ПРОИЗВОДНЫЕ КАТЕГОРИИ КОГЕРЕНТНЫХ ПУЧКОВ И МОТИВЫ.

ДМИТРИЙ ОРЛОВ

Ограниченная категория когерентных пучков $\mathbf{D}^b(X)$ – это триангулированная категория, которую естественно сопоставить алгебраическому многообразию X. Иногда случается, что для двух разных многообразий X и Y имеется эквивалентность $\mathbf{D}^b(X) \simeq \mathbf{D}^b(Y)$. Возникает естественный вопрос: можно ли в такой ситуации что-то сказать о мотивах данных многообразий? Первый же такой пример [4] – абелево многообразие A и его двойственное $\widehat{A}$ – показывает нам, что мотивы данных многообразий не обязаны быть изоморфны. Однако, кажется, что во всех известных примерах их мотивы с рациональными коэффициентами являются изоморфными.

Напомним определение категории эффективных мотивов Чжоу $\mathrm{CH}^{\mathrm{eff}}(\mathsf{k})$ над полем k. Категория $\mathrm{CH}^{\mathrm{eff}}(\mathsf{k})$ получается как псевдо-абелева оболочка (т.е. формальным добавлением коядер всех проекторов) из категории, объекты которой – гладкие проективные схемы над k, а морфизмы из X в Y – это сумма $\oplus_{X_i} A^m(X_i \times Y)$ (по всем компонентам связности X_i) групп циклов коразмерности $m = \dim Y$ на $X_i \times Y$ по модулю рациональной эквивалентности (см. [3, 1]). В [7] Воеводский определил триангулированную категорию геометрических мотивов $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(\mathsf{k})$. Он стартовал с аддитивной категории $\mathrm{SmCor}(\mathsf{k})$, объекты которой – гладкие схемы конечного типа над k, а морфизмы из X в Y – это свободная абелева группа, порожденная замкнутыми целыми подсхемами $Z \subset X \times Y$ конечными над X и сюръективными над некоторой компонентой связности X. Имеется естественное вложение $[-] : \mathrm{Sm}(\mathsf{k}) \to \mathrm{SmCor}(\mathsf{k})$ категории $\mathrm{Sm}(\mathsf{k})$ гладких схем конечного типа над k. Категория $\mathrm{SmCor}(\mathsf{k})$ аддитивна, и $[X \coprod Y] = [X] \oplus [Y]$. Далее он рассмотрел факторизацию гомотопической категории $\mathcal{H}^b(\mathrm{SmCor}(\mathsf{k}))$ ограниченных комплексов по минимальной толстой триангулированной подкатегории T, содержащей все объекты вида $[X \times \mathbb{A}^1] \to [X]$ и $[U \cap V] \to [U] \oplus [V] \to [X]$ для любого открытого покрытия $U \cup V = X$. Триангулированная категория $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(\mathsf{k})$ определяется как псевдо-абелева оболочка фактор-категории $\mathcal{H}^b(\mathrm{SmCor}(\mathsf{k}))/T$ (см. [7, 1]).

Существует канонический функтор $\mathrm{CH}^{\mathrm{eff}}(\mathsf{k}) \to \mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(\mathsf{k})$, который является полным вложением, если над полем k существует разрешение особенностей ([7, 4.2.6]). Таким образом, все равно в какой из двух категорий (в $\mathrm{CH}^{\mathrm{eff}}(\mathsf{k})$ или в $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(\mathsf{k})$) рассматривать

Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ (N 05-01-01034), гранта Президента РФ для поддержки молодых российских ученых МД-2731.2004.1, Американского фонда гражданских исследований CRDF RUM1-2661-MO-05 и Фонда содействия отечественной науке.

мотивы гладких проективных многообразий. Обозначим мотив многообразия X через $\mathrm{M}(X)$, а через $\mathrm{M}(X)_{\mathbb{Q}}$ его мотив в категории мотивов с рациональными коэффициентами $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(\mathsf{k})\otimes\mathbb{Q}$ (и $\mathrm{CH}^{\mathrm{eff}}(\mathsf{k})\otimes\mathbb{Q}$).

Гипотеза 1. *Пусть X и Y – гладкие проективные многообразия, и $\mathbf{D}^b(X){\simeq}\mathbf{D}^b(Y)$. Тогда их рациональные мотивы $\mathrm{M}(X)_{\mathbb{Q}}$ и $\mathrm{M}(Y)_{\mathbb{Q}}$ изоморфны в $\mathrm{CH}^{\mathrm{eff}}(\mathsf{k})\otimes\mathbb{Q}$ (и в $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(\mathsf{k})\otimes\mathbb{Q}$).*

Гипотеза 2. *Пусть X,Y – гладкие проективные многообразия, и $F:\mathbf{D}^b(X)\to\mathbf{D}^b(Y)$ – вполне строгий функтор. Тогда мотив $\mathrm{M}(X)_{\mathbb{Q}}$ является прямым слагаемым в $\mathrm{M}(Y)_{\mathbb{Q}}$.*

В категории $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(\mathsf{k})$ имеется тензорное произведение, и $\mathrm{M}(X)\otimes\mathrm{M}(Y)=\mathrm{M}(X\times Y)$. Определим мотив Тейта $\mathbb{Z}(1)$ как образ комплекса $[\mathbb{P}^1]\to[\mathrm{Spec}(\mathsf{k})]$, сосредоточенного в сепенях 2 и 3, и положим $M(p)=M\otimes\mathbb{Z}(1)^{\otimes p}$ для любого мотива $M\in\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(\mathsf{k})$ и $p\in\mathbb{N}$. Триангулированная категория геометрических мотивов $\mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}(\mathsf{k})$ получается из $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(\mathsf{k})$ формальным обращением функтора $-\otimes\mathbb{Z}(1)$. Важным и нетривиальным фактом здесь является утверждение, что канонический функтор $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(\mathsf{k})\to\mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}(\mathsf{k})$ является вполне строгим [7, 4.3.1]. И значит, мы можем работать в категории $\mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}(\mathsf{k})$. Более того (см. [7]), для гладких проективных X и Y и любого целого числа i имеется равенство

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}(\mathsf{k})}(\mathrm{M}(X),\mathrm{M}(Y)(i)[2i])\cong A^{m+i}(X\times Y),\quad \text{где}\quad m=\dim Y.$$

Предположим, что имеется вполне строгий функтор $F:\mathbf{D}^b(X)\to\mathbf{D}^b(Y)$ между производными категориями когерентных пучков двух гладких проективных многообразий X и Y размерности n и m соответственно. Этот функтор имеет правый сопряженный F^* по [2], и по теореме 2.2 из [5] (см. также [6, 3.2.1]) функтор F представляется объектом на произведении $X\times Y$, т.е. $F\cong\Phi_{\mathcal{A}}$, где $\Phi_{\mathcal{A}}=\mathbf{R}p_{2*}(p_1^*(-)\overset{\mathbf{L}}{\otimes}\mathcal{A})$ для некоторого $\mathcal{A}\in\mathbf{D}^b(X\times Y)$. Каждому функтору вида $\Phi_{\mathcal{A}}:\mathbf{D}^b(X)\to\mathbf{D}^b(Y)$ можно сопоставить элемент $a\in A^*(X\times Y,\mathbb{Q})$ по правилу

$$a=p_1^*\sqrt{\mathrm{td}_X}\cdot\mathrm{ch}(\mathcal{A})\cdot p_2^*\sqrt{\mathrm{td}_Y}, \tag{1}$$

где td_X и td_Y – классы Тодда многообразий X и Y. Цикл a имеет смешанный тип, рассмотрим его разложение на компоненты $a=a_0+\dots+a_{n+m}$, где индекс – это коразмерность цикла на $X\times Y$. Каждая компонента a_q задает отображение мотивов

$$\alpha_q:\mathrm{M}(X)_{\mathbb{Q}}\to\mathrm{M}(Y)_{\mathbb{Q}}(q-m)[2(q-m)].$$

А весь цикл a задает отображение $\alpha:\mathrm{M}(X)_{\mathbb{Q}}\to\bigoplus_{i=-m}^{n}\mathrm{M}(Y)_{\mathbb{Q}}(i)[2i]$. Теперь рассмотрим объект $\mathcal{B}\in\mathbf{D}^b(X\times Y)$, который представляет (левый) сопряженный функтор F^*, т.е. $F^*\cong\Psi_{\mathcal{B}}$, где $\Psi_{\mathcal{B}}=\mathbf{R}p_{1*}(p_2^*(-)\overset{\mathbf{L}}{\otimes}\mathcal{B})$. Сопоставим объекту $\mathcal{B}$ цикл

$b = b_0 + \cdots + b_{n+m}$ по той же самой формуле (1). Цикл b индуцирует отображение $\beta : \bigoplus_{i=-m}^{n} \mathrm{M}(Y)_{\mathbb{Q}}(i)[2i] \to \mathrm{M}(X)_{\mathbb{Q}}$. Так как функтор $\Phi_{\mathcal{A}}$ вполне строгий, то композиция $\Psi_{\mathcal{B}} \circ \Phi_{\mathcal{A}}$ изоморфна тождественному функтору. А применяя теорему Римана-Роха-Гротендика, получаем, что и композиция

$$\mathrm{M}(X)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\alpha} \bigoplus_{i=-m}^{n} \mathrm{M}(Y)_{\mathbb{Q}}(i)[2i] \xrightarrow{\beta} \mathrm{M}(X)_{\mathbb{Q}}$$

является тождественной, т.е. $\mathrm{M}(X)_{\mathbb{Q}}$ – прямое слагаемое в $\bigoplus_{i=-m}^{n} \mathrm{M}(Y)_{\mathbb{Q}}(i)[2i]$.

Предположим теперь, что $\dim X = \dim Y = n$, и что носитель объекта A также имеет размерность n. Значит $a_q = 0$ при $q = 0, \ldots, n-1$, т.е. $a = a_n + \cdots + a_{2n}$. Нетрудно видеть, что в этом случае и $b = b_n + \cdots + b_{2n}$. Отсюда следует, что композиция $\beta \cdot \alpha : \mathrm{M}(X)_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{M}(X)_{\mathbb{Q}}$, которая является тождественной, совпадает с композицией $\beta_n \cdot \alpha_n$. И значит, $\mathrm{M}(X)_{\mathbb{Q}}$ является прямым слагаемым в $\mathrm{M}(Y)_{\mathbb{Q}}$. Более того, в данной ситуации циклы a_n и b_n целочисленные. Следовательно, и целочисленный мотив $\mathrm{M}(X)$ является прямым слагаемым в $\mathrm{M}(Y)$. Получаем

Теорема 1. *Пусть X и Y – гладкие проективные многообразия размерности n, и $F : \mathbf{D}^b(X) \to \mathbf{D}^b(Y)$ вполне строгий функтор, такой что размерность носителя объекта $\mathcal{A}$, представляющего функтор F, равна n. Тогда мотив $\mathrm{M}(X)$ является прямым слагаемым мотива $\mathrm{M}(Y)$. Если к тому же функтор F есть эквивалентность, то мотивы $\mathrm{M}(X)$ и $\mathrm{M}(Y)$ изоморфны.*

Примеры таких функторов известны, они приходят из бирациональной геометрии (см. например [6]). В этих примерах, одна из компонент $\mathrm{supp}(\mathcal{A})$ задает бирациональное отображение $X \dashrightarrow Y$. Раздутия и антифлипы дают вполне строгие функторы, а флопы – эквивалентности. Отметим, что изоморфизм мотивов влечет изоморфизм всех реализаций (сингулярных когомологий, l-адических когомологий, структур Ходжа и т.п.).

Для произвольной эквивалентности $\Phi_{\mathcal{A}} : \mathbf{D}^b(X) \to \mathbf{D}^b(Y)$ отображение мотивов $\alpha_n : \mathrm{M}(X)_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{M}(Y, \mathbb{Q})$, заданное циклом $a_n \in A_n(X \times Y, \mathbb{Q})$, не обязано быть изоморфизмом (примером является расслоение Пуанкаре $\mathcal{P}$ на произведении абелевого многообразия A и его двойственного $\widehat{A}$). Однако, вполне возможно, что следующая гипотеза, уточняющая гипотезу 1, может быть верна.

Гипотеза 3. *Пусть $\mathcal{A}$ объект на $X \times Y$, для которого $\Phi_{\mathcal{A}} : \mathbf{D}^b(X) \to \mathbf{D}^b(Y)$ есть эквивалентность. Тогда найдутся линейные расслоения L и M на X и соотв. Y такие, что компонента a'_n объекта $\mathcal{A}' := p_1^* L \otimes \mathcal{A} \otimes p_2^* M$ задает изоморфизм между мотивами $\mathrm{M}(X)_{\mathbb{Q}}$ и $\mathrm{M}(Y)_{\mathbb{Q}}$.*

Автор благодарен Ю.И.Манину за полезные обсуждения.

Список литературы

[1] Bloch, S. Lectures on mixed motives. *Algebraic geometry—Santa Cruz 1995,* 329–359, Proc. Sympos. Pure Math., 62, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[2] Bondal, A., and Van den Bergh, M. Generators and representability of functors in commutative and noncommutative geometry. *Mosc. Math. J. 3*, 1 (2003), 1–36.

[3] Манин, Ю. И. Соответствия, мотивы и моноидальные преобразования. *Матем. Сб. 77*, 119 (1968), 475–507.

[4] Mukai, S. Duality between $D(X)$ and $D(\widehat{X})$ with its application to Picard sheaves. *Nagoya Math. J. 81* (1981), 153–175.

[5] Orlov, D. Equivalences of derived categories and K3 surfaces. *Journal of Math. Sciences, Alg. geom.-7 84*, 5 (1997), 1361–1381.

[6] Орлов, Д. О. Производные категории когерентных пучков и эквивалентности между ними. *Успехи Матем. Наук 58*, 3(351) (2003), 89–172.

[7] Voevodsky, V. Triangulated categories of motives over a field. In *Cycles, transfers, and motivic homology theories*, vol. 143 of *Ann. of Math.Stud*, pp. 188–238.

Математический институт им. В.А.Стеклова РАН

E-mail address: orlov@mi.ras.ru