A в B, β — из $\widehat{A}$ в B, γ — из A в $\widehat{B}$, и δ — из $\widehat{A}$ в $\widehat{B}$. Каждый морфизм f определяет два других $\widehat{f}$ и $\tilde{f}$ из $B\times\widehat{B}$ в $A\times\widehat{A}$, имеющие следующие матричные формы:

$$\widehat{f}=\begin{pmatrix}\widehat{\delta} & \widehat{\beta}\\ \widehat{\gamma} & \widehat{\alpha}\end{pmatrix};\qquad \tilde{f}=\begin{pmatrix}\widehat{\delta} & -\widehat{\beta}\\ -\widehat{\gamma} & \widehat{\alpha}\end{pmatrix}.$$

Определим множество $U(A\times\widehat{A},\ B\times\widehat{B})$ как подмножество в $Iso(A\times\widehat{A},\ B\times\widehat{B})$, состоящее из таких f, что $\tilde{f}$ совпадает с обратным к f, т.е.

$$U(A\times\widehat{A},\ B\times\widehat{B}):=\left\{f\in Iso(A\times\widehat{A},\ B\times\widehat{B})\ \middle|\ \tilde{f}=f^{-1}\right\}.$$

Если $B=A$, то это множество будем обозначать $U(A\times\widehat{A})$. Отметим, что $U(A\times\widehat{A})$ является подгруппой в $\operatorname{Aut}(A\times\widehat{A})$.

Определение 5.2.17 *Назовем изоморфизм* $f:A\times\widehat{A}\xrightarrow{\sim}B\times\widehat{B}$ изометричным, *если он принадлежит* $U(A\times\widehat{A},\ B\times\widehat{B})$.

Предложение 5.2.18 *Для всякой эквивалентности* $\Phi_{\mathcal{E}}:\mathbf{D}^b(A)\xrightarrow{\sim}\mathbf{D}^b(B)$ *изоморфизм* $f_{\mathcal{E}}$ *является изометричным.*

Доказательство. Переходя к алгебраическому замыканию, если это необходимо, мы можем предполагать, что поле k алгебраически замкнуто. Для проверки равенства $\tilde{f}_{\mathcal{E}}=f_{\mathcal{E}}^{-1}$ достаточно установить совпадение этих морфизмов на замкнутых точках. Пусть $f_{\mathcal{E}}$ переводит точку $(a,\alpha)\in A\times\widehat{A}$ в точку $(b,\beta)\in B\times\widehat{B}$. Мы должны показать, что $\tilde{f}_{\mathcal{E}}(b,\beta)=(a,\alpha)$ или, что то же самое, показать, что $\widehat{f}(-b,\beta)=(-a,\alpha)$.

Изоморфизм $f_{\mathcal{E}}$ задается абелевым подмногообразием $X \hookrightarrow A \times \widehat{A} \times B \times \widehat{B}$. Следовательно, мы должны проверить, что $\mathcal{P}_{(0,0,\beta,-b)} \otimes \mathcal{O}_X \cong \mathcal{P}_{(\alpha,-a,0,0)} \otimes \mathcal{O}_X$. Или, что эквивалентно, показать, что пучок

$$\mathcal{J}' := \mathcal{P}_{(-\alpha,a,\beta,-b)} \otimes \mathcal{J}(\mathcal{E})$$

изоморфен пучку $\mathcal{J}(\mathcal{E})$.

По Предложению 5.2.14 функтор, задаваемый пучком $\mathcal{J}'$, является композицией функторов, представленных объектами $\mathcal{J}(S_{(-a,-\alpha)})$, $\mathcal{J}(\mathcal{E})$ и $\mathcal{J}(S_{(b,\beta)})$. Таким образом, $\mathcal{J}'$ совпадает с $\mathcal{J}(\mathcal{E}')$, где $\mathcal{E}'$ объект из $\mathbf{D}^b(A \times B)$, который представляет функтор

$$\Phi_{(b,\beta)} \circ \Phi_{\mathcal{E}} \circ \Phi_{(-a,-\alpha)}.$$

А эта композиция по Следствию 5.2.13 изоморфна функтору $\Phi_{\mathcal{E}}$. То есть объект $\mathcal{E}'$ изоморфен $\mathcal{E}$, и значит $\mathcal{J}' = \mathcal{J}(\mathcal{E}') \cong \mathcal{J}(\mathcal{E})$. □

Как следствие Теоремы 5.2.10 и Предложения 5.2.18 получаем следующий результат

Теорема 5.2.19 *Пусть A и B – два абелевых многообразия над полем k . Если производные категории когерентных пучков $\mathbf{D}^b(A)$ и $\mathbf{D}^b(B)$ эквивалентны как триангулированные категории, тогда между $A \times \widehat{A}$ и $B \times \widehat{B}$ существует изометричный изоморфизм.*

Обратное утверждение также верно для абелевых многообразий над алгебраически замкнутым полем характеристики 0 и доказано в [42]. В параграфе 5.4 мы дадим другое доказательство этого факта.

Следствие 5.2.20 *Для любого абелева многообразия A существует только конечное число неизоморфных абелевых многообразий, производные категории когерентных пучков которых эквивалентны категории $\mathbf{D}^b(A)$ (как триангулированные категории).*

Доказательство. В статье [29] доказано, что для каждого абелева многообразия Z существует с точностью до изоморфизма только конечное число абелевых многообразий, допускающих вложение в Z в качестве абелева подмногообразия. Применяя это утверждение к $Z = A \times \widehat{A}$ и используя Теорему 5.2.19 , получаем требуемый результат. □

5.2.i. В заключении этого параграфа хотелось бы пояснить, почему элементы множества $U(A\times\widehat{A},\ B\times\widehat{B})$ мы назвали изометричными. Предположим, что поле k есть поле комплексных чисел. Обозначим через $\mathit{\Gamma}_A$ и $\mathit{\Gamma}_B$ решетки первых гомологий $\mathrm{H}_1(A,\ \mathbb{Z})$ и $\mathrm{H}_1(B,\ \mathbb{Z})$ соответственно.

Любая решетка вида $\mathit{\Gamma}\oplus\mathit{\Gamma}^*$ имеет каноническую симметрическую билинейную форму

$$Q((x,l),(y,m)) = l(y)+m(x)$$

Обозначим через Q_A и Q_B соответствующие симметрические билинейные формы на $\mathit{\Lambda}_A := \mathrm{H}_1(A\times\widehat{A},\ \mathbb{Z})$ и $\mathit{\Lambda}_B := \mathrm{H}_1(B\times\widehat{B},\ \mathbb{Z})$.

Множество гомоморфизмов из $A\times\widehat{A}$ в $B\times\widehat{B}$ является подмножеством в $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathit{\Lambda}_A,\mathit{\Lambda}_B)$. И в этих терминах мы можем описать элементы из $U(A\times\widehat{A},\ B\times\widehat{B})$ следующим образом.

Предложение 5.2.21 *Изоморфизм* $f: A\times\widehat{A}\longrightarrow B\times\widehat{B}$ *принадлежит множеству* $U(A\times\widehat{A}; B\times\widehat{B})$ *тогда и только тогда, когда он задает изометрию решеток* $(\mathit{\Lambda}_A, Q_A)$ *и* $(\mathit{\Lambda}_B, Q_B)$ *, то есть*

$$F^t Q_B F = Q_A,$$

где $F:\mathit{\Lambda}_A\longrightarrow\mathit{\Lambda}_B$ *– отображение на первых гомологиях, индуцированное* f.

Доказательство этого Предложения есть прямое матричное вычисление с учетом Замечания 5.2.3 .

5.3 Объекты, представляющие эквивалентности, и группы автоэквивалентностей.

5.3.a. Из Предложений 5.2.15 и 5.2.18 следует существование гомоморфизма из группы точных автоэквивалентностей $\mathrm{Auteq}\,\mathbf{D}^b(A)$ в группу изометричных автоморфизмов $U(A\times\widehat{A})$. В этом параграфе мы опишем ядро этого гомоморфизма. Нам уже известно из Предложения 5.2.14 , что все эквивалентности $\Phi_{(a,\alpha)}[n]$ (см. (5.1)) принадлежат ядру. Мы покажем, что они в точности и составляют это ядро. Для доказательства этого факта нам понадобится утверждение, которое само по себе представляет интерес. Мы покажем, что в случае абелевых многообразий, если функтор $\Phi_{\mathcal{E}}$ является эквивалентностью, то объект $\mathcal{E}$ на самом деле есть пучок на произведении, с точностью до сдвига в производной категории. Этот утверждение, специфическое для абелевых многообразий, нарушается в других случаях, например для K3 поверхностей.

Лемма 5.3.1 *Пусть $\mathcal{E}$ – объект на произведении $A \times B$, который задает эквивалентность $\Phi_{\mathcal{E}} : \mathbf{D}^b(A) \longrightarrow \mathbf{D}^b(B)$. Рассмотрим проекцию $q : (A \times \widehat{A}) \times (B \times \widehat{B}) \longrightarrow A \times B$ и обозначим через K прямой образ $\mathbf{R}q_* \mathcal{J}(\mathcal{E})$, где $\mathcal{J}(\mathcal{E})$ – объект определенный в 5.2.9 . Тогда K изоморфен объекту $\mathcal{E} \otimes (\mathcal{E}^\vee|_{(0,0)})$, где $\mathcal{E}^\vee|_{(0,0)}$ – обозначение для комплекса векторных пространств, который есть обратный образ объекта $\mathbf{R}^{\cdot}\underline{\mathcal{H}om}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{A\times B})$ при вложении точки $(0,0)$ в абелево многообразие $A \times B$.*

Доказательство. Рассмотрим абелево многообразие

$$Z = (A \times \widehat{A}) \times (A \times A) \times (B \times B) \times (B \times \widehat{B})$$

и объект

$$H = p_{1234}^* S_A \otimes p_{35}^* \mathcal{E}^\vee[n] \otimes p_{46}^* \mathcal{E} \otimes p_{5678}^* S_B^\vee[2n]$$

Из Предложения 2.1.2 о композиции функторов и диаграммы (5.3) мы знаем, что $\mathcal{J}(\mathcal{E}) \cong p_{1278*} H$, и значит объект K есть $p_{17*} H$. Чтобы вычислить последний, мы сначала рассмотрим проекцию Z на

$$V = A \times (A \times A) \times (B \times B) \times B$$

и обозначим ее через v . Теперь, чтобы вычислить $v_* H$, мы вспомним, что функтор Φ_{S_A} – это композиция Φ_{P_A} и $\mathbf{R}\mu_{A*}$, где

$$\mathrm{P}_A = p_{14}^* \mathcal{O}_\Delta \otimes p_{23}^* \mathcal{P} \in \mathbf{D}^b((A \times \widehat{A}) \times (A \times A)).$$

Легко видеть, что $p_{134*}\mathrm{P}_A \cong \mathcal{O}_{T_A}[-n]$, где $T \subset A \times A \times A$ подмногообразие, изоморфное A и состоящее из точек $(a, 0, a)$. Далее, учитывая, что $\mu_A(a_1, a_2) = (a_1, m(a_1, a_2))$, мы находим, что $p_{134*} S_A$ также изоморфен $\mathcal{O}_{T_A}[-n]$. Аналогично, можно проверить, что $p_{134*} S_B^\vee[2n] = \mathcal{O}_{T_B}$.

Таким образом, имеем, что

$$v_* H \cong p_{123}^* \mathcal{O}_{T_A} \otimes p_{24}^* \mathcal{E}^\vee \otimes p_{35}^* \mathcal{E} \otimes p_{456}^* \mathcal{O}_{T_B}$$

на V . Рассмотрим вложение

$$j : A\times A\times B\times B \longrightarrow V, \qquad (a_1,a_2,b_1,b_2)\mapsto (a_1,0,a_2,0,b_1,b_2).$$

Объект v_*H изоморфен $j_*\mathcal{M}$, где

$$\mathcal{M} = (\mathcal{E}^\vee|_{(0,0)})\otimes p_{12}^*\mathcal{O}_{\Delta_A}\otimes p_{23}^*\mathcal{E}\otimes p_{34}^*\mathcal{O}_{\Delta_B}.$$

И окончательно получаем, что $K\cong p_{14*}\mathcal{M}\cong (\mathcal{E}^\vee|_{(0,0)})\otimes\mathcal{E}.$ □

Предложение 5.3.2 *Пусть A и B – абелевы многообразия, и $\mathcal{E}$ – объект категории $\mathbf{D}^b(A\times B)$ такой, что функтор $\Phi_{\mathcal{E}} : \mathbf{D}^b(A) \xrightarrow{\sim} \mathbf{D}^b(B)$ есть точная эквивалентность. Тогда $\mathcal{E}$ имеет только одну нетривиальную когомологию, т.е. он изоморфен объекту $\mathcal{F}[n]$, где $\mathcal{F}$ является пучком на $A\times B$.*

Доказательство. Рассмотрим проекцию

$$q : (A\times\widehat{A})\times(B\times\widehat{B})\longrightarrow A\times B$$

и обозначим через q' ее ограничение на абелево подмногообразие X , которое есть носитель пучка $\mathcal{J}(\mathcal{E})$ и график изоморфизма $f_{\mathcal{E}}$. По Теореме 5.2.10 пучок $\mathcal{J}(\mathcal{E})$ есть $i_*(L)$, где L линейное расслоение на X .

Обозначим через K объект $\mathbf{R}^{\cdot}q_*\mathcal{J}(\mathcal{E}) = \mathbf{R}^{\cdot}q'_*L$. Морфизм q' является гомоморфизмом абелевых многообразий. Пусть d – это размерность $\mathrm{Ker}\,(q')$. Тогда $\dim\mathrm{Im}\,(q') = 2n-d$, и значит, пучки когомологий $H^j(K)$ тривиальны для $j\notin[0,d]$.

С другой стороны, по Лемме 5.3.1 объект K изоморфен $\mathcal{E}\otimes(\mathcal{E}^\vee\,|_{(0,0)})$.

Сдвигая, если необходимо, объект $\mathcal{E}$ в производной категории, мы можем предполагать, что самая правая ненулевая когомология $\mathcal{E}$ есть $H^0(\mathcal{E})$. Пусть $H^{-i}(\mathcal{E}),\ i\geq 0,$ – это крайняя слева ненулевая когомология $\mathcal{E}$, а $H^k(\mathcal{E}^\vee)$ – старшая ненулевая когомология объекта $\mathcal{E}^\vee$. Заменяя, если необходимо, $\mathcal{E}$ на $T^*_{(a,b)}\mathcal{E}$, мы можем считать, что точка $(0,0)$ принадлежит носителю пучка $H^k(\mathcal{E}^\vee)$. Так как носитель $\mathcal{E}$ совпадает с носителем K , то носители всех пучков когомологий $\mathcal{E}$ принадлежат $\mathrm{Im}\,(q')$. В частности, мы имеем $\mathrm{codim}\ \mathrm{Supp}\,H^{-i}(\mathcal{E})\geq d$. Следовательно, все когомологии объекта $(H^{-i}(\mathcal{E}))^\vee[-i]$ степени меньшей $i{+}d$ тривиальны.

Канонический морфизм $H^{-i}(\mathcal{E})[i]\longrightarrow\mathcal{E}$ индуцирует нетривиальный морфизм

$$\mathcal{E}^\vee\longrightarrow(H^{-i}(\mathcal{E}))^\vee[-i].$$

Так как номера нетривиальных когомологий второго объекта принадлежат лучу $[i+d, \infty)$, мы получаем, что $k \geq i+d$, где $H^k(\mathcal{E}^\vee)$, как и раньше, – старшая ненулевая когомология $\mathcal{E}^\vee$. Таким образом, получаем, что объект

$$K = \mathcal{E}^\vee \mid_{(0,0)} \otimes \mathcal{E} \tag{5.4}$$

имеет нетривиальную когомологию с тем же самым номером $k \geq i+d$. С другой стороны, мы уже знаем, что все пучки когомологий $H^j(K)$ тривиальны для $j \notin [0, d]$. Это возможно только при условии $i = 0$. И значит, объект $\mathcal{E}$ имеет только одну нетривиальную когомологию с номером 0 , следовательно, изоморфен пучку. $\square$

5.3.b. Рассмотрим сейчас случай $B \cong A$. Пусть $\mathcal{E}$ – пучок на $A \times A$ такой, что $\Phi_{\mathcal{E}}$ является автоэквивалентностью. Мы хотим описать все такие $\mathcal{E}$, для которых $f_{\mathcal{E}}$ тождественное отображение, т.е. его график X является диагональю в $(A \times \widehat{A}) \times (A \times \widehat{A})$. Таким образом, мы получаем, что объект

$$K = \mathcal{E}^\vee \mid_{(0,0)} \otimes \mathcal{E} = \mathbf{R}^{\cdot} q_* \mathcal{J}(\mathcal{E})$$

имеет вид $\Delta_*(\mathcal{M})$, где $\mathcal{M}$ – объект на A , а $\Delta : A \longrightarrow A \times A$ – диагональное вложение.

В начале предположим, что точка $(0,0)$ принадлежит носителю пучка $\mathcal{E}$. Следовательно, $\mathcal{E}^\vee \mid_{(0,0)}$ является нетривиальным комплексом векторных пространств. Тогда условие $K = \Delta_*(\mathcal{M})$ влечет существование пучка E на A такого, что $\mathcal{E} \cong \Delta_*(E)$. Следовательно, $\Phi_{\mathcal{E}}(\cdot) \cong E \otimes (\cdot)$. Так как $\Phi_{\mathcal{E}}$ – автоэквивалентность, то E является линейным расслоением. Нетрудно проверить, что условие $f_{\mathcal{E}} = \mathrm{id}$ может выполнятся только если $E \in \mathrm{Pic}^0(A)$.

Если точка $(0,0)$ не принадлежит $\mathrm{Supp}\, \mathcal{E}$, мы можем заменить $\mathcal{E}$ на пучок $\mathcal{E}' := T_{(a_1,a_2)*}\mathcal{E}$ так что его носитель уже содержит $(0,0)$. Из Предложения 5.2.14 следует, что $f_{\mathcal{E}'} = f_{\mathcal{E}}$. Как было показано выше, имеется изоморфизм $\mathcal{E}' \cong \Delta_*(E')$, где $E' \in \mathrm{Pic}^0(A)$. Следовательно, $\mathcal{E} \cong T_{(a_1-a_2,0)*}\Delta_*(E')$. Таким образом, мы получаем следующее следствие.

Предложение 5.3.3 *Пусть A – абелево многообразие. Тогда ядро гомоморфизма*

$$\gamma_A : \mathrm{Auteq}\, \mathbf{D}^b(A) \longrightarrow U(A \times \widehat{A})$$

состоит из автоэквивалентностей вида $\Phi_{(a,\alpha)}[i] = T_{a*}(\cdot)\otimes\mathcal{P}_\alpha[i]$ *и, следовательно, изоморфно группе* $\mathbb{Z}\oplus(A\times\widehat{A})_k$ *, где* $(A\times\widehat{A})_k$ *– группа* k *-точек абелева многообразия* $A\times\widehat{A}$ *.*

Следствие 5.3.4 *Пусть* A *и* B *– два абелевых многообразия, а* $\mathcal{E}_1$ *и* $\mathcal{E}_2$ *– объекты на произведении* $A\times B$ *, которые задают эквивалентности между производными категориями когерентных пучков. Тогда, если* $f_{\mathcal{E}_1} = f_{\mathcal{E}_2}$ *, то*

$$\mathcal{E}_2 \cong T_{a*}\mathcal{E}_1\otimes\mathcal{P}_\alpha[i]$$

для некоторой k *-точки* $(a,\alpha)\in A\times\widehat{A}$ *.*

5.4 Полуоднородные векторные расслоения.

5.4.a. В предыдущих параграфах мы показали, что эквивалентность $\Phi_{\mathcal{E}}$ из $\mathbf{D}^b(A)$ в $\mathbf{D}^b(B)$ индуцирует изометричный изоморфизм многообразий $A\times\widehat{A}$ и $B\times\widehat{B}$. В этом параграфе мы предполагаем, что поле k алгебраически замкнуто и $\mathrm{char}\,(k)=0$. И в этих предположениях, используя технику статьи [34] и результаты из [9], мы покажем, что каждый изометричный изоморфизм $f: A\times\widehat{A}\longrightarrow B\times\widehat{B}$ может быть реализован таким образом. Тот факт, что существование изометричного изоморфизма между многообразиями $A\times\widehat{A}$ и $B\times\widehat{B}$ влечет эквивалентность производных категорий $\mathbf{D}^b(A)$ и $\mathbf{D}^b(B)$, был доказан в статье [42]. Мы, таким образом, даем другое доказательство этого результата.

В начале напомним, что любое линейное расслоение $\mathcal{L}$ на абелевом многообразии D дает отображение $\phi_{\mathcal{L}}$ из D в $\widehat{D}$, которое посылает точку d в точку, соответствующую расслоению $T_d^*\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}^{-1}\in\mathrm{Pic}^0(D)$. Это соответствие задает вложение $\mathrm{NS}(D)$ в $\mathrm{Hom}(D,\widehat{D})$. Более того, известно, что отображение $\phi: D\longrightarrow\widehat{D}$ принадлежит образу $\mathrm{NS}(D)$ тогда и только тогда, когда $\widehat{\phi}=\phi$.

Полуоднородные расслоения на абелевом многообразии позволяют обобщить описанный выше феномен следующим образом. С каждым элементом из $\mathrm{NS}(D)\otimes\mathbb{Q}$ можно связать некоторое соответствие на $D\times\widehat{D}$, и любое такое соответствие получается из полуоднородного расслоения (см. Предложение 5.4.6 и Лемму 5.2.13 ниже).

В начале напомним определения однородных и полуоднородных расслоений на абелевых многообразиях и некоторые факты про них.

Определение 5.4.1 *Векторное расслоение* $\mathcal{E}$ *на абелевом многообразии* D *называется* однородным, *если* $T_d^*(\mathcal{E}) \cong \mathcal{E}$ *для каждой точки* $d \in D$.

Определение 5.4.2 *Векторное расслоение* $\mathcal{F}$ *на абелевом многообразии* D *называется* унипотентным, *если существует фильтрация*

$$0 = \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_n = \mathcal{F}$$

такая, что $\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i-1} \cong \mathcal{O}_D$ *для всех* $i = 1, ..., n$.

Следующее предложение дает характеризацию однородных векторных расслоений.

Предложение 5.4.3 [32], [34] *Пусть* $\mathcal{E}$ *– векторное расслоение на абелевом многообразии* D *. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) $\mathcal{E}$ *– однородное,*

(ii) *существуют линейные расслоения* $\mathcal{P}_i \in \mathrm{Pic}^0(D)$ *и унипотентные расслоения* $\mathcal{F}_i$ *такие, что* $\mathcal{E} \cong \bigoplus\limits_i (\mathcal{F}_i \otimes \mathcal{P}_i)$.

Определение 5.4.4 *Векторное расслоение* $\mathcal{E}$ *на абелевом многообразии* D *называется* полуоднородным, *если для каждой точки* $d \in D$ *существует линейное расслоение* $\mathcal{L}$ *на* D *такое, что* $T_d^*(\mathcal{E}) \cong \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}$ *. (Отметим, что* $\mathcal{L}$ *в этом случае принадлежит* $\mathrm{Pic}^0(D)$).

Напомним, что векторное расслоение на многообразии называется простым, если его алгебра эндоморфизмов совпадает с полем k .

Следующее утверждение доказано в [34].

Предложение 5.4.5 ([34], Th.5.8.) *Пусть* $\mathcal{E}$ *– простое векторное расслоение на абелевом многообразии* D *. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) $\dim \mathrm{H}^j(D, \mathcal{E}nd(\mathcal{E})) = \binom{n}{j}$ *для любого* $j = 0, ..., n,$

(2) $\mathcal{E}$ *– полуоднородное расслоение,*

(3) $\mathcal{E}nd(\mathcal{E})$ *– однородное расслоение,*

(4) *существуют изогения* $\pi : Y \longrightarrow D$ *и линейное расслоение* $\mathcal{L}$ *на* Y *такие, что* $\mathcal{E} \cong \pi_*(\mathcal{L})$.

Пусть $\mathcal{E}$ будет векторное расслоение на абелевом многообразии D . Обозначим через $\mu(\mathcal{E})$ класс эквивалентности $\frac{det(\mathcal{E})}{r(\mathcal{E})}$ в $\mathrm{NS}(D)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$.

С любым элементом $\mu=\frac{[\mathcal{L}]}{l}\in \mathrm{NS}(D)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$, и значит, с любым расслоением $\mathcal{E}$, мы можем связать некоторое соответствие $\Phi_\mu\subset D\times\widehat{D}$, заданное по правилу $\Phi_\mu=\mathrm{Im}\left[D\stackrel{(l,\phi_{\mathcal{L}})}{\longrightarrow}D\times\widehat{D}\right]$. Где $\phi_{\mathcal{L}}$ – хорошо известное отображение из D в $\widehat{D}$, которое посылает точку d в точку, соответствующую расслоению $T_d^*\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}^{-1}\in \mathrm{Pic}^0(D)$. Обозначим через q_1 и q_2 проекции Φ_μ на D и $\widehat{D}$ соответственно. В частном случае, когда расслоение является линейным расслоением $\mathcal{L}$, мы получаем график самого отображения $\phi_{\mathcal{L}}:D\longrightarrow\widehat{D}$.

В работе [34] дается полное описание всех простых полуоднородных расслоений.

Предложение 5.4.6 ([34], Th.7.10.) *Пусть* $\mu=\frac{[\mathcal{L}]}{l}$ *, где* $[\mathcal{L}]$ *– это класс эквивалентности расслоения* $\mathcal{L}$ *в* $\mathrm{NS}(D)$ *и* l *некоторое положительное целое число. Тогда*

(1) *Существует простое полуоднородное векторное расслоение* E *с наклоном* $\mu(\mathcal{E})=\mu$*.*

(2) *Всякое простое полуоднородное векторное расслоение* $\mathcal{E}'$ *с наклоном* $\mu(\mathcal{E}')=\mu$ *имеет вид* $\mathcal{E}\otimes\mathcal{M}$ *для некоторого линейного расслоения* $\mathcal{M}\in \mathrm{Pic}^0(D)$.

(3) *Выполнены равенства* $r(\mathcal{E})^2=\deg(q_1)$, *и* $\chi(\mathcal{E})^2=\deg(q_2)$.

Следующее утверждение позволяет охарактеризовать все полуоднородные векторные расслоения в терминах простых расслоений.

Предложение 5.4.7 ([34], Pr.6.15, 6.16) *Всякое полуоднородное векторное расслоение* $\mathcal{F}$ *с наклоном* μ *имеет фильтрацию*

$$0=\mathcal{F}_0\subset\mathcal{F}_1\subset\cdots\subset\mathcal{F}_n=\mathcal{F}$$

такую, что $\mathcal{E}_i=\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i-1}$ *простые полуоднородные векторные расслоения с тем же самым наклоном* μ *. И всякое простое полуоднородное расслоение стабильно.*

Следующие две леммы про полуоднородные расслоения, которые являются прямыми следствиями предыдущих утверждений, будут полезны нам в дальнейшем.

Лемма 5.4.8 *Два простых полуоднородных расслоения $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ с одним и тем же наклоном μ либо изоморфны, либо ортогональны друг другу, т.е. либо $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$, либо*

$$\mathrm{Ext}^i(\mathcal{E}_1,\ \mathcal{E}_2) = 0, \qquad \mathrm{Ext}^i(\mathcal{E}_2,\ \mathcal{E}_1) = 0$$

для всех i .

Доказательство. Из Предложения 5.4.6 следует, что $\mathcal{E}_2 \cong \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{M}$, и, следовательно, $\underline{\mathcal{H}om}(\mathcal{E}_1,\ \mathcal{E}_2)$ является однородным расслоением. Всякое однородное расслоение по Предложению 5.4.3 представляется в виде суммы унипотентных расслоений, подкрученных на линейные из $\mathrm{Pic}^0(D)$. Поэтому, либо все когомологии $\underline{\mathcal{H}om}(\mathcal{E}_1,\ \mathcal{E}_2)$ равны нулю, и значит, расслоения $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ ортогональны, либо у $\underline{\mathcal{H}om}(\mathcal{E}_1,\ \mathcal{E}_2)$ существует ненулевое сечение. В последнем случае получаем ненулевой гомоморфизм из $\mathcal{E}_1$ в $\mathcal{E}_2$. Но эти два расслоения стабильны и имеют одинаковый наклон. Значит, любой ненулевой гомоморфизм на самом деле является изоморфизмом. $\square$

Лемма 5.4.9 *Пусть $\mathcal{E}$ – простое полуоднородное векторное расслоение на абелевом многообразии D . Тогда $T_d^*(\mathcal{E}) \cong \mathcal{E} \otimes \mathcal{P}_\delta$, если и только если $(d, \delta) \in \Phi_\mu$.*

Доказательство. Давайте в начале покажем, что для каждой точки $(d, \delta) \in \Phi_\mu$ имеется изоморфизм $T_d^*(\mathcal{E}) \cong \mathcal{E} \otimes \mathcal{P}_\delta$. Действительно, положим $l = r(\mathcal{E})$ и $\mathcal{L} = det(\mathcal{E})$. Мы знаем, что по определению Φ_μ можно записать $(d, \delta) = (lx, \phi_{\mathcal{L}}(x))$ для некоторой точки $x \in D$. Так как $\mathcal{E}$ полуоднородно, найдется линейное расслоение $\mathcal{M} \in \mathrm{Pic}^0(D)$ такое, что

$$T_x^*(\mathcal{E}) \cong \mathcal{E} \otimes \mathcal{M}. \tag{5.5}$$

Сравнивая детерминанты, получаем равенство $T_x^*(\mathcal{L}) \cong \mathcal{L} \otimes \mathcal{M}^{\otimes l}$. По определению отображения $\phi_{\mathcal{L}}$, это значит, что $\mathcal{P}_{\phi_{\mathcal{L}}(x)} = \mathcal{M}^{\otimes l}$. С другой стороны, итерируя равенство (5.5) l -раз, получаем

$$T_{lx}^*(\mathcal{E}) \cong \mathcal{E} \otimes \mathcal{M}^{\otimes l} = \mathcal{E} \otimes \mathcal{P}_{\phi_{\mathcal{L}}(x)}.$$

И, следовательно, $T_d^*(\mathcal{E}) \cong \mathcal{E} \otimes \mathcal{P}_\delta$, так как $(d, \delta) = (lx, \phi_{\mathcal{L}}(x))$.

В обратную сторону. Давайте введем подгруппу $\Sigma^0(\mathcal{E}) \subset \widehat{D},$ заданную условием

$$\Sigma^0(\mathcal{E}) := \{\delta \in \widehat{D} \ \mid \ \mathcal{E} \otimes \mathcal{P}_\delta \cong \mathcal{E}\}. \tag{5.6}$$

Так как $\mathcal{E}$ полуоднородно, то расслоение $\underline{\mathcal{E}nd}(\mathcal{E})$ однородно по Предложению 5.4.5 . Таким образом, $\underline{\mathcal{E}nd}(\mathcal{E})$ можно представить как сумму $\bigoplus\limits_i (\mathcal{F}_i \otimes \mathcal{P}_i)$, где все $\mathcal{F}_i$

унипотентны. Следовательно, $\mathrm{H}^0(\underline{\mathcal{E}nd}(\mathcal{E}) \otimes \mathcal{P}) \neq 0$ не более чем для r^2 линейных расслоений $\mathcal{P} \in \mathrm{Pic}^0(D)$. То есть порядок группы $\Sigma^0(\mathcal{E})$ не больше r^2 . С другой стороны мы знаем, что $q_2(\mathrm{Ker}\,(q_1)) \subset \Sigma^0(\mathcal{E})$. Следовательно, получаем, что $\mathrm{ord}\, \Sigma^0(\mathcal{E}) = r^2$ и $q_2(\mathrm{Ker}\,(q_1)) = \Sigma^0(\mathcal{E})$.

Предположим теперь, что $T_d^*(\mathcal{E}) \cong \mathcal{E} \otimes \mathcal{P}_\delta$ для некоторой точки $(d, \delta) \in D \times \widehat{D}$. Рассмотрим некоторую точку $\delta' \in \widehat{D}$ такую, что $(d, \delta') \in \Phi_\mu$. Как мы уже показали, в этом случае имеется изоморфизм $T_d^*(\mathcal{E}) \cong \mathcal{E} \otimes \mathcal{P}_{\delta'}$. Следовательно, $\mathcal{E} \otimes \mathcal{P}_{(\delta - \delta')} \cong \mathcal{E}$, и значит $(\delta - \delta') \in \Sigma^0(\mathcal{E})$. Но так как $\Sigma^0(\mathcal{E}) = q_2(\mathrm{Ker}\,(q_1))$, то точка $(0, \delta - \delta')$ принадлежит Φ_μ . И значит, точка (d, δ) также принадлежит Φ_μ . $\square$

5.4.b. Теперь мы приведем конструкцию, которая показывает, как по изометричному изоморфизму f можно построить объект $\mathcal{E}$ на произведении такой, что он задает эквивалентность производных категорий, и для которого $f_{\mathcal{E}}$ совпадает с f .

Конструкция 5.4.10 Давайте зафиксируем изометричный изоморфизм $f : A \times \widehat{A} \longrightarrow B \times \widehat{B}$. Обозначим через Γ его график. Изоморфизм $f,$ как и раньше, будем записывать в матричной форме

$$f = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

Мы предположим, что $y : \widehat{A} \longrightarrow B$ является изогенией. В этом случае мы можем сопоставить отображению f элемент $g \in \mathrm{Hom}(A \times B,\ \widehat{A} \times \widehat{B}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, который имеет следующую форму:

$$g = \begin{pmatrix} y^{-1}x & -y^{-1} \\ -\widehat{y}^{-1} & wy^{-1} \end{pmatrix}.$$

Элемент g задает некоторое соответствие на $(A \times B) \times (\widehat{A} \times \widehat{B})$. Легко проверить, что изометричность f влечет равенство $\widehat{g} = g$. Это значит, что элемент g на самом деле принадлежит образу $\mathrm{NS}(A \times B) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ при каноническом вложении в $\mathrm{Hom}(A \times B,\ \widehat{A} \times \widehat{B}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ (см. например [36]). Следовательно, существует $\mu = \frac{[\mathcal{L}]}{l} \in \mathrm{NS}(A \times B)$ такое, что Φ_μ совпадает с графиком соответствия g . Предложение 5.4.6 говорит нам, что по каждому μ можно построить простое полуоднородное расслоение $\mathcal{E}$ на $A \times B$ с наклоном $\mu(\mathcal{E}) = \mu$.

Чуть ниже мы покажем, что функтор $\Phi_{\mathcal{E}}$ из $\mathbf{D}^b(A)$ в $\mathbf{D}^b(B)$ является эквивалентностью и $f_{\mathcal{E}} = f$. Но сначала давайте сравним графики Γ и Φ_μ . Если точка (a, α, b, β) принадлежит Γ , то

$$\begin{array}{ll} b &= x(a) + y(\alpha), \\ \beta &= z(a) + w(\alpha), \end{array} \quad \text{и, следовательно,} \quad \begin{array}{rlcl} \alpha = & -y^{-1}x(a) & + & y^{-1}(b), \\ \beta = & (z - wy^{-1}x)(a) & + & wy^{-1}(b). \end{array}$$

Изометричность f влечет равенство $(z - wy^{-1}x) = -\widehat{y}^{-1}$. И значит, точка (a, α, b, β) принадлежит графику Γ тогда и только тогда, когда $(a, -\alpha, b, \beta)$ принадлежит Φ_μ . Таким образом, мы находим, что

$$\Phi_\mu = (1_A, -1_{\widehat{A}}, 1_B, 1_{\widehat{B}})\Gamma.$$

В частности, из-за того, что f изоморфизм, следует, что проекции Φ_μ на $A \times \widehat{A}$ и $B \times \widehat{B}$ являются изоморфизмами.

Предложение 5.4.11 *Пусть $\mathcal{E}$ – полуоднородное расслоение на $A \times B$, построенное по изометричному изоморфизму f , описанным выше способом. Тогда функтор $\Phi_{\mathcal{E}} : \mathbf{D}^b(A) \longrightarrow \mathbf{D}^b(B)$ является эквивалентностью.*

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{E}_a$ ограничение расслоения $\mathcal{E}$ на слой $\{a\} \times B$. По Теореме 2.1.5 для того, чтобы доказать, что $\Phi_{\mathcal{E}}$ вполне строгий, достаточно проверить, что все расслоения $\mathcal{E}_a$ простые и ортогональны друг другу для разных точек.

Во-первых, заметим, что ранг расслоения $\mathcal{E}$ равен по Предложению 5.4.6 квадратному корню из степени отображения $\Phi_\mu \longrightarrow A \times B$, т.е. есть $\sqrt{\deg(\beta)}$.

Из полуоднородности $\mathcal{E}$ немедленно следует, что все расслоения $\mathcal{E}_a$ также полуоднородны. Кроме того, наклон ограничения $\mu(\mathcal{E}_a)$ равен $\delta\beta^{-1} \in \mathrm{NS}(B) \otimes \mathbb{Q} \subset \mathrm{Hom}(B,\ \widehat{B}) \otimes \mathbb{Q}$. Обозначим $\delta\beta^{-1}$ для краткости через ν , рассматривая его как элемент $\mathrm{NS}(B) \otimes \mathbb{Q}$. Предложение 5.4.6 утверждает существование простого полуоднородного расслоения $\mathcal{F}$ на B с данным наклоном $\mu(\mathcal{F}) = \nu$. Очевидно, что Φ_ν в этом случае есть $\mathrm{Im}\left[\widehat{A} \xrightarrow{(\beta,\delta)} B \times \widehat{B}\right]$. Так как f изоморфизм, то отображение $\widehat{A} \xrightarrow{(\beta,\delta)} B \times \widehat{B}$ является вложением. Следовательно, опять применяя Предложение 5.4.6 получаем равенство $r(\mathcal{F}) = \sqrt{\deg(\beta)} = r(\mathcal{E}_a)$. Таким образом, два расслоения $\mathcal{F}$ и $\mathcal{E}_a$ полуоднородны и имеют одинаковые наклон и ранг. Кроме того, расслоение $\mathcal{F}$ простое. Из Предложений 5.4.7 и 5.4.6 (2) следует, что $\mathcal{E}_a$ также простое расслоение.

Далее, из Леммы 5.4.8 следует, что расслоения $\mathcal{E}_{a_1}$ и $\mathcal{E}_{a_2}$ для двух точек $a_1, a_2 \in A$ либо ортогональны, либо изоморфны. Предположим, что они изоморфны. Так как расслоение $\mathcal{E}$ полуоднородно, то

$$T^*_{(a_2-a_1,0)}\mathcal{E} \cong \mathcal{E} \otimes \mathcal{P}_{(\alpha,\beta)} \tag{5.7}$$

для некоторой точки $(\alpha, \beta) \in \widehat{A} \times \widehat{B}$. В частности, получаем

$$\mathcal{E}_{a_2} \otimes \mathcal{P}_\beta \cong \mathcal{E}_{a_1} \cong \mathcal{E}_{a_2}.$$

Следовательно, $\mathcal{P}_\beta \in \Sigma^0(\mathcal{E}_a)$ (см. (5.6)).

По Лемме 5.4.9 и Предложению 5.4.6 порядки $\Sigma^0(\mathcal{E})$ и $\Sigma^0(\mathcal{E}_a)$ равны r^2 . Мы утверждаем, что естественное отображение $\sigma : \Sigma^0(\mathcal{E}) \longrightarrow \Sigma^0(\mathcal{E}_a)$ является изоморфизмом. Действительно, в противном случае нашлась бы точка $\alpha' \in \widehat{A}$ такая, что $\mathcal{E} \otimes \mathcal{P}_{\alpha'} \cong \mathcal{E}$. И по Лемме 5.4.9 тогда $(0, \alpha', 0, 0) \in \Phi_\mu$. А это противоречит тому, что проекция $\Phi_\mu \longrightarrow B \times \widehat{B}$ есть изоморфизм.

Теперь, если σ изоморфизм, то найдется точка $\alpha' \in \widehat{A}$ такая, что $\mathcal{E} \otimes \mathcal{P}_{(\alpha',\beta)} \cong \mathcal{E}$. Из равенства (5.7) следует, что

$$T^*_{(a_2-a_1,0)}\mathcal{E} \cong \mathcal{E} \otimes \mathcal{P}_{(\alpha-\alpha',0)}.$$

По Лемме 5.4.9 это значит, что точка $(a_2-a_1, \alpha-\alpha', 0, 0)$ принадлежит Φ_μ . Опять, так как проекция $\Phi_\mu \longrightarrow B \times \widehat{B}$ есть изоморфизм, то получаем равенство $a_2 - a_1 = 0$. Таким образом, для двух разных точек a_1 and a_2 расслоения $\mathcal{E}_{a_1}$ и $\mathcal{E}_{a_2}$ ортогональны . И, следовательно, функтор $\Phi_{\mathcal{E}} : \mathbf{D}^b(A) \longrightarrow \mathbf{D}^b(B)$ является вполне строгим. По тем же соображениям сопряженный функтор $\Psi_{\mathcal{E}^\vee}$ так же является вполне строгим. Следовательно, $\Phi_{\mathcal{E}}$ – эквивалентность. □

Предложение 5.4.12 *Пусть* $\mathcal{E}$ *– полуоднородное расслоение, построенное описанным выше способом по изометричному изоморфизму* $f : A \times \widehat{A} \longrightarrow B \times \widehat{B}$ *. Тогда имеется равенство* $f_{\mathcal{E}} = f$ *.*

Доказательство. Обозначим через X график морфизма $f_{\mathcal{E}}$. Из Следствия 5.2.13 следует, что точка (a, α, b, β) принадлежит X тогда и только тогда, когда

$$T_{b*}\mathcal{E} \otimes \mathcal{P}_\beta \cong T^*_a\mathcal{E} \otimes \mathcal{P}_\alpha.$$

Что равносильно равенству

$$T_{(a,b)}^{*}\mathcal{E} \cong \mathcal{E}\otimes\mathcal{P}_{(-\alpha,\beta)}.$$

Следовательно, по Лемме 5.4.9 получаем, что $X = (1_A, -1_{\widehat{A}}, 1_B, 1_{\widehat{B}})\Phi_\mu$ где $\mu = \mu(\mathcal{E})$ это наклон $\mathcal{E}$. С другой стороны, по конструкции, описанной в 5.4.10 график Γ отображения f также есть $(1_A, -1_{\widehat{A}}, 1_B, 1_{\widehat{B}})\Phi_\mu$. Значит, изоморфизмы $f_{\mathcal{E}}$ и f совпадают. $\square$

При построении расслоения $\mathcal{E}$ по изоморфизму f мы предположили, что отображение $y : \widehat{A} \longrightarrow B$ является изогенией. Если это не так, то мы представим f как композицию двух отображений $f_1 \in U(A\times\widehat{A},\ B\times\widehat{B})$ и $f_2 \in U(A\times\widehat{A})$ для которых y_1 и y_2 являются изогениями. Легко увидеть, что это всегда можно сделать. Теперь для каждого f_i найдем свой объект $\mathcal{E}_i$, далее рассмотрим композицию функторов $\Phi_{\mathcal{E}_i}$ и возьмем объект, ее представляющий.

5.4.c. Утверждения, доказанные в этом и предыдущих параграфах, мы можем объединить в следующие теоремы.

Теорема 5.4.13 *Пусть A и B – два абелевых многообразия над алгебраически замкнутым полем характеристики 0 . Тогда ограниченные производные категории когерентных пучков $\mathbf{D}^b(A)$ и $\mathbf{D}^b(B)$ эквивалентны как триангулированные категории тогда и только тогда, когда существует изометричный изоморфизм $f : A\times\widehat{A} \xrightarrow{\sim} B\times\widehat{B}$.*

Теорема 5.4.14 *Пусть A абелево многообразие над алгебраически замкнутым полем характеристики 0 . Тогда группа точных автоэквивалентностей производной категории $\operatorname{Auteq}\mathbf{D}^b(A)$ может быть включена в следующую короткую точную последовательность групп:*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}\oplus(A\times\widehat{A})_k \longrightarrow \operatorname{Auteq}\mathbf{D}^b(A) \longrightarrow U(A\times\widehat{A}) \longrightarrow 1.$$

5.4.d. Давайте чуть более подробно исследуем группу $\operatorname{Auteq}\mathbf{D}^b(A)$. Она имеет нормальную подгруппу $(A\times\widehat{A})_k$, которая состоит из функторов вида $T_{a*}(\cdot)\otimes\mathcal{P}_\alpha$, где $(a,\alpha)\in A\times\widehat{A}$. Фактор по этой подгруппе является центральным расширением $U(A\times\widehat{A})$ с помощью $\mathbb{Z}$. Обозначим это центральное расширение как $\widetilde{U}(A\times\widehat{A})$.

Имеются короткие точные последовательности:

$$0 \longrightarrow (A\times \hat{A})_k \longrightarrow \mathrm{Auteq}\,\mathbf{D}^b(A) \longrightarrow \widetilde{U}(A\times \widehat{A}) \longrightarrow 1, \qquad (5.8)$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \widetilde{U}(A\times \hat{A}) \longrightarrow U(A\times \widehat{A}) \longrightarrow 1. \qquad (5.9)$$

Для того, чтобы описать центральное расширение (5.9), достаточно задать 2-коцикл $\lambda(g_1,g_2)\in\mathbb{Z}$, где g_1 и g_2 элементы $U(A\times\widehat{A})$.

Из Предложения 5.3.2 следует, что, если $\Phi_{\mathcal{E}}$ является эквивалентностью, то объект $\mathcal{E}\in\mathbf{D}^b(A\times A)$ изоморфен $\mathcal{E}[k]$ для некоторого пучка $\mathcal{E}$ на $A\times A$. Пусть $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ – два пучка на $A\times A$, которые задают автоэквивалентности $\Phi_{\mathcal{E}}$ и $\Phi_{\mathcal{F}}$. Тогда композиция $\Phi_{\mathcal{F}}\circ\Phi_{\mathcal{E}}$ представляется некоторым объектом $\mathcal{G}[k]$, где $\mathcal{G}$ - это пучок. Положим, $\lambda(f_{\mathcal{F}},f_{\mathcal{E}})=k$. Очевидно, что λ есть 2-коцикл, который и задает центральное расширение (5.9).

Давайте вычислим коцикл λ в терминах элементов группы $U(A\times\widehat{A})$. Для простоты положим $k=\mathbb{C}$. Тогда $A\cong\mathbb{C}^n/\mathbb{Z}^{2n}$, и каждому линейному расслоению $\mathcal{L}$ на A можно сопоставить Эрмитову форму $H(\mathcal{L})$ на $\mathbb{C}^n$ (see [36]). Обозначим через $p(H)$ число положительных собственных значений H . Мы получаем функцию $p:\mathrm{NS}(A)\to\mathbb{Z}$. Ее можно продолжить на $\mathrm{NS}(A)\otimes\mathbb{R}$ по правилу: $p(\sum\limits_i r_i[\mathcal{L}_i])=p(\sum\limits_i r_iH(\mathcal{L}_i))$. Таким образом, мы получаем полунепрерывную снизу функцию p на всем $\mathrm{NS}(A)\otimes\mathbb{R}$. (Нетрудно определить функцию p и для произвольного алгебраически замкнутого поля. Действительно, мы можем положить $p(\mathcal{L})$ равным числу отрицательных корней многочлена $P(n)=\chi(\mathcal{L}\otimes\mathcal{M}^n)$, где $\mathcal{M}$ некоторое обильное линейное расслоение. После этого можно продолжить функцию p на все $\mathrm{NS}(A)\otimes\mathbb{R}$ описанным выше способом.)

Рассмотрим теперь два элемента $U(A\times\widehat{A})$:

$$g_1=\begin{pmatrix} x_1 & y_1\\ z_1 & w_1\end{pmatrix} \quad \text{and} \quad g_2=\begin{pmatrix} x_2 & y_2\\ z_2 & w_2\end{pmatrix} \qquad (5.10)$$

такие, что y_1 и y_2 изогении. Это значит, что существуют обратные $y_1^{-1},y_2^{-1}\in\mathrm{Hom}(A,\widehat{A})\otimes\mathbb{Q}$. Теперь запишем:

$$g_1g_2=\begin{pmatrix} x_3 & y_3\\ z_3 & w_3\end{pmatrix}$$

Рассмотрим элемент $y_1^{-1}y_3y_2^{-1} = y_1^{-1}x_1 + w_2y_2^{-1}$ группы $\mathrm{Hom}(A, \widehat{A}) \otimes \mathbb{Q}$. Легко видеть, что он принадлежит $\mathrm{NS}(A) \otimes \mathbb{Q}$. Не трудно доказать, что существует равенство

$$\lambda(g_1, g_2) = p(y_1^{-1}y_3y_2^{-1}) - n.$$

Таким образом, мы можем задать формулу для $\lambda(g_1, g_2)$ в том случае, когда y_1 и y_2 обратимы. Так как λ есть коцикл, он определяется этой формулой и может быть однозначно продолжен на всю группу $U(A \times \widehat{A}, \mathbb{R}) \subset \mathrm{End}(A \times \widehat{A}) \otimes \mathbb{R}$.

5.4.e. В заключении рассмотрим несколько полезных примеров, которые позволяют понять каковы бывают группы автоэквивалентностей.

Пример 5.4.15 Рассмотрим $A = E^n$, где E эллиптическая кривая без комплексного умножения. В этом случае группа $U(A\times\widehat{A})$ изоморфна $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z})$. Хорошо известно, что фундаментальная группа вещественной симплектической группы $G = \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ изоморфна $\mathbb{Z}$ и существует универсальное центральное расширение $\widetilde{G}$. Кроме того, на симплектической группе существует $\mathbb{Z}$-значный 2-коцикл:

$$\mu(g_1, g_2) = \tau(l, g_1l, g_1g_2l),$$

задаваемый индексом Маслова τ и некоторым лагранжевым подпространством l (смотри к примеру [30]). Существует формула для коцикла μ , записанная в матричном виде, подобно формуле (5.10). В тех же обозначениях она имеет вид:

$$\mu(g_1, g_2) = \mathrm{sign}\,(y_1^{-1}y_3y_2^{-1}),$$

где с правой стороны стоит сигнатура симметрической матрицы $y_1^{-1}y_3y_2^{-1}$.

Сравнивая коциклы λ и μ , нетрудно увидеть, что коцикл $(2\lambda - \mu)$ тривиален как элемент вторых когомологий Более того известно, что вторые когомологии симплектической группы $G = \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ есть $\mathbb{Z}$, и образующая задает универсальное расширение $\widetilde{G}$. Известно также, что коцикл Маслова μ равен учетверенной образующей. Следовательно, для $\widetilde{G}_\lambda$ имеем точную последовательность $1 \to \widetilde{G} \to \widetilde{G}_\lambda \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$, которая на самом деле расщепляется, то есть $\widetilde{G}_\lambda$ изоморфна $\widetilde{G} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Пример 5.4.16 Рассмотрим абелево многообразие A с кольцом эндоморфизмов $\mathrm{End}(A) = \mathbb{Z}$. Тогда группа Нерона-Севери $\mathrm{NS}(A)$ изоморфна $\mathbb{Z}$. Обозначим через

$\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ образующие $\mathrm{NS}(A)$ и $\mathrm{NS}(\widehat{A})$ соответственно. Композиция $\phi_{\mathcal{M}}\circ\phi_{\mathcal{L}}$ есть $N\cdot\mathrm{id}_A$ с некоторым $N>0$. В этом случае группа $U(A\times\widehat{A})$ совпадает с конгруэнц-подгруппой $\Gamma_0(N)\subset \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$. Далее, пусть B – это другое абелево многообразие такое, что $B\times\widehat{B}$ изоморфно $A\times\widehat{A}$. Легко проверить, что любой такой изоморфизм является изометричным. Абелево многообразие B можно представить как образ некоторого морфизма $A\xrightarrow{(k\cdot\mathrm{id},\, m\phi_{\mathcal{L}})} A\times\widehat{A}$. Можно считать, что Н.О.Д.$(k,m)=1$. Обозначим через ψ этот морфизм из A в B . Ядро ψ есть $\mathrm{Ker}\,(m\phi_{\mathcal{L}})\cap A_k$. Так как Н.О.Д.$(k,m)=1$, то на самом деле $\mathrm{Ker}\,(\psi)=\mathrm{Ker}\,(\phi_{\mathcal{L}})\cap A_k$. С другой стороны, мы знаем, что $\mathrm{Ker}\,(\phi)\subset A_N$. Таким образом, без потери общности можно считать, что k является делителем N . Каждый k делитель N индуцирует абелево многообразие $B:=A/(\mathrm{Ker}\,(\phi_{\mathcal{L}})\cap A_k)$. Очевидно, что два разных делителя N неизоморфные абелевы многообразия. Более того, легко проверить, что вложение B в $A\times\widehat{A}$ расщепляется тогда и только тогда, когда Н.О.Д.$(k,N/k)=1$. Следовательно, число абелевых многообразий B таких, что $\mathbf{D}^b(B)\simeq\mathbf{D}^b(A)$ совпадает с 2^s , где s – число простых делителей N .

Пример 5.4.17 Давайте предположим дополнительно, что A главнополяризованное, т.е. мы имеем $N=1$. В этом случае, если $\mathbf{D}^b(A)\simeq\mathbf{D}^b(B)$, то $B\cong A$. Более того, группа $U(A\times\widehat{A})$ изоморфно $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$. В работе [43] доказано, что для главнополяризованного абелева многообразия последовательность (5.8) расщепляется. Следовательно, мы имеем описание $\mathrm{Auteq}\,\mathbf{D}^b(A)$ как полупрямого произведения нормальной подгруппы $(A\times\widehat{A})_k$ и группы $\widetilde{U}(A\times\widehat{A})$, т.е.

$$\mathrm{Auteq}\,\mathbf{D}^b(A)\cong\widetilde{U}(A\times\widehat{A})\ltimes(A\times\widehat{A})_k,$$

и $\widetilde{U}(A\times\widehat{A})$ – центральное расширение $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, которое определяется коциклом λ . Можно показать, что существует последовательность:

$$1\longrightarrow B_3\longrightarrow\widetilde{U}(A\times\widehat{A})\longrightarrow\mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}\longrightarrow 0,$$

где B_3 группа кос с 3-мя нитями. (Напомним, что группа B_3 является универсальным центральным расширением $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, которое также индуцируется универсальным накрытием $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$.)

Литература

[1] M. Artin, A. Grothendieck, J. L. Verdier, *Théorie des Topos et Cohomologie Etale des Schémas,* SGA4, Lecture Notes in Math, v.269.,v.270,v.305.

[2] Backelin J., *On the rates of growth of the homologies of Veronese subring*, Lecture Notes in Math., vol.1183, Springer-Verlag, 1985.

[3] Бейлинсон А. А., *Когерентные пучки на* $\mathbb{P}^n$ *и проблемы линейной алгебры*, Функ. Анализ и его Прил., т.12, N3 (1978) 68-69.

[4] Бернштейн И., Гельфанд И., Гельфанд С., *Алгебраические векторные расслоения на* $\mathbb{P}^n$ *и проблемы линейной алгебры*, Функ. Анализ и его Прил., т.12, N3 (1978) 66-67.

[5] Beilinson A., Bernstien J., Deligne P., *Faisceaux pervers*, Astérisque 100 (1982).

[6] P. Berthelot, A. Grothendieck, L. Illusie, *Théorie des intersections et théoreme de Riemann-Roch*, SGA6, Lect. Notes in Math., v.225, Springer, Heidelberg, 1971.

[7] Бондал А., *Представления ассоциативных алгебр и когерентные пучки*, Изв. АН СССР, Сер. Матем., т.53, N1 (1989) 25-44.

[8] Бондал А., Капранов М., *Представимые функторы, функторы Серра и перестройки*, Изв. АН СССР, Сер. Матем., т.53, N6 (1989) 1183-1205.

[9] Bondal A., Orlov D., *Semiorthogonal decomposition for algebraic varieties*, Max Planck Institut für Mathematik, Bonn, 1995, p.55.

[10] Bondal A., Orlov D., *Reconstruction of a variety from the derived category and groups of autoequivalences*, Compositio Mathematica, 125 (2001) 3, 327-344.

[11] Bridgeland T., *Equivalences of triangulated categories and Fourier-Mukai transforms,* Bull. London Math.Soc., v.31, N1 (1999) 25-34.

[12] Bridgeland T., *Flops and derived categories*, preprint math.AG/0009053.

[13] Deligne P., *Cohomologie à supports propres*, Exposé XVII, SGA 4, Lect. Notes in Math, v.305 (1973), 252-480.

[14] Габриель П., Цисман М., *Категории частных и теория гомотопий*, Изд. "Мир", Москва, 1971.

[15] Гельфанд С. И., Манин Ю. И., *Методы гомологической алгебры. Введение в теорию когомологий и производных категорий*, Изд. "Наука", 1988.

[16] Golyshev V., Lunts V., Orlov D., *Mirror symmetry for abelian varieties*, Journal of Algebraic Geometry, v.10 (2001) 433-496.

[17] Grothendieck A., *Sur quelques points d'algèbre homologique*, Tohoku Math. J.,v.9 (1957) 119-221.

[18] Grothendieck A., Dieudonné J., *Élements de géométrie algébrique*, Publications Math. I.H.E.S, N4,8,11,17,20,24,28,32 (1961-1967).

[19] Gruson L., Raynaud M., *Critères de platitude et de projectivité*, Inventiones Math., 13 (1971), 1-89.

[20] Hartshorne R., *Residues and duality*, Lecture Notes in Math., vol.20, Springer-Verlag, 1966.

[21] Inamdar S. P., Mehta V. B., *Frobenius splitting of Schubert varieties and linear syzygies*, American Journal of Math., vol.116, N6 (1994), pp.1569-1586.

[22] Капранов М., *Производная категория когерентных пучков на многообразии Грассмана*, Изв. АН СССР, Сер. Матем., т.48, N1 (1984) 192-202.

[23] Капранов М., *Производная категория когерентных пучков на квадрике*, Функц. Анализ и его Прил., т.20, N2 (1986) 67.

[24] Kapranov M., *On the derived categories of coherent sheaves on some homogenious spaces*, Invent. Math.,v.92, N2 (1988) 479-508.

[25] Kapustin A., Orlov D., *Vertex algebras, mirror symmetry and D-branes: case of complex tori*, submitted in Comm. Math. Phys., hep-th/0010293.

[26] Картан А., Эйленберг С., *Гомологическая алгебра*, М., ИЛ, (1960)

[27] Kashiwara M., *The Riemann-Hilbert problem for holonomic systems,* Publ. Res. Inst. Math. Sci., v.20, N1 (1984) 319-365.

[28] Keller B., *Derived categories and their uses*, preprint.

[29] Lenstra H. W., Oort Jr. F., Zarhin Yu. G., *Abelian subvarieties*, J. Algebra, v.180,(1996), 513-516.

[30] Lion G., Vergne M., *The Weil representation, Maslov index and theta series*, Birkhäuser, 1980.

[31] Looijenga E., Peters C., *Torelli theorem for Kähler K3 surfaces*, Compositio Math., v.58 (1981), pp.145-186.

[32] Miyanishi M., *Some remarks on algebraic homogeneous vector bundles*, Number Theory, Alg.Geom. and Comm.Algebra, Kinokuniya, Tokyo, Japan, (1973), 71-93.

[33] Mukai S., *Duality between* $D(X)$ *and* $D(\widehat{X})$ *with its application to Picard sheaves*, Nagoya Math. J. 81 (1981), 153–175.

[34] Mukai S., *Semi-homogeneous vector bundles on an abelian variety*, J. Math. Kyoto Univ., v.18, N2 (1978), 239-272.

[35] Mukai S., *On the moduli space of bundles on a K3 surface I*, Vector bundles on algebraic varieties, Tata Institute of Fundamental Research, Oxford University Press, Bombay and London, 1987.

[36] Mumford D., *Abelian varieties*, Oxford Univ. Press, Second Edition, 1974.

[37] Орлов Д., *Проективные расслоения, моноидальные преобразования и производные категории когерентных пучков*, Известия РАН, Сер.Матем., т.56, N4 (1992) 852-862.

[38] Orlov D., *Equivalences of derived categories and K3 surfaces*, Journal of Math. Sciences, Alg. geom.-5, v.85, №5, (1997) 1361-1381.

[39] Orlov D.,*Quasicoherent sheaves in commutative and noncommutative geometry*, Max Planck Institut für Mathematik, Bonn. 1999, 16 p.

[40] Орлов Д., *Производные категории когерентных пучков на абелевых многообразиях и эквивалентности между ними*, Известия РАН, Сер.Матем., т.66, N3 (2002) 131-158.

[41] Nikulin V. V., *Integral symmetric bilinear forms and some of their applications*, English trans., Math. USSR Izvestia, v.14 (1980), pp.103-167.

[42] Polishchuk A., *Symplectic biextensions and generalization of the Fourier-Mukai transforms*, Math. Research Letters , v.3 (1996), 813-828.

[43] Polishchuk A., *Biextensions, Weil representations on derived categories, and theta-functions*, Ph.D. Thesis, Harvard University, 1996.

[44] Thomason R., Trobaugh T., *Higher algebraic K-theory of schemes and of derived categories*, The Grothendieck Festschrift, v.III, Birfhäuser (1990) 247-435.

[45] Verdier J. L., *Categories derivées*, SGA 4 1/2, Lecture Notes in Math., v.569, Springer-Verlag, 1977.

Отдел Алгебры, Математический Институт им. Стеклова РАН, ул. Губкина 8, Москва, 117966 Россия.