КВАЗИКОГЕРЕНТНЫЕ ПУЧКИ В КОММУТАТИВНОЙ И НЕКОММУТАТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ.

ДМИТРИЙ ОРЛОВ

К 80-летию Игоря Ростиславовича Шафаревича

Аннотация. В работе дается определение квазикогерентных модулей для любого предпучка множеств на категориях аффинных коммутативных и некоммутативных схем, что обобщает обычное определение квазикогерентных пучков на схемах. Исследуются свойства квазикогерентных модулей быть пучками в различных топологиях. Строится вложение коммутативной геометрии в некоммутативную, используя предпучки группоидов.

Введение

В данной статье мы демонстрируем как квазикогерентные пучки естественным образом появляются в коммутативной и некоммутативной геометрии. Рассматривая предпучки множеств на категориях аффинных коммутативных и некоммутативных схем как очень широкое обобщение понятия схемы (или алгебраического пространства), мы показываем, что на этих объектах можно определить квазикогерентные пучки (модули). Далее мы исследуем основные свойства квазикогерентных пучков на предпучках множеств и более широко на предпучках группоидов.

В коммутативной алгебраической геометрии понятие схемы вводится в два шага. В начале определяются аффинные схемы, затем произвольная схема склеивается из аффинных кусков. При этом подходе мы апеллируем к топологическим свойствам коммутативных схем. В частности, используется функтор $Spec$ из категории коммутативных алгебр в категорию топологических пространств. С другой стороны, всякая схема может быть рассмотрена как предпучок множеств на категории аффинных схем. Мы будем использовать именно этот простой факт для введения и исследования некоммутативной геометрии.

По аналогии с коммутативной алгебраической геометрией категория *аффинных* некоммутативных схем – это категория противоположная категории алгебр (мы работаем над некоторым базисным кольцом k). Всякий объект, который может претендовать на то, чтобы называться некоммутативной схемой, должен задавать предпучок множеств на категории аффинных некоммутативных схем.

Эта работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант є 02-01-00468), Фонда поддержки ведущих научных школ (грант є 00-15-96085) и гранта INTAS-OPEN-2000-269. Исследования, описанные в данной работе, были сделаны при частичной поддержки Американского фонда гражданских исследований (CRDF є RM1-2405-MO-02.)

В этой статье мы рассмотрим все предпучки множеств на категории аффинных схем как в коммутативном так и в некоммутативном случае. Каждому предпучку множеств X мы сопоставим категорию (правых) квазикогерентных модулей $\mathrm{Qcoh}_r(X)$ на нем (определение 2.2). Это определение не зависит от топологии. Далее, мы покажем, что любой квазикогерентный модуль является пучком в канонической топологии на X (следствие 3.2 и теорема 4.3). В коммутативной ситуации мы определим новую топологию на категории аффинных схем, которая имеет непосредственное отношение к квазикогерентным модулям и будет называться топологией эффективного спуска (пункт 3.7). Существует эквивалентность между категорией квазикогерентных модулей на предпучке множеств и категорией квазикогернтных модулей на ассоциированном пучке в данной топологии (теорема 3.6).

Кроме того, мы опишем "правильное"вложение коммутативной геометрии в некоммутативную. Для этого нам придется расширить класс объектов и рассмотреть не только предпучки множеств но и предпучки группоидов на категории аффинных некоммутативных схем (пункт 4.4). Данное вложение удовлетворяет тому свойству, что категория квазикогерентных модулей на объекте X не будет зависеть от того в каком мире мы этот объект рассматриваем в коммутативном или некоммутативном (Теорема 4.2).

Хочется поблагодарить Алексея Бондала и Александра Розенберга за полезные обсуждения. Отдельная благодарность Андрею Суслину, который ответил на многие мои вопросы.

Большая часть данной работы была написана во время пребывания автора в Математическом институте Макса Планка (Бонн).

1. Предварительные сведения о категориях. Сайты.

1.1. В этой главе мы собрали уже известные факты о категориях и сайтах, которые будут нам нужны. Все они могут быть найдены в SGA4 [1] (см. также [5]). Пусть $\mathcal{C}$ – некоторая категория. Обозначим через $\mathcal{C}^\frown$ категорию контравариантных функторов из $\mathcal{C}$ в категорию множеств. Объект категории $\mathcal{C}^\frown$ называется предпучком множеств на $\mathcal{C}$. Существует канонический функтор $h : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^\frown$, который переводит объект $R \in \mathcal{C}$ в функтор $h_R(-) := \mathrm{Hom}(- , R)$. Предпучок h_R называется представимым. Далее мы будем писать R вместо h_R. По лемме Ионеды функтор h является полным вложением, более того, для всякого предпучка $X \in C^\frown$ существует естественный изоморфизм $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\frown}(R, X) = X(R)$.

Для произвольного объекта $X \in \mathcal{C}^\frown$ обозначим через $\mathcal{C}/X$ категорию пар (R, ϕ), где $R \in \mathcal{C}$ и $\phi \in X(R)$. Морфизмы между парами (R, ϕ) и (S, ψ) – это морфизмы $f : S \to R$, для которых $X(f)(\phi) = \psi$. Существует канонический функтор $j_X : \mathcal{C}/X \longrightarrow \mathcal{C}$, который сопоставляет паре (R, ϕ) объект R. Отметим, что каждый предпучок $X \in \mathcal{C}^\frown$ является копределом представимых объектов по системе $\mathcal{C}/X$ в категории $\mathcal{C}^\frown$.

1.2. Пусть $u : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ – некоторый функтор. Обозначим через $\hat{u}^*$ функтор из $\mathcal{C}'^\frown$ в $\mathcal{C}^\frown$, который переводит предпучок $Y \in \mathcal{C}'^\frown$ в композицию Yu .

Так как в категория множеств существуют все малые пределы и копределы, функтор $\hat{u}^*$ имеет левый и правый сопряженные функторы $\hat{u}_!$ и $\hat{u}_*$ соответственно (см. [1], I, 5.1.). Функтор $\hat{u}^*$ сохраняет все малые пределы и копределы. Функтор $\hat{u}_*$ сохраняет все малые пределы. Функтор $\hat{u}_!$ сохраняет все малые копределы, и его ограничение на подкатегорию $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}^\frown$ совпадает с функтором u . Кроме того, для всякого предпучка $X \in \mathcal{C}^\frown$ имеется изоморфизм

$$\hat{u}_! X(S) \cong \varinjlim_{R \in \mathcal{C}/X} \operatorname{Hom}(S, uR). \tag{1}$$

Можно также показать, что функтор $\hat{u}_!$ является вполне строгим тогда и только тогда, когда функтор u вполне строгий (см. [1], I.5.6). (Напомним, что функтор $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ называется вполне строгим, если он индуцирует изоморфизм $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}'}(FY, FX)$ для любой пары Y, X объектов категории $\mathcal{C}$.)

1.3. **Решетом** в категории $\mathcal{C}$ называется полная подкатегория $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$, которая удовлетворяет следующему условию: всякий объект из $\mathcal{C}$, для которого существует морфизм в объект из $\mathcal{D}$ сам содержится в $\mathcal{D}$. Пусть R – некоторый объект категории $\mathcal{C}$, тогда решето в категории $\mathcal{C}/R$ будем называть решетом на R .

Легко видеть, что решето на R – это то же самое, что подпредпучок предпучка R в категории $\mathcal{C}^\frown$. Поэтому мы будем рассматривать решето на R как предпучок. Понятие решета является главным инструментом при определении топологии на категории.

Определение 1.1. Топология Гротендика $\mathcal{T}$ *на категории* $\mathcal{C}$ *определяется заданием для каждого объекта* $R \in \mathcal{C}$ *множества* $J(R)$ *решет на* R *, называемых покрывающими решетами. Они должны удовлетворять следующим условиям:*

- T1) *Для любого объекта* R *максимальное решето* $\mathcal{C}/R$ *принадлежит* $J(R)$.
- T2) *Если* $T \in J(R)$ *и* $f : S \longrightarrow R$ *– произвольный морфизм из* $\mathcal{C}$ *, то решето* $f^*(T) := \left\{ U \xrightarrow{\alpha} S \mid f\alpha \in T \right\}$ *принадлежит* $J(S)$.
- T3) *Если* $T \in J(R)$ *– покрывающее решето, а* U *– некоторое решето на* R *такое, что* $f^*(U) \in J(S)$ *для каждого морфизма* $S \xrightarrow{f} R$ *из* T *, тогда* $U \in J(R)$.

Определение 1.2. *Категория* $\mathcal{C}$ *с топологией Гротендика* $\mathcal{T}$ *называется* сайтом *и будет обозначаться* $\Phi = (\mathcal{C}, \mathcal{T})$.

Пусть $\Phi = (\mathcal{C}, \mathcal{T})$ – некоторый сайт, и R – объект из $\mathcal{C}$. Семейство морфизмов $F = (f_\alpha : R_\alpha \longrightarrow R),\ \alpha \in I$ называется **покрывающим**, если решето $T_F \hookrightarrow R$, порожденное семейством F , является покрывающим решетом на R .

Определение 1.3. *Пусть* $\mathcal{C}$ *– некоторая категория с расслоенными произведениями.* Предтопология *на* $\mathcal{C}$ *определяется заданием для каждого объекта* R *из* $\mathcal{C}$ *множества* $Cov(R)$ *семейств морфизмов в* R *, удовлетворяющих следующим условиям:*

P1) *Если* $(R_\alpha \to R)\ \alpha \in I$ *принадлежит* $Cov(R)$ *, а* $S \to R$ *– морфизм из* $\mathcal{C}$ *, тогда семейство* $(R_\alpha \times S \to S),\ \alpha \in I$ *принадлежит* $Cov(S)$ *.*

P2) *Если* $(R_\alpha \to R)\ \alpha \in I$ *из* $Cov(R)$ *и* $(R_{\beta_\alpha} \to R_\alpha)\ \beta_\alpha \in J_\alpha$ *из* $Cov(R_\alpha)$ *для каждого* $\alpha \in I$ *, тогда семейство* $(R_\gamma \to R)\ \gamma \in \coprod_{\alpha\in I} J_\alpha$ *принадлежит* $Cov(R)$ *.*

P3) *Семейство с единственным элементом* $R \xrightarrow{id_R} R$ *принадлежит* $Cov(R)$ *.*

Всякая предтопология P на $\mathcal{C}$ порождает топологию $\mathcal{T}$ такую, для которой покрывающими решетами являются решета, содержащие некоторое P -покрывающее семейство.

1.4. Предпучок $X \in \mathcal{C}^\frown$ называется пучком (соотв. отделимым предпучком), если для каждого объекта $R \in \mathcal{C}$ и для любого покрывающего решета $S \in J(R)$ канонический морфизм

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\frown}(R, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\frown}(S, X)$$

является биекцией (соотв. инъекцией).

Будем обозначать через $Shv(\mathcal{C}, \mathcal{T})$ категорию всех пучков на сайте $\Phi = (\mathcal{C}, \mathcal{T})$. Категория $Shv(\mathcal{C}, \mathcal{T})$ является полной подкатегорией в $\mathcal{C}^\frown$.

Функтор вложения $i : Shv(\mathcal{C}, \mathcal{T}) \longrightarrow \mathcal{C}^\frown$ имеет левый сопряженный $\underline{a} : \mathcal{C}^\frown \longrightarrow Shv(\mathcal{C}, \mathcal{T})$, который известен как функтор ассоциирования пучка или функтор пучковизации. Этот функтор $\underline{a}$ сохраняет все конечные пределы и копределы. Для любого предпучка X мы можем определить предпучок LX по правилу

$$LX(R) = \varinjlim_{T \in J(R)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\frown}(T, X) \tag{2}$$

Это соответствие задает функтор из $\mathcal{C}^\frown$ в себя, который обозначим через L . Двойная композиция функтора L с собой изоморфна функтору $i\underline{a}$, то есть имеется изоморфизм $\underline{a}X \cong LLX$ (см. [1], III).

1.5. Пусть $\Phi = (\mathcal{C}, \mathcal{T})$ и $\Phi' = (\mathcal{C}', \mathcal{T}')$ – два сайта. Функтор $u : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ называется непрерывным, если для любого пучка $Y \in Shv(\mathcal{C}', \mathcal{T}')$ предпучок $\hat{u}^*(Y)$ является пучком на сайте Φ . В этом случае $\hat{u}^*$ индуцирует функтор из категории $Shv(\mathcal{C}', \mathcal{T}')$ в категорию $Shv(\mathcal{C}, \mathcal{T})$, который будет обозначаться u^* . Функтор u^* имеет левый сопряженный функтор $u_! = \underline{a}'\hat{u}_! i$.

Функтор $u : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ называется конепрерывным, если для всякого объекта $R \in \mathcal{C}$ и для любого покрывающего решета $S \hookrightarrow u(R)$ решето на R , порожденное всеми стрелками $Z \longrightarrow R$, для которых $u(Z) \longrightarrow u(R)$ пропускается через S , является покрывающим решетом на R . Заметим, что u является конепрерывным, если и только если функтор $\hat{u}_* : \mathcal{C}^\frown \longrightarrow \mathcal{C}'^\frown$ переводит пучки на Φ в пучки на Φ' . Обозначим через u_* функтор из $Shv(\mathcal{C}, \mathcal{T})$ в $Shv(\mathcal{C}', \mathcal{T}')$, который является ограничением $\hat{u}_*$ на категорию пучков. Он имеет левый сопряженный $u^* = \underline{a}\hat{u}^* i'$ (см. [1], III).

Рассмотрим функтор $u : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ и топологию $\mathcal{T}$ на $\mathcal{C}$. **Индуцированной топологией** на $\mathcal{C}'$ называется наибольшая топология, для которой функтор u является непрерывным.

1.6. Зафиксируем некоторый объект $X \in \mathcal{C}^\frown$ и рассмотрим категорию $\mathcal{C}/X$ с каноническим функтором $j_X : \mathcal{C}/X \longrightarrow \mathcal{C}$. Если $\mathcal{T}$ – некоторая топология на $\mathcal{C}$, тогда она индуцирует некоторую топологию $\mathcal{T}_X$ на $\mathcal{C}/X$. Обозначим через Φ_X получившийся сайт $(\mathcal{C}/X, \mathcal{T}_X)$. В [1], III.5. доказано, что решето S на объекте $(Z \longrightarrow X)$ является покрывающим в категории $\mathcal{C}/X$ тогда и только тогда, когда решето $\widehat{j_{X!}}(S) \hookrightarrow Z$ является покрывающим в $\mathcal{C}$. Следовательно, функтор $j_X : \mathcal{C}/X \longrightarrow \mathcal{C}$ непрерывен и конепрерывен одновременно. Мы получаем три сопряженных функтора:

$$
\begin{array}{llcl}
j_{X*}: & Shv(\mathcal{C}/X, \mathcal{T}_X) & \longrightarrow & Shv(\mathcal{C}, \mathcal{T}) \\
j_X^*: & Shv(\mathcal{C}, \mathcal{T}) & \longrightarrow & Shv(\mathcal{C}/X, \mathcal{T}_X) \\
j_{X!}: & Shv(\mathcal{C}/X, \mathcal{T}_X) & \longrightarrow & Shv(\mathcal{C}, \mathcal{T})
\end{array}
\tag{3}
$$

Функтор j_{X*} называется функтором **прямого образа**. Функтор j_X^* называется функтором **обратного образа** или функтором **ограничения** на $\mathcal{C}/X$. Функтор $j_{X!}$ называется **продолжение нулем** на $\mathcal{C}$.

Пусть $m : Y \longrightarrow X$ – морфизм в $\mathcal{C}^\frown$. Он индуцирует функтор $j_m : \mathcal{C}/Y \longrightarrow \mathcal{C}/X$. По тем же самым причинам как и выше, существуют три функтора

$$j_m^* : Shv(\mathcal{C}/X, \mathcal{T}_X) \longrightarrow Shv(\mathcal{C}/Y, \mathcal{T}_Y), \qquad j_{m*}, j_{m!} : Shv(\mathcal{C}/Y, \mathcal{T}_Y) \longrightarrow Shv(\mathcal{C}/X, \mathcal{T}_X)$$

где j_{m*} и $j_{m!}$ правый и левый сопряженные к j_m^* соответственно.

Предложение 1.4. [1] *Функтор* $j_{X!} : Shv(\mathcal{C}/X, \mathcal{T}_X) \longrightarrow Shv(\mathcal{C}, \mathcal{T})$ *может быть представлен как композиция*

$$Shv(\mathcal{C}/X, \mathcal{T}_X) \xrightarrow{e_X} Shv(\mathcal{C}, \mathcal{T})/\underline{a}X \longrightarrow Shv(\mathcal{C}, \mathcal{T}),$$

и функтор e_X *является эквивалентностью.*

Кроме того, для любого предпучка $X \in \mathcal{C}^\frown$ *каноническое отображение* $m : X \longrightarrow \underline{a}X$ *задает эквивалентность* j_m^* *и* $j_{m*} = j_{m!}$ *между категориями* $Shv(\mathcal{C}/X, \mathcal{T}_X)$ *и* $Shv(\mathcal{C}/\underline{a}X, \mathcal{T}_{\underline{a}X})$.

1.7. Топология, для которой каждый представимый предпучок является пучком называется **субканонической**; наибольшая такая топология называется **канонической**. Каноническую топологию будем обозначать can .

Опишем покрывающие семейства для канонической топологии.

Для этого нам понадобится определение уравнителя. Если $f_i : X \longrightarrow Y, i = 1, 2$ – два морфизма в категории $\mathcal{C}$, тогда **уравнитель** – это морфизм $k : K \to X$, являющийся финальным в полной подкатегории $\mathcal{C}/X$, состоящей из морфизмов $k' : K' \to X$, для которых $f_1 k' = f_2 k'$. Если уравнитель двух морфизмов существует, то он единственен с точностью до изоморфизма.

Предположим , что в категории $\mathcal{C}$ существуют все расслоенные произведения. Семейство отображений $(X_\alpha \to X)_{\alpha \in I}$ в категории $\mathcal{C}$ называется **универсальным эффективно эпиморфным семейством**, если для любого отображения $Z \longrightarrow X$ и для всякого объекта $Y \in \mathcal{C}$ следующая диаграмма множеств

$$\mathrm{Hom}(Z,Y) \longrightarrow \prod_{\alpha\in I} \mathrm{Hom}(Z\times_X X_\alpha, Y) \rightrightarrows \prod_{\alpha,\beta\in I} \mathrm{Hom}(Z\times_X (X_\alpha \times_X X_\beta), Y)$$

является уравнителем.

Это очевидно, что семейство отображений является покрывающим в канонической топологии тогда и только тогда, когда оно есть универсальное эффективно эпиморфное семейство. Пусть X – некоторый объект $\mathcal{C}$. Семейство $(W_\alpha \longrightarrow W)_{\alpha\in I}$ является покрывающим для объекта $(W \to X) \in \mathcal{C}/X$ в канонической топологии на $\mathcal{C}/X$ тогда и только тогда, когда оно есть универсальное эффективно эпиморфное семейство в.

Предложение 1.5. *Пусть X – предпучок на категории $\mathcal{C}$. Тогда топология на $\mathcal{C}/X$, индуцированная канонической топологией на $\mathcal{C}$ относительно функтора j_X : $\mathcal{C}/X \longrightarrow \mathcal{C}$, совпадает с канонической топологией на $\mathcal{C}/X$.*

Это следует из [1] Cor.3.3 и описания покрывающих семейств в канонической топологии на $\mathcal{C}$ и на $\mathcal{C}/X$.

2. Окольцованные сайты и квазикогерентные пучки.

2.1. Категория $\mathcal{C}$ с предпучком колец $\mathcal{A}$ называется **окольцованной категорией**. Сайт $\Phi = (\mathcal{C}, \mathcal{T})$ с пучком колец $\mathcal{A}$ называется **окольцованным сайтом**.

Пусть $\Phi = (\mathcal{C}, \mathcal{T})$ – окольцованный сайт с пучком колец $\mathcal{A}$. Предпучок (правых) $\mathcal{A}$-модулей – это предпучок $\mathcal{M}$ со структурой (правого) модуля над пучком колец $\mathcal{A}$. Если $\mathcal{M}$ является пучком, то мы будем называть его пучком (правых) $\mathcal{A}$-модулей.

Обозначим через $\mathrm{Mod}_r(\mathcal{A}, \mathcal{T})$ категорию пучков (правых) $\mathcal{A}$-модулей на сайте Φ . Категория $\mathrm{Mod}_r(\mathcal{A}, \mathcal{T})$ является абелевой категорией, удовлетворяющей условиям AB5 и AB3* , и имеет множество порождающих (см. [1], II).

2.2. Пусть X – объект $\mathcal{C}^\frown$. Категория $\mathcal{C}/X$ с топологией $\mathcal{T}_X$, индуцированной функтором $j_X : \mathcal{C}/X \longrightarrow \mathcal{C}$, образует сайт $\Phi_X = (\mathcal{C}/X, \mathcal{T}_X)$. Этот сайт окольцован пучком колец $\mathcal{A}_X := j_X^* \mathcal{A}$. Будем обозначать категорию пучков (правых) $\mathcal{A}_X$-модулей через $\mathrm{Mod}_r(\mathcal{A}_X, \mathcal{T}_X)$ (или через $\mathrm{Mod}_r(X, \mathcal{T}_X)$, когда пучок колец зафиксирован).

Пусть $\mathcal{M}$ – пучок (правых) $\mathcal{A}$-модулей. Пучок $j_X^*\mathcal{M}$ имеет структуру (правого) $\mathcal{A}_X$-модуля. Если теперь $\mathcal{N}$ – пучок (правых) $\mathcal{A}_X$-модулей, тогда $j_{X*}\mathcal{N}$ является пучком (правых) $j_{X*}\mathcal{A}_X$-модулей. Используя каноническое отображение $\mathcal{A} \longrightarrow j_{X*}\mathcal{A}$, мы получаем, что $j_{X*}\mathcal{N}$ имеет структуру (правого) $\mathcal{A}$-модуля. Таким образом, существует пара сопряженных функторов:

$$\mathrm{Mod}_r(\mathcal{A}_X,\mathcal{T}_X) \quad \underset{j_{X*}}{\overset{j_X^*}{\longleftrightarrow}} \quad \mathrm{Mod}_r(\mathcal{A},\mathcal{T})$$

(для функторов между категориями пучков модулей мы используем те же самые обозначения как в 1.6 для функторов между категориями пучков множеств).

Функтор $j_X^* : \mathrm{Mod}_r(\mathcal{A},\mathcal{T}) \longrightarrow \mathrm{Mod}_r(\mathcal{A}_X,\mathcal{T}_X)$ имеет также левый сопряженный функтор $j_{X!}$, который называется продолжение нулем. Отметим, что в отличии от функторов j_X^* и j_{X*}, композиция функтора $j_{X!}$ для пучков модулей с забывающим функтором в категорию пучков множеств не совпадает с функтором $j_{X!}$ для пучков множеств, определенным в 1.6 (см. [1], IV.11.).

Пусть $m : Y \longrightarrow X$ – морфизм в $\mathcal{C}^\frown$. Как и выше, функтор $j_m : \mathcal{C}/Y \longrightarrow \mathcal{C}/X$ индуцирует три функтора

$$j_m^* : \mathrm{Mod}_r(\mathcal{A}_X,\mathcal{T}_X) \longrightarrow \mathrm{Mod}_r(\mathcal{A}_Y,\mathcal{T}_Y), \qquad j_{m*}, j_{m!} : \mathrm{Mod}_r(\mathcal{A}_Y,\mathcal{T}_Y) \longrightarrow \mathrm{Mod}_r(\mathcal{A}_X,\mathcal{T}_X)$$

где j_{m*} и $j_{m!}$ являются правым и левым сопряженными к j_m^* соответственно. Более того, функторы j_m^* and j_{m*} коммутируют с аналогичными функторами между категориями множеств, определенными в 1.6, относительно забывающих функторов.

Для каждого пучка $\mathcal{A}_X$-модулей $\mathcal{F}$ на X и для любого морфизма $m : Y \longrightarrow X$ мы определим пространство сечений пучка $\mathcal{F}$ над Y по формуле

$$\Gamma(Y,\mathcal{F}) := \mathrm{Hom}(\mathcal{A}_Y, j_m^*\mathcal{F}).$$

Предложение 2.1. *Пусть* $\Phi = (\mathcal{C},\mathcal{T})$ *– сайт, окольцованный пучком колец* $\mathcal{A}$ *. Для предпучка* $X \in \mathcal{C}^\frown$ *рассмотрим канонический морфизм* $m : X \longrightarrow \underline{a}X$ *ассоциированного пучка. Тогда функторы* j_m^* *и* j_{m*} *между категориями* $\mathrm{Mod}_r(\mathcal{A}_X,\mathcal{T}_X)$ *и* $\mathrm{Mod}_r(\mathcal{A}_{\underline{a}X},\mathcal{T}_{\underline{a}X})$ *являются квази-обратимыми эквивалентностями.*

Это утверждение следует из предложения 1.4.

2.3. Предположим, что предпучок X представим, то есть $X \in \mathcal{C}$. Пусть M – (правый) $\mathcal{A}(X)$-модуль. Сопоставим ему предпучок (правых) $\mathcal{A}_X$-модулей $\widetilde{M}$ на категории $\mathcal{C}/X$, задаваемый по правилу

$$\widetilde{M}(S) := M \otimes_{\mathcal{A}(X)} \mathcal{A}(S).$$

для произвольного объекта $S \to X$ из $\mathcal{C}/X$.

Теперь рассмотрим произвольный объект $X \in \mathcal{C}^\frown$ и соответствующую категорию $\mathcal{C}/X$.

Определение 2.2. *Предпучок (правых)* $\mathcal{A}_X$*-модулей* $\mathcal{F}$ *на категории* $\mathcal{C}/X$ *будем называть (правым)* квазикогерентным модулем *на* X *, если для всякого* $m \in X(R)$

предпучок $\widehat{j_m}^*(\mathcal{F})$ *на* $\mathcal{C}/R$ *с канонической структурой (правого)* $\mathcal{A}_R$ *-модуля имеет вид* $\widetilde{M}$ *, где* M *– (правый)* $\mathcal{A}(R)$ *-модуль. Квазикогерентный модуль называется локально свободным, если для любого* $m \in X(R)$ *модуль* M *является проективным.*

Морфизмы между квазикогерентными модулями, по определению, – это морфизмы между ними как предпучками (правых) $\mathcal{A}_X$ -модулей. Обозначим через $\mathrm{Qcoh}_r(X)$ категорию (правых) квазикогерентных модулей на X . Она является полной подкатегорией в категории всех предпучков (правых) $\mathcal{A}_X$ модулей.

Отметим, что определение квазикогерентного модуля на $X \in \mathcal{C}^\frown$ не зависит от топологии.

2.4. Из определения немедленно следует, что для любого представимого объекта $R \in \mathcal{C}$ квазикогерентный пучок изоморфен $\widetilde{M}$ для некоторого $\mathcal{A}(R)$ -модуля M , то есть категория $\mathrm{Qcoh}_r(R)$ в етом случае эквивалентна категории (правых) $\mathcal{A}(R)$ -модулей. Таким образом, предпучок (правых) $\mathcal{A}_X$ -модульs $\mathcal{F}$ является квазикогерентным на $X \in \mathcal{C}^\frown$ тогда и только тогда, когда для каждого $(R \xrightarrow{s} X) \in \mathcal{C}/X$ предпучок $\widehat{j_s}^*\mathcal{F}$ квазикогерентный на R .

2.5. Для всякого $X \in \mathcal{C}^\frown$ категория $\mathrm{Qcoh}_r(X)$ имеет все коядра и все прямые суммы. Следовательно, она обладает всеми малыми копределами (см. [4] I.5).

Пусть $m : Y \longrightarrow X$ – морфизм в $\mathcal{C}^\frown$. Функтор $\widehat{j_m}^* : (\mathcal{C}/X)^\frown \longrightarrow (\mathcal{C}/Y)^\frown$ индуцирует функтор обратного образа из $\mathrm{Qcoh}_r(X)$ в $\mathrm{Qcoh}_r(Y)$, который будет обозначаться m^* . Функтор m^* точен справа, то есть он сохраняет коядра. Для квазикогерентного модуля $\mathcal{F}$ на X и для всякого морфизма $m : Y \longrightarrow X$ мы можем определить пространство сечений $\mathcal{F}$ над Y по формуле

$$\Gamma(Y, \mathcal{F}) := \mathrm{Hom}(\mathcal{A}_Y, m^*\mathcal{F})$$

2.6. Предположим, что топология $\mathcal{T}$ на $\mathcal{C}$ удовлетворяет следующему условию: всякий квазикогерентный модуль на объекте $X \in \mathcal{C}^\frown$ является пучком в топологии $\mathcal{T}_X$ на $\mathcal{C}/X$. В этом случае категория $\mathrm{Qcoh}(X)$ является полной подкатегорией в $\mathrm{Mod}(\mathcal{A}_X, \mathcal{T}_X)$. Обозначим через φ_X функтор вложения $\mathrm{Qcoh}(X) \hookrightarrow \mathrm{Mod}(\mathcal{A}_X, \mathcal{T}_X)$.

Предложение 2.3. *Пусть* $\Phi = (\mathcal{C}, \mathcal{T})$ *– сайт окольцованный пучком колец* $\mathcal{A}$ *. Предположим, что все квазикогерентные модули на любом обьекте* X *являются пучками в топологии* $\mathcal{T}_X$ *на* $\mathcal{C}/X$ *. Пусть* $m : X \longrightarrow \underline{a}X$ *– каноническое отображение ассоциирования пучка для предпучка* $X \in \mathcal{C}^\frown$*. Тогда функтор обратного образа* $m^* : \mathrm{Qcoh}(\underline{a}X) \longrightarrow \mathrm{Qcoh}(X)$ *является вполне строгим.*

Доказательство. Существует коммутативная диаграмма функторов

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Qcoh}(X) & \xhookrightarrow{\varphi_X} & \mathrm{Mod}(\mathcal{O}_X, can_X) \\ {\scriptstyle m^*}\Big\uparrow & & \Big\uparrow{\scriptstyle j_m^*} \\ \mathrm{Qcoh}(\underline{c}X) & \xhookrightarrow{\varphi_{\underline{c}X}} & \mathrm{Mod}(\mathcal{O}_{\underline{c}X}, can_{\underline{c}X}) \end{array}$$

в которой горизонтальные стрелки являются полными вложениями. Из предложения 2.1 следует, что функтор j_m^* является эквивалентностью. Следовательно, функтор m^* есть полное вложение. $\square$

2.7. Предположим, что функтор вложения $\varphi_X : \mathrm{Qcoh}_r(X) \longrightarrow \mathrm{Mod}_r(\mathcal{A}_X, \mathcal{T}_X)$ has a правый сопряженный функтор Q_X . Функтор Q_X называется когерейтором. Так как φ_X является вполне строгим, композиция $Q_X\varphi_X$ изоморфна тождественному функтору на $\mathrm{Qcoh}_r(X)$. Если $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G}$ некоторый морфизм в $\mathrm{Qcoh}_r(X)$, то он имеет ядро $Ker(f)$, которое получается как $Q_X Ker(\varphi_X(f))$.

Легко проверить, что , если когерейтор существует, то категория $\mathrm{Qcoh}_r(X)$ является абелевой.

Для представимого объекта $X \in \mathcal{C}$ когерейтор Q_X существует и он является функтором, переводящим пучок $\mathcal{A}_X$ -модулей $\mathcal{F}$ в квазикогерентный модуль $\widetilde{\mathcal{F}(X)}$.

Пусть $m : Y \longrightarrow X$ – морфизм в $\mathcal{C}^\wedge$. Если существует когерейтор Q_X , тогда функтор m^* имеет правый сопряженный функтор m_* , который определяется как композиция $Q_X j_{m*}\varphi_Y$.

2.8. Каждому предпучку $X \in \mathcal{C}^\wedge$ мы сопоставили категорию (правых) квазикогерентных модулей $\mathrm{Qcoh}_r(X)$. Эта конструкция может быть распространена на больший класс объектов в двух направлениях.

Во-первых, давайте рассмотрим вложение $i : Y \hookrightarrow X$. Определим категорию пары $\mathrm{Qcoh}_r(X, Y)$ как полную подкатегорию в $\mathrm{Qcoh}_r(X)$, состоящую из таких модулей $\mathcal{F}$, для которых $i^*(\mathcal{F}) \equiv 0$.

Всякое вложение $i : Y \hookrightarrow X$ дает фактор-объект X/Y . Это объект с отмеченной точкой и он определяется как копроизведение

$$\begin{array}{ccc} Y & \overset{i}{\hookrightarrow} & X \\ \big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle p} \\ * & \hookrightarrow & X/Y \end{array}$$

Можно сравнить категории $\mathrm{Qcoh}_r(X/Y, *)$ и $\mathrm{Qcoh}_r(X, Y)$.

Предложение 2.4. *Естественный функтор* $p^* : \mathrm{Qcoh}(X/Y, *) \longrightarrow \mathrm{Qcoh}(X, Y)$ *является эквивалентностью.*

Доказательство. Давйте построим квазиобратный функтор $p_* : \mathrm{Qcoh}_r(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Qcoh}_r(X/Y, *)$. Для любого $R \in \mathcal{C}$ имеем равенство множеств $X/Y(R) = X(R)/Y(R)$. Пусть $s \in X/Y(R)$ – сечение. Либо существует единственный подъем сечения s до сечения $s' \in X(R)$, либо оно пропускается через $* \to X/Y$. Если $\mathcal{F}$ – квазикогерентный модуль на X такой, что $i^*(\mathcal{F}) \equiv 0$, тогда положим $p_*(\mathcal{F})(s) \cong \mathcal{F}(s')$ или положим равным нулю, если это отмеченное сечение. Легко видеть, что таким образом мы получаем функтор, который квазиобратен p^* . $\square$

2.9. Во-вторых, мы можем рассмотреть не только предпучки множеств, но и предпучки группоидов (или даже предпучки категорий). Под группоидом мы понимаем малую категорию, в которой все стрелки обратимы. Малые группоиды образуют 2–категория. Если мы отождествим все функторы между группоидами, которые эквивалентны, то получим 1–категорию. Обозначим эту категорию всех малых группоидов через Grd . Всякое множество можно рассматривать как группоид, объекты которого – элементы данного множества, а морфизмами являются только тождественные морфизмы. Каждому группоиду G можно сопоставить два множества: первое, $Ob(G)$, – множество всех объектов G , второе, $\pi_0(G)$, – множество связных компонент G . Имеется два естественных отображения группоидов $Ob(G) \longrightarrow G$ и $\pi_0 : G \longrightarrow \pi_0(G)$.

Обозначим через $\mathcal{C}^{\frown}_{gr}$ категорию предпучков группоидов на $\mathcal{C}$, то есть категорию всех контравариантных функторов из $\mathcal{C}$ в категорию малых группоидов Grd . Она содержит категорию $\mathcal{C}^{\frown}$ в качестве полной подкатегории. Всякий предпучок $X \in \mathcal{C}^{\frown}_{gr}$ определяет два предпучка множеств $Ob(X)$ и $\pi_0(X)$, заданных по правилу

$$Ob(X)(R) = Ob(X(R)), \quad \pi_0(X)(R) = \pi_0(X(R)), \qquad R \in \mathcal{C}.$$

Имеются естественные морфизмы $ob_X : Ob(X) \longrightarrow X$ и $\pi_{0X} : X \longrightarrow \pi_0(X)$ между предпучками группоидов. Эти соответствия задают два функтора Ob и π_0 из $\mathcal{C}^{\frown}_{gr}$ в $\mathcal{C}^{\frown}$.

Морфизм $\pi_{0X} : X \longrightarrow \pi_0(X)$ расщепляется для каждого $X \in \mathcal{C}^{\frown}_{gr}$.(Действительно, выбирая для каждой компоненты связности некоторый представитель, мы получаем расщепление). Функтор $\pi_0 : \mathcal{C}^{\frown}_{gr} \longrightarrow \mathcal{C}^{\frown}$ является одновременно правым и левым сопряженным к каноническому вложению $\mathcal{C}^{\frown} \longrightarrow \mathcal{C}^{\frown}_{gr}$.

С каждым сайтом $\Phi = (\mathcal{C}, \mathcal{T})$ можно связать категорию пучков группоидов $Shv_{gr}(\mathcal{C}, \mathcal{T})$ на нем. Предпучок группоидов $X \in \mathcal{C}^{\frown}_{gr}$ называется пучком , если для любого группоида $G \in \mathrm{Grd}$ предпучок множеств:

$$R \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{Grd}}(G\,,\ X(R))$$

есть пучок.

2.10. Рассмотрим сайт $\Phi = (\mathcal{C}, \mathcal{T})$ окольцованный пучком $\mathcal{A}$. Для любого предпучка категорий (в частности предпучка группоидов) определим категорию $\mathcal{C}/X$. Множество объектов $\mathcal{C}/X$ – это множество всех $s \in Ob(X(S)),\ S \in \mathcal{C}$. Морфизмы из $s \in Ob(X(S))$ в $r \in Ob(X(R))$ – это пары (α, f) , где $f : S \longrightarrow R$ из $\mathcal{C}$ и α – некоторый морфизм из s в $X(f)(r)$ в категории $X(S)$. Существует канонический функтор $j_X : \mathcal{C}/X \longrightarrow \mathcal{C}$. Индуцируя топологию, получаем сайт $\Phi_X = (\mathcal{C}/X, \mathcal{T}_X)$, окольцованный пучком $\mathcal{A}_X = j_X^*\mathcal{A}$. Можно ввести категорию пучков $\mathcal{A}_X$ -модулей $\mathrm{Mod}_r(\mathcal{A}_X, \mathcal{T}_X)$. Кроме того, повторяя определение 2.2, получаем категорию $\mathrm{Qcoh}_r(X)$

квазикогерентных модулей на X . Морфизмы ob_X и π_{0X} индуцируют функторы обратного образа $ob_X^* : \mathrm{Qcoh}(X) \longrightarrow \mathrm{Qcoh}(Ob(X))$ и $\pi_{0X}^* : \mathrm{Qcoh}(\pi_0(X)) \longrightarrow \mathrm{Qcoh}(X)$ соответственно.

3. Пучки в коммутативной геометрии.

3.1. Зафиксируем коммутативное кольцо k . Обозначим через $Comalg/k$ категорию коммутативных алгебр над k и через Aff/k обозначим категорию аффинных схем, которая является противоположной к $Comalg/k$. Отметим, что категория аффинных схем имеет все расслоенные произведения, соответствующие тензорным произведениям в категории $Comalg/k$. Каноническое вложение категории аффинных схем в категорию всех схем Sch/k сохраняет расслоенные произведения и конечные несвязные объединения. Однако оно не сохраняет копроизведения. К примеру, бесконечное несвязное объединение $\{Spec(R_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ в Sch/k не совпадает со $Spec(\prod\limits_{\alpha\in I} R_\alpha)$.

3.2. В этой главе под категорией $\mathcal{C}$ мы имеем ввиду категорию всех аффинных схем Aff/k . Канонический контравариантный функтор $Aff/k \longrightarrow Comalg/k$ задает предпучок колец $\mathcal{O}$ на категории Aff/k с

$$\mathcal{O}(Spec(R)) := R$$

для всякой k-алгебры R . Этот предпучок представляется групповой схемой $Speck[t]$. Следовательно, он является пучком в любой суб канонической топологии на $\mathcal{C}$.

Таким образом, для любого объекта $X \in \mathcal{C}^\frown$ категория $\mathcal{C}/X$ окольцована предпучком $\mathcal{O}_X$, который является пучком для всякой субканонической топологии.

3.3. Обозначим через can каноническую топологию на $\mathcal{C} = Aff/k$ и через $\underline{c} : \mathcal{C}^\frown \longrightarrow Shv(\mathcal{C}, can)$ обозначим функтор ассоциирования пучка определенный в 1.4, который является левым сопряженным к функтор включения $i : Shv(\mathcal{C}, can) \longrightarrow \mathcal{C}^\frown$. Покрывающими семействами для канонической топологии являются универсальные эффективно эпиморфные семейства, определенные в 1.7. В случае категории аффинных схем существует простое но полезное описание для универсальных эффективно эпиморфных семейств в терминах модулей.

Предложение 3.1. *Семейство* $(f_\alpha : Spec(R_\alpha) \to Spec(R))_{\alpha\in I}$ *является универсальным эффективно эпиморфным в* Aff/k *тогда и только тогда, когда для каждого* R*-модуля* M *следующая диаграмма*

$$M \longrightarrow \prod_{\alpha\in I} M\otimes_R R_\alpha \rightrightarrows \prod_{\alpha,\beta\in I} M\otimes_R (R_\alpha\otimes R_\beta) \tag{4}$$

является уравнителем.

Доказательство. $\Rightarrow$ Возьмем R-модуль M и рассмотрим модуль $S = R\oplus M$ как R-алгебру с законом умножения заданным по правилу $(r_1, m_1)(r_2, m_2) = (r_1r_2, r_1m_2 + m_2r_1)$. Обозначим через S_α алгебру $S\otimes_R R_\alpha$. Рассмотрим семейство $(g_\alpha : Spec(S_\alpha) \to$

$Spec(S))_{\alpha \in I}$, где $g_\alpha = 1_S \otimes f_\alpha$. Оно является эффективно эпиморфным. Следовательно, вычисляя морфизмы в схему $Spec(k[t])$, получаем, что

$$S \longrightarrow \prod_{\alpha \in I} S \otimes_R R_\alpha \rightrightarrows \prod_{\alpha, \beta \in I} S \otimes_R (R_\alpha \otimes R_\beta) \tag{5}$$

является уравнителем. И значит, для модуля M как для прямого слагаемого это также выполнено.

$\Leftarrow$ Пусть $(f_\alpha : Spec(R_\alpha) \to Spec(R))_{\alpha \in I}$ некоторое семейство. Мы знаем, что для каждого морфизма $Spec(S) \longrightarrow Spec(R)$ последовательность (5) точна. Значит для любой алгебры A последовательность $\mathrm{Hom}'s$ из A в последовательность (5) в категории коммутативных алгебр также точна. Следовательно, $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ является универсальным эффективно эпиморфным семейством. $\square$

Как и раньше, для любого предпучка $X \in \mathcal{C}^\frown$ будем обозначать через $\mathrm{Qcoh}(X)$ категорию квазикогерентных модулей на X и через $\mathrm{Mod}(X, can_X)$ категорию пучков $\mathcal{O}_X$ -модулей в канонической топологии на $\mathcal{C}/X$.

Следствие 3.2. *Пусть X – некоторый предпучок множеств на категории $\mathcal{C} = Aff/k$. Всякий квазикогерентный модуль на X является пучком в канонической топологии на категории $\mathcal{C}/X$. И значит, категория $\mathrm{Qcoh}(X)$ является полной подкатегорией в $\mathrm{Mod}(X, can_X)$.*

Немедленно следует из предыдущего предложения и предложения 1.5.

Обозначим через φ_X вложение $\mathrm{Qcoh}(X) \hookrightarrow \mathrm{Mod}(X, can_X)$.

3.4. Категория всех схем Sch/k вкладывается как полная подкатегория в $\mathcal{C}^\frown = (Aff/k)^\frown$ очевидным образом: схеме X соответсвует предпучок множеств, значение которого на аффинной схеме $Spec(R)$ совпадает с множеством $\mathrm{Hom}(Spec(R), X)$. Для любой схемы $X \in Sch/k$ квазикогерентные модули в нашем определении однозначно соответствуют квазикогерентным пучкам в обычном определении. Действительно, по каждому квазикогерентному пучку $\mathcal{F}$ на схеме X мы можем построить квазикогерентный модуль F на $\mathcal{C}/X$ по правилу

$$F(Spec(R)) = \Gamma(Spec(R), m^*\mathcal{F})$$

для каждого $m : Spec(R) \longrightarrow X$. Это задает эквивалентность, квазиобратную к которому можно определить таким образом. Для квазикогерентного модуля F на $\mathcal{C}/X$ зададим квазикогерентный пучок $\mathcal{F}$ на схеме X по формуле

$$\mathcal{F}(U) = \Gamma(U, m^*F) = \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_U, m^*F)$$

для каждого вложения открытого по Зарискому множества $m : U \hookrightarrow X$. Некоторые рассуждения, которые мы оставляем читателю, требуются, чтобы показать, что $\mathcal{F}$ является пучком в топологии Зариского.

Если схема X квазикомпактна и квазиотделима тогда существует когерейтор $Q_X : \mathrm{Mod}(X, can_X) \longrightarrow \mathrm{Qcoh}(X)$. Для категории пучков $\mathcal{O}_X$ -модулей на малом сайте Зариского это доказано в [2], II.3. В нашей ситуации это также выполнено по тем же самым причинам. Действительно, при этих условиях на схему категория $\mathrm{Qcoh}(X)$ имеет множество порождающих и все копределы. Так как вложение φ_X сохраняет копределы, теорема о сопряженном функторе дает существование правого сопряженного Q_X .

Предложение 3.3. *Пусть* X *– предпучок на категории* $\mathcal{C} = Aff/k$ *и* $m : X \longrightarrow \underline{c}X$ *– морфизм ассоциирования пучка в канонической топологии. Тогда функтор обратного образа* $m^* : \mathrm{Qcoh}(\underline{c}X) \longrightarrow \mathrm{Qcoh}(X)$ *является вполне строгим.*

Немедленно следует из предложений 2.3 и следствие 3.2.

Предложение 3.4. *Пусть* $T \overset{i}{\hookrightarrow} Spec(R)$ *– решето на объекте* $Spec(R) \in \mathcal{C}$ *. Решето* T *является покрывающим в канонической топологии тогда и только тогда, когда функтор* $i^* : \mathrm{Qcoh}(Spec(R)) \longrightarrow \mathrm{Qcoh}(T)$ *является вполне строгим*

Доказательство. Мы можем предполагать, что решето T порождено семейством $(f_\alpha : Spec(R_\alpha) \to Spec(R))_{\alpha \in I}$. В 2.7 было показано, что функтор i^* имеет правый сопряженный функтор i_* , который переводит квазикогерентный модуль $\mathcal{F}$ на T в $\widetilde{M}$ на $Spec(R)$, где модуль M есть уравнитель

$$\prod_{\alpha \in I} \mathcal{F}(Spec(R_\alpha)) \rightrightarrows \prod_{\alpha, \beta \in I} \mathcal{F}(Spec(R_\alpha \otimes R_\beta)).$$

Предположим, что i^* вполне строгий. Тогда $i_* i^*(\widetilde{M}) \cong \widetilde{M}$ для любого R -модуля M . Значит, последовательность (4) точна, и решето T является покрывающим в канонической топологии.

Обратное утверждение сразу следует из предложения 3.3. □

3.5. На категории Aff/k существует очень важная субканоническая топология. Это хорошо известная плоская топология. Она порождается универсальными эффективно эпиморфными семействами $(f_\alpha : Spec(R_\alpha) \to Spec(R))_{\alpha \in I}$, в которых все морфизмы f_α являются плоскими, то есть R_α плоские R -алгебры для всех α . Плоская топология на категории Aff/k будет обозначаться ft .

3.6. Теперь мы введем еще одну субканоническую топологию, которую назовем топологией эффективного спуска (edt).

Напомним вкратце теорию спуска для модулей над коммутативными кольцами. Пусть $f : R \longrightarrow S$ – гомоморфизм коммутативных колец. Пусть M – некоторый S -модуль. Рассмотрим два $S \otimes_R S$ -модуля $M \otimes_R S$ и $S \otimes_R M$. Всякий $S \otimes_R S$ -гомоморфизм $\phi : M \otimes_R S \to S \otimes_R M$ определяет три $S \otimes_R S \otimes_R S$ -homoморфизма

$$\begin{aligned} \phi_1 : \quad & S \otimes_R M \otimes_R S \longrightarrow S \otimes_R S \otimes_R M \\ \phi_2 : \quad & M \otimes_R S \otimes_R S \longrightarrow S \otimes_R S \otimes_R M \\ \phi_3 : \quad & M \otimes_R S \otimes_R S \longrightarrow S \otimes_R M \otimes_R S \end{aligned}$$

тензорно умножая ϕ с 1_S по первой, второй и третьей компоненте соответственно. Кроме того, в композиции с умножением $\mu : S \otimes_R M \to M$, отображение ϕ индуцирует гомоморфизм S-модулей $\bar{\phi} : M \to M$:

$$\bar{\phi} : M \longrightarrow M \otimes_R S \xrightarrow{\phi} S \otimes_R M \xrightarrow{\mu} M$$

Под **данными спуска** на S-модуль M мы будем понимать $S \otimes_R S$-гомоморфизм $\phi : M \otimes_R S \to S \otimes_R M$,для которого $\phi_2 = \phi_1 \phi_3$ и $\bar{\phi}$ является тождественным на M .

Если (M, ϕ) и (M', ϕ') две такие пары, тогда морфизм $g : (M, \phi) \to (M', \phi')$ между ними – это S-гомоморфизм $g : M \to M'$, для которого $(1_S \otimes g)\phi = \phi'(g \otimes 1_S)$.

Таким образом, для любого гомоморфизм коммутативных колец $f : R \longrightarrow S$ получается категория данных спуска. Обозначим ее через $Dd(f)$. Существует функтор $d_f : \mathrm{Mod}(R) \longrightarrow Dd(f)$, который переводит R-модуль N в пару $(N \otimes_R S, \phi_N)$, где ϕ_N определяется по правилу $\phi_N(n \otimes s_1 \otimes s_2) = s_1 \otimes n \otimes s_2$. (R-морфизм $h : N \longrightarrow N'$ переходит в $h \otimes 1_S$).

Гомоморфизм коммутативных колец $f : R \longrightarrow S$ называется **гомоморфизмом эффективного спуска**, если функтор $d_f : \mathrm{Mod}(R) \longrightarrow Dd(f)$ является эквивалентностью.

Обозначим через $(T_f \overset{i}{\hookrightarrow} Spec(R)) \in \mathcal{C}^\frown$ решето на $Spec(R)$, состоящее из всех отображений $Spec(B) \longrightarrow Spec(R)$, которые пропускаются через $f^{op} : Spec(S) \longrightarrow Spec(R)$. Как и любое решето, мы можем рассматривать T_f в качестве подпредпучка множеств в $Spec(R)$. Нетрудно видеть, что категория $Dd(f)$ есть ни что иное как категория $\mathrm{Qcoh}(T_f)$ квазикогерентных модулей на T_f и функтор d_f совпадают с функтор обратного образа i^* .

Теперь, мы скажем, что семейство $F = (f_\alpha : Spec(R_\alpha) \to Spec(R))_{\alpha \in I}$ является **семейством эффективного спуска**, если функтор $i^* : \mathrm{Qcoh}(Spec(R)) \longrightarrow \mathrm{Qcoh}(T_F)$ есть эквивалентность, где $T_F \overset{i}{\hookrightarrow} Spec(R) \in \mathcal{C}^\frown$ – это решето, порожденное семейством F .

Предложение 3.5. *Для семейств эффективного спуска выполнены условия P1)–3) определения 1.3, то есть они задают предтопологию на* $\mathcal{C} = Aff/k$.

Доказательство. Следствие 3.4 дает нам, что каждое семейство эффективного спуска является универсальным эффективно эпиморфным семейством. Пусть $F = (Spec(R_\alpha) \to Spec(R))_{\alpha \in I}$ – некоторое семейство эффективного спуска, а $Spec(S) \longrightarrow Spec(R)$ – некоторый морфизм. Возьмем квазикогерентный модуль $\bar{\mathcal{F}}$ на решете $T_{\bar{F}}$, порожденном семейством $\bar{F} = (Spec(R_\alpha \otimes_R S) \to Spec(S))_{\alpha \in I}$. Определим квазикогерентный модуль $\mathcal{F}$ на T_F по правилу $\mathcal{F}(\cdot) := \bar{\mathcal{F}}(\cdot \times_{Spec(R)} Spec(S))$ (он является прямым образом $\bar{\mathcal{F}}$ относительно канонического отображения из $T_{\bar{F}}$ в T_F . Так как F является семейством эффективного спуска, найдется R-модуль M , для которого $\mathcal{F} = i_F^* \widetilde{M}$, и модуль M является уравнителем пары

$$\prod_{\alpha \in I} \bar{\mathcal{F}}(Spec(S \otimes_R R_\alpha)) \;\rightrightarrows\; \prod_{\alpha, \beta \in I} \bar{\mathcal{F}}(Spec(S \otimes_R R_\alpha \otimes_R R_\beta)).$$

Следовательно, R-модуль M имеет структуру S-модуля, и $\bar{\mathcal{F}} = i^*_{\bar{F}}\widetilde{M}$. Значит, $\bar{F}$ – семейство эффективного спуска.

Пусть $F = (Spec(R_\alpha) \to Spec(R))_{\alpha\in I}$ – семейство эффективного спуска. Кроме того, зафиксируем семейства эффективного спуска $G_\alpha = (Spec(R_{\beta_\alpha}) \to Spec(R_\alpha))_{\beta_\alpha \in J_\alpha}$ для каждого $\alpha \in I$. Пусть G – некоторое семейство $(Spec(R_\gamma) \to Spec(R))_{\gamma\in \coprod_{\alpha\in I} J_\alpha}$. Рассмотрим покрывающие решета $i_F : T_F \hookrightarrow Spec(R)$, $i_{G_\alpha} : T_{G_\alpha} \hookrightarrow Spec(R_\alpha)$ и решето $i_G : T_G \hookrightarrow Spec(R)$ с отображением $p : T_G \hookrightarrow T_F$.

Обозначим через $f_\alpha : Spec(R_\alpha) \longrightarrow T_F$ и $g_\alpha : T_{G_\alpha} \to T_G$ канонические морфизмы в категории $\mathcal{C}^\frown$. Рассмотрим диаграмму функторов.

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Mod}(T_{G_\alpha}, can) & \xleftarrow{j^*_{g_\alpha}} & \mathrm{Mod}(T_G, can) \\
\wr\Big\uparrow j^*_{i_{G_\alpha}} & & \wr\Big\uparrow j^*_p \\
\mathrm{Mod}(Spec(R_\alpha), can) & \xleftarrow{j^*_{f_\alpha}} & \mathrm{Mod}(T_F, can)
\end{array}$$

Обе вертикальные стрелки яляются эквивалентностями, потому что все семейства эффективного спуска являются покрывающими в канонической топологии.

Пусть $\mathcal{F}$ – некоторый квазикогерентный модуль на T_G . По следствию 3.2 он является пучком $\mathcal{O}_{T_G}$-модулей в канонической топологии. Рассмотрим пучки модулей $\mathcal{F}_\alpha := j^*_{f_\alpha} j_{p*}(\mathcal{F})$. Так как для каждого α имеется изоморфизм $j^*_{i_{G_\alpha}}(\mathcal{F}_\alpha) \cong j^*_{g_\alpha}(\mathcal{F})$, и семейство G_α является семейством эффективного спуска, мы получаем, что пучки $\mathcal{F}_\alpha$ является квазикогерентными. Учитывая, что решето T_F порождено семейством $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$, мы можем заключить, что пучок модулей $j_{p*}(\mathcal{F})$ также является квазикогерентным. Таким образом, каждый квазикогерентный модуль $\mathcal{F}$ на T_G является подъемом квазикогерентного модуля $j_{p*}(\mathcal{F})$. Следовательно, функтор $p^* : \mathrm{Qcoh}(T_F) \longrightarrow \mathrm{Qcoh}(T_G)$ является не только вполне строгим, но и есть эквивалентность. Значит и функтор $i^*_G : \mathrm{Qcoh}(Spec(R)) \longrightarrow \mathrm{Qcoh}(T_G)$ тоже есть эквивалентнось, и семейство G является семейством эффективного спуска. □

3.7. Топология **эффективного спуска** на категории $\mathcal{C} = Aff/k$ (edt) – это топология, для которой покрывающими являются решета, порожденные семействами эффективного спуска. По предложению 3.4 топология edt является субканонической. Кроме того, можно показать, что топология эффективного спуска тоньше, чем плоская топология, то есть любое покрытие в плоской топологии является покрытием м в топологии эффективного спуска. Это доказано во многих местах, что строго плоский гомоморфизм коммутативных колец $f : R \longrightarrow S$ является морфизмом эффективного спуска (см. [3], [6], [7]). Эти доказательства распространяются и на плоские семейства.

Обозначим через $\underline{e} : \mathcal{C}^\frown \longrightarrow Shv(\mathcal{C}, edt)$ функтор ассоциирования пучка в топологии эффективного спуска.

Теорема 3.6. *Пусть* $X \in \mathcal{C}^\frown$ *– предпучок, и* $m : X \longrightarrow \underline{e}X$ *– морфизм ассоциирования пучка в топологии эффективного спуска. Тогда функтор обратного образа* $m^* : \mathrm{Qcoh}(\underline{e}X) \longrightarrow \mathrm{Qcoh}(X)$ *является эквивалентностью.*

Доказательство. Функтор $i\underline{e}$ изоморфен композиции $L \circ L$, где L – функтор, определенный по формуле (2) в 1.4, то есть морфизм m является композицией

$$X \xrightarrow{l_X} LX \xrightarrow{l_{LX}} \underline{e}X$$

Таким образом, достаточно показать, что функтор $l_X^* : \mathrm{Qcoh}(LX) \longrightarrow \mathrm{Qcoh}(X)$ есть эквивалентность для любого $X \in \mathcal{C}^\frown$.

По следствию 3.2 категория $\mathrm{Qcoh}(X)$ является полной подкатегорией в категории $\mathrm{Mod}(X, can_X)$. Функтор l_X^* индуцирован функтором $j_{l_X}^* : \mathrm{Mod}(LX, can_{LX}) \longrightarrow \mathrm{Mod}(X, can_X)$, который в свою очередь является эквивалентностью. Следовательно, чтобы доказать теорему, мы должны показать, что для всякого квазикогерентного модуля $\mathcal{F}$ на X пучок $\mathcal{O}_{LX}$-модулей $\mathcal{F}' = j_{l_X *}\mathcal{F}$ является квазикогерентным. Учитывая 2.4, нужно проверить, что для всякого морфизма $s : Spec(R) \longrightarrow LX$ пучок $j_s^*\mathcal{F}'$ является квазикогерентным. По определению функтора L имеем

$$LX(R) = \varinjlim_{T \in J(R)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\frown}(T, X).$$

Значит, существует покрывающее решето $i : T \hookrightarrow Spec(R)$, для которого следующая диаграмма является коммутативной

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{s'} & X \\ {\scriptstyle i}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle l_X} \\ Spec(R) & \xrightarrow{s} & LX \end{array}$$

Так как функторы $j_{l_X}^*$ и $j_{l_X *}$ квазиобратны друг другу по предложению 2.1, существует изоморфизм $j_i^* j_s^* \mathcal{F}' \cong j_{s'}^*\mathcal{F}$ квазикогерентных модулей на T. Так как T является покрывающим решетом, функтор j_i^* индуцирует эквивалентность $i^* : \mathrm{Qcoh}(Spec(R)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Qcoh}(T)$. Следовательно, пучок $j_s^*\mathcal{F}'$ является квазикогерентным на $Spec(R)$ для всех $s : Spec(R) \longrightarrow LX$. Значит, $\mathcal{F}' = j_{l_X *}\mathcal{F}$ – квазикогерентный модуль на LX. □

4. Пучки в некоммутативной геометрии.

4.1. Зафиксируем базисное кольцо k. Обозначим через Alg/k категорию алгебр над базисным кольцом k. Если $f_i : R \longrightarrow S_i,\ i = 1, 2$ – два гомоморфизма алгебр, тогда копроизведение $S_1 \coprod_R S_2$ всегда существует. Это свободное произведение R-алгебр, которое мы будем обозначать $S_1 \star_R S_2$.

Через $NAff/k$ обозначим категорию противоположную к Alg/k. Будем называть ее категорией некоммутативных аффинных схем. Объект $NAff/k$, соответствующий алгебре R, бедет обозначаться через $Sp(R)$. Категория некоммутативных аффинных схем имеет все расслоенные произведения, и произведение $Sp(S_1)\times_{Sp(R)} Sp(S_2)$ есть $Sp(S_1\star_R S_2)$.

4.2. Пусть $N : Aff/k \longrightarrow NAff/k$ – естественный функтор включения, который переводит $Spec(R)$ в $Sp(R)$. Функтор N является вполне строгим и имеет правый сопряженный функтор $Com : NAff/k \longrightarrow Aff/k$. Функтор Com переводит объект $Sp(R)$ в $Spec(R_c)$. Здесь R_c – это максимальная коммутативная факторалгебра алгебры R , то есть $R_c = R/I$, где I – идеал, порожденный всеми соотношениями вида $\langle ab-ba\rangle$.

Существует функтор $\widehat{N}_! : (Aff/k)\hat{}\longrightarrow (NAff/k)\hat{}$, который является продолжением N на категорию предпучков (см. 1.2). По 1.2 функтор $\widehat{N}_!$ имеет следующее описание

$$\widehat{N}_!(X)(Sp(S)) = \varinjlim_{Spec(A)\to X} \mathrm{Hom}(Sp(S), Sp(A)).$$

Функтор $\widehat{N}_!$ явлется вполне строгим по 1.2 и имеет правый сопряженный функтор $\widehat{N}^*$, ограничение которого на $NAff/k$ совпадает с функтором Com .

Мы будем понимать функтор $\widehat{N}_!$ как "грубое"вложение "коммутативной геометрии"в "некоммутативную геометрию". Чтобы получить "тонкое"вложение мы должны рассмотреть предпучки группоидов.

4.3. Для каждого объекта $Sp(S)\in NAff/k$ мы определим категорию I_S . Объекты I_S - это пары $(Spec(A), m)$, где $Spec(A)\in Aff/k$ и $m : Sp(S)\longrightarrow Sp(A)$. Морфизмы из $(Spec(A), m)$ в $(Spec(A'), m')$ – это морфизмы $\xi : Spec(A)\to Spec(A')$, для которых $m' = \xi m$.

Каждый морфизм $f : Sp(S')\longrightarrow Sp(S)$ определяет функтор $I_f : I_S\longrightarrow I_{S'}$. Кроме того, существует функтор $pr_S : I_S\longrightarrow Aff/k$, который переводит объект $(Spec(A), m)$ в $Spec(A)$. Нетрудно проверить, что функтор $\widehat{N}_!$ может быть задан по следующей формуле

$$\widehat{N}_!(X)(Sp(S)) = \varinjlim_{I_S} X(pr_S(\cdot)) \tag{6}$$

4.4. Рассмотрим категорию I_S/X объектов над X . Ее объекты – это тройки вида $(Spec(A), m, a)$ с $m : Sp(S)\to Sp(A)$ и $a : Spec(A)\to X$. Ее морфизмы – это такие морфизмы в I_S , которые совместимы с отображениями в X . Обозначим через $Gr(I_S/X)$ группоид, ассоциированный с категорией I_S (т.е. мы обращаем все стрелки). Всякий морфизм $g : Sp(S')\longrightarrow Sp(S)$ задает функтор $Gr(I_S/X)\longrightarrow Gr(I_{S'}/X)$. С другой стороны, каждый $f : X'\longrightarrow X$ из $(Aff/k)\hat{}$ индуцирует функтор $Gr(I_S/X')\longrightarrow Gr(I_S/X)$.

Теперь для объекта $X\in (Aff/k)\hat{}$ определим предпучок группоидов $\overline{N}X\in (NAff/k)\hat{}_{gr}$ по правилу

$$\overline{N}X(Sp(S)) := Gr(I_S/X) \tag{7}$$

Данное соответствие задает функтор $\overline{N}$ из $(Aff/k)^\frown$ в категорию предпучков группоидов $(NAff/k)^\frown_{gr}$. Из формулы (6) немедленно следует, что $\pi_0(\overline{N}X)$ изоморфен $\widetilde{N}_!X$. Следовательно, имеется коммутативная диаграмма функторов

$$\begin{tikzcd}
(Aff/k)^\frown \arrow[r, "\overline{N}"] \arrow[dr, "\widehat{N}_!"'] & (NAff/k)^\frown_{gr} \arrow[d, "\pi_0"] \\
 & (NAff/k)^\frown
\end{tikzcd}$$

Предложение 4.1. *Функтор* $\overline{N} : (Aff/k)^\frown \longrightarrow (NAff/k)^\frown_{gr}$ *обладает следующими свойствами:*

1) *Предпучок группоидов* $\overline{N}(Spec(A))$ *изоморфен пучку множеств* $N(Spec(A)) = Sp(A)$ *, то есть ограничение функтора* $\overline{N}$ *на категорию* Aff/k *изоморфно* N *;*
2) *Для каждого объекта* $Spec(A) \in Aff/k$ *группоид* $\overline{N}X(Sp(A))$ *эквивалентен множеству* $X(Spec(A))$ *;*
3) *Функтор* $\overline{N}$ *является вполне строгим.*

Доказательство. Группоид, ассоциированный с категорией, в которой имеется финальный или начальный объект, эквивалентен одноточечному множеству. Отсюда получаем, что $Gr(I_S/Spec(A))$ эквивалентен множеству $\mathrm{Hom}_{NAff}(Sp(S), Sp(A))$ для всякой алгебры S и коммутативной алгебры A . Следовательно, $\overline{N}(Spec(A)) \cong Sp(A)$ и свойство 1) выполнено. По тем же причинам, группоид $Gr(I_A/X)$ эквивалентен множеству $X(Spec(A))$ для каждой коммутативной алгебры A . Это доказывает свойство 2).

3) Так как функтор $\widehat{N}_! = \pi_0\overline{N}$ вполне строгий по 4.2, функтор $\overline{N}$ явлется строгим. И мы знаем, что композиция $\widehat{N}^*\pi_0\overline{N}$ изоморфна тождественному функтору на $(Aff/k)^\frown$.

Чтобы доказать полноту, надо проверить, что любой морфизм $f : \overline{N}Y \longrightarrow \overline{N}X$ лежит в образе функтора $\overline{N}$. Морфизм f определяется заданием морфизмов $f_S : Gr(I_S/Y) \longrightarrow Gr(I_S/X)$ для всех $S \in Alg/k$, которые совместимы друг с другом. Пусть $t = (Spec(A), m, a)$ – некоторый элемент $Gr(I_S/Y)$, где $m : Sp(S) \longrightarrow Sp(A)$ и $a \in Y(Spec(A))$. Морфизм f_S переводит этот элемент в $t' = (Spec(A), m, a') \in Gr(I_S/X)$, где $a' \in X(Spec(A))$. Так как f_S и f_A совместимы, получаем, что $a' = f_A(a)$. Следовательно, зная морфизм f_A , мы можем найти элемент a' . Таким образом, каждый морфизм f_S однозначно определяется множеством морфизмов f_A с коммутативными A . Отсюда получаем, что морфизм f совпадает с морфизмом $\overline{N}\widehat{N}^*\pi_0(f)$, и значит, лежит в образе $\overline{N}$, то есть функтор $\overline{N}$ является вполне строгим. □

4.5. Пусть X – некоторый объект из $(Aff/k)^\frown$. С ним мы можем связать две категории Aff/X и $NAff/\overline{N}X$, (определение второй было дано в 2.10). Существует функтор из Aff/X в $NAff/\overline{N}X$, который переводит элемент $a \in X(Spec(A))$ в элемент $(Spec(A), id, a) \in Gr(I_{Spec(A)}/X)$ (см. 4.4). Обозначим этот функтор как $\overline{n}_X$. Он индуцирует функтор обратного образа $\overline{n}_X^* : \mathrm{Qcoh}_r(\overline{N}X) \longrightarrow \mathrm{Qcoh}(X)$.

Сопоставление предпучок множеств $X \in (Aff/k)^\frown$ предпучка группоидов $\overline{N}X \in (NAff/k)^\frown_{gr}$ рассматривается нами как "тонкое"вложение "коммутативной геометрии"в "некоммутативную", по причине того, что выполнено следующее свойство.

Теорема 4.2. *Пусть* X *– объект из* $(Aff/k)^\frown$. *Функтор* $\overline{n}_X^* : \mathrm{Qcoh}_r(\overline{N}X) \longrightarrow \mathrm{Qcoh}(X)$, *индуцированный естественным функтором* $\overline{n}_X : Aff/X \longrightarrow NAff/\overline{N}X$, *является эквивалентностью.*

Доказательство. Мы построим квазиобратный к функтору $\overline{n}_X^*$. Для каждого объекта $X \in Aff/k$ определим предпучок категорий CX на $NAff/k$ (то есть контравариантный функтор из $NAff/k$ в категорию всех малых категорий) по правилу:

$$CX(Sp(S)) := I_S/X.$$

Рассмотрим категорию $NAff/CX$, определенную в 2.10. Кроме канонического функтора иэ Aff/X в $NAff/CX$, существует функтор κ_X из $NAff/CX$ в Aff/X , который переводит элемент $t = (Spec(A), m, a) \in I_S/X$ в элемент $a \in X(Spec(A))$, где $m : Sp(S) \longrightarrow Spec(A)$.

Пусть $\mathcal{F}$ – квазикогерентный модуль на X . Мы можем определить предпучок $\mathcal{G}$ на категории $NAff/CX$ по правилу

$$\mathcal{G}(t) = \mathcal{F}(a) \otimes_{(A,m)} S$$

Более формально, функтор κ_X индуцирует функтор $\hat{\kappa}_X^* : (Aff/X)^\frown \longrightarrow (NAff/CX)^\frown$ (см. 1.2). Тогда предпучок $\mathcal{G}$ можно задать как $\hat{\kappa}_X^*(\mathcal{F}) \otimes_{\hat{\kappa}_X^*(\mathcal{O}_X)} \mathcal{O}_{CX}$.

Далее, морфизм $\alpha : t \to t'$ в категории I_S/X есть по определению морфизм $\alpha : Spec(A) \longrightarrow Spec(A')$, для которого $\alpha m = m'$ и $a'\alpha = a$. Всякий такой морфизм задает изоморфизм между $\mathcal{G}(t)$ и $\mathcal{G}(t')$. Действительно

$$\mathcal{G}(t) = \mathcal{F}(a) \otimes_{(A,m)} S \cong \mathcal{F}(a') \otimes_{(A',\alpha)} A \otimes_{(A,m)} S \cong \mathcal{F}(a') \otimes_{(A',m')} S = \mathcal{G}(t').$$

Следовательно, предпучок $\mathcal{G}$ индуцирован некоторым предпучком $\mathcal{H}$ на $\overline{N}X$ относительно канонического морфизма $NAff/CX \longrightarrow NAff/\overline{N}X$. Кроме того, очевидно, что $\mathcal{H}$ является квазикогерентным модулем. Аналогично определяется отображение на морфизмах между квазикогерентными модулями. Окончательно, получаем функтор $\overline{n}_{*X}$ из $\mathrm{Qcoh}(X)$ в $\mathrm{Qcoh}_r(\overline{N}X)$, который является квазиобратным к $\overline{n}_X^*$. □

4.6. Далее мы будем писать $\mathcal{C}$ вместо $NAff/k$. Обозначим через $\Phi = (\mathcal{C}, can)$ сайт окольцованный пучком $\mathcal{O}$. Пусть X – некоторый объект из $\mathcal{C}^\frown$, и $j_X : \mathcal{C}/X \longrightarrow \mathcal{C}$ – канонический функтор. Как и раньше, обозначим через can_X каноническую топологию на $\mathcal{C}/X$. Она индуцирована канонической топологией на $\mathcal{C}$ по 1.5. Рассмотрим окольцованный сайт $\Phi_X = (\mathcal{C}/X, can_X)$ с пучком колец $\mathcal{O}_X$. В коммутативной ситуации мы знаем, что всякий квазикогерентный модуль на X является пучком в канонической топологии на $\mathcal{C}/X$ (см. 3.2). Аналогичное утверждение в некоммутативной ситуации также верно, но доказательство не является таким прямым как раньше.

Теорема 4.3. *Пусть X – предпучок множеств на категории $\mathcal{C} = NAff/k$. Тогда всякий квазикогерентный модуль $\mathcal{M}$ на X является пучком в канонической топологии на $NAff/X$.*

Доказательство. Пусть A – k-алгебра, и $(f_\alpha : A \longrightarrow B_\alpha)$, $\alpha \in I$ – семейство морфизмов алгебр такое, что соответствующее семейство отображений f_α^{op} в противоположной категории $NAff/k$ является покрывающим в канонической топологии. Для доказательства теоремы мы должны показать, что для любого (правого) A-модуля M гомоморфизм ϵ_M в диаграмме

$$M \xrightarrow{\epsilon_M} \prod_{\alpha\in I} M \otimes_A B_\alpha \rightrightarrows \prod_{\alpha,\beta\in I} M \otimes_A (B_\alpha \star_A B_\beta)$$

является уравнителем.

Обозначим через N A-бимодуль $A \otimes_{\mathbb{Z}} M$. Определим кольцо S как пространство $A \oplus N$ с умножением $(a_1, n_1)(a_2, n_2) = (a_1a_2, a_1n_2 + n_1a_2)$. По лемме 4.4 каноническое отображение $\phi : M \longrightarrow N$ является вложением. Обозначим через i вложение N в S и через ψ_α – канонические отображения $M \otimes_A B_\alpha \longrightarrow S \star_A B_\alpha$ для каждого $\alpha \in I$. Пусть ψ – это произведение ψ_α по всем $\alpha \in I$.

Рассмотрим коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{\epsilon_M} & \prod_{\alpha\in I} M \otimes_A B_\alpha & \rightrightarrows & \prod_{\alpha,\beta\in I} M \otimes_A (B_\alpha \star_A B_\beta) \\ {\scriptstyle i\phi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \psi} & & \downarrow \\ S & \xrightarrow{e_S} & \prod_{\alpha\in I} S \star_A B_\alpha & \rightrightarrows & \prod_{\alpha,\beta\in I} (S \star_A B_\alpha) \star_S (S \star_A B_\beta). \end{array} \tag{8}$$

Так как семейство (f_α^{op}) является покрывающим, отображение e_S есть уравнитель. Кроме того, отображения ϕ и e_S – вложения, следовательно отображение ϵ_M также является вложением. Получаем, что каждый квазикогерентный модуль есть отделимый предпучок.

Давайте предположим, что выполнены следующие условия:

1). отображения ψ_α – вложения для любого α ,

2). пересечение $e_S(S)$ и $\psi(\prod_\alpha M \otimes_A B_\alpha)$ совпадает с $e_S i\phi(M)$.

В этом случае, мы немедленно получаем, что ϵ_M является уравнителем.

Таким образом, чтобы закончить доказательство, мы должны проверить, что условия 1) и 2) выполнены.

1)Обозначим A-бимодуль B_α/A через $\overline{B}_\alpha$. Рассмотрим градуированное кольцо R_α для всякого $\alpha \in I$, определенное по правилу

$$R_\alpha = B_\alpha \oplus (B_\alpha \otimes_A N \otimes_A B_\alpha) \oplus (B_\alpha \otimes_A N \otimes_A \overline{B}_\alpha \otimes_A N \otimes_A B_\alpha) \oplus \cdots$$

с законом умножения

$$(b_0\otimes n_1\otimes \bar b_1\otimes\cdots\otimes \bar b_{i-1}\otimes n_i\otimes b_i)(b'_i\otimes n_{i+1}\otimes \bar b_{i+1}\otimes\cdots\otimes \bar b_{i+j-1}\otimes n_{i+j}\otimes b_{i+j}) =$$
$$(b_0\otimes n_1\otimes \bar b_1\otimes\cdots\otimes \bar b_{i-1}\otimes n_i\otimes \overline{b_ib'_i}\otimes n_{i+1}\otimes \bar b_{i+1}\otimes\cdots\otimes \bar b_{i+j-1}\otimes n_{i+j}\otimes b_{i+j})$$

Существуют гомоморфизмы колец $B_\alpha \longrightarrow R_\alpha$ и $S \longrightarrow R_\alpha$. Следовательно, существует канонический гомоморфизм $S\star_A B_\alpha \longrightarrow R_\alpha$. По лемме 4.4 отображение $M\otimes_A B_\alpha \longrightarrow B_\alpha\otimes_A N\otimes_A B_\alpha \cong B_\alpha\otimes_{\mathbb Z} M\otimes_A B_\alpha$ является вложением. Значит отображение $M\otimes_A B_\alpha \longrightarrow R_\alpha$ также есть вложение. Оно является композицией ψ_α с каноническим отображением $S\star_A B_\alpha \longrightarrow R_\alpha$. Таким образом, мы получаем, что ψ_α – вложение для всякого $\alpha\in I$.
2) Отображение i является вложением N в S . Чтобы проверить второе условие достаточно показать, что пересечение $e_S i(N)$ и $\psi(\prod_{\alpha\in I} M\otimes_A B_\alpha)$ совпадает с $e_S i\phi(M)$. Заметим, что отображения $e_S i$ и ψ пропускаются через каноническое отображение $\prod_{\alpha\in I} B_\alpha\otimes_A N\otimes_A B_\alpha \longrightarrow \prod_{\alpha\in I} S\star_A B_\alpha$. С другой стороны, существует сквозное отображение

$$\prod_{\alpha\in I} S\star_A B_\alpha \longrightarrow \prod_{\alpha\in I} R_\alpha \longrightarrow \prod_{\alpha\in I} B_\alpha\otimes_A N\otimes_A B_\alpha$$

которое расщепляет предыдущее. Следовательно, $\prod_{\alpha\in I} B_\alpha\otimes_A N\otimes_A B_\alpha$ является прямым слагаемым $\prod_{\alpha\in I} S\star_A B_\alpha$.

Обозначим через ρ и θ отображения $N \longrightarrow \prod_{\alpha\in I} B_\alpha\otimes_A N\otimes_A B_\alpha$ и $\prod_{\alpha\in I} M\otimes_A B_\alpha \longrightarrow \prod_{\alpha\in I} B_\alpha\otimes_A N\otimes_A B_\alpha$ соответственно. Существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\epsilon_M} & \prod_{\alpha\in I} M\otimes_A B_\alpha \\
 & & \phi\downarrow & & \downarrow\theta \\
0 & \longrightarrow & N = A\otimes_{\mathbb Z} M & \xrightarrow{\rho} & \prod_{\alpha\in I} B_\alpha\otimes_{\mathbb Z} M\otimes_A B_\alpha
\end{array}$$

По лемме 4.4 вложения ϕ и θ расщепляются как гомоморфизмы абелевых групп. Более того, легко видеть, что эти расщепления коммутируют. Следовательно, пересечения $\rho(N)$ и $\theta(\prod_{\alpha\in I} M\otimes_A B_\alpha)$ совпадает с $\rho\phi(M)$. Это доказывает второе условие и, значит, теорему. □

Лемма 4.4. *Пусть R – кольцо, и M – правый R-модуль. Тогда каноническое отображение $M \longrightarrow R\otimes_{\mathbb Z} M$ является вложением правых R-модулей и расщепляется как морфизм абелевых групп.*

Доказательство. Очевидно, что композиция отображений абелевых групп

$$M \longrightarrow R\otimes_{\mathbb Z} M \xrightarrow{\sim} M\otimes_{\mathbb Z} R \longrightarrow M$$

является тождественным. (Здесь последнее отображение есть действие кольца R на правый модуль M .) Следовательно, $M \longrightarrow R\otimes_{\mathbb Z} M$ является вложением абелевых групп и значит, вложением правых R-модулей. □

Следствие 4.5. *Пусть* X *– предпучок множеств на категории* $\mathcal{C} = NAff/k$ *. Тогда категория квазикогерентных модулей* $\mathrm{Qcoh}_r(X)$ *является полной подкатегорией в категории пучков в канонической топологии* $\mathrm{Mod}_r(X, can_X)$ *. Если* $m : X \longrightarrow \underline{c}X$ *– морфизм ассоциирования пучка в канонической топологии, тогда функтор обратного образа* $m^* : \mathrm{Qcoh}_r(\underline{c}X) \longrightarrow \mathrm{Qcoh}_r(X)$ *является вполне строгим.*

Это утверждение следует из теоремы 4.3 и предложения 2.1.

Список литературы

[1] M. Artin, A. Grothendieck, J. L. Verdier, *Théorie des Topos et Cohomologie Etale des Schémas,* SGA4, Lecture Notes in Math, v.269.

[2] P. Berthelot, A. Grothendieck, L. Illusie, *Théorie des intersections et théoreme de Riemann-Roch*, SGA6, Lect. Notes in Math., v.225, Springer, Heidelberg, 1971.

[3] A. Grothendieck, *Revetements étale et groups fondamental,* SGA1, Lecture Notes in Math, v.224, Springer, Heidelberg, 1971.

[4] C. Faith, *Algebra: Rings, Modules and Categories I,* Springer, 1973.

[5] S. Mac Lane, I. Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic,* Springer, 1992.

[6] M. A. Knus, M. Ojanguren, *Théorie de la Descente et Algèbres d' Azumaya,* Lecture Notes in Math, v.389, Springer, Heidelberg, 1974.

[7] J. Murre, *Lectures on an Introduction to Grothendieck's Theory of the Fundamental Group,* Lecture Notes, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1967.

Отдел алгебры, Математический институт РАН им. Стеклова, ул. Губкина 8, Москва 117966, Россия

E-mail address: `orlov@@mi.ras.ru`