ТРИАНГУЛИРОВАННЫЕ КАТЕГОРИИ ОСОБЕННОСТЕЙ И ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ МЕЖДУ МОДЕЛЯМИ ЛАНДАУ-ГИНЗБУРГА

ДМИТРИЙ ОРЛОВ

Аннотация. В данной статье доказывается существование некоторого типа эквивалентностей между триангулированными категориями особенностей для многообразий разных размерностей. Этот класс эквивалентностей обобщает так называемую периодичность Кноррера. В качестве следствия получается эквивалентность между категориями D-бран типа B в моделях Ландау-Гинзбурга разных размерностей.

Введение

Ограниченная категория когерентных пучков $\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X))$ – это триангулированная категория, которую естественно сопоставить алгебраическому многообразию X. В данной категории имеется триангулированная подкатегория $\mathfrak{Perf}(X)$, состоящая из совершенных комплексов. Понятие совершенного комплекса было введено в [1], и, по определению, совершенным называется комплекс пучков $\mathcal{O}_X$-модулей, который локально квазиизоморфен ограниченному комплексу локально свободных пучков конечного типа (хорошая ссылка здесь [20]).

В случае, когда многообразие X гладкое, всякий когерентный пучок обладает резольвентой из локально свободных пучков конечного типа, и, следовательно, подкатегория совершенных комплексах совпадает с $\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X))$. Для особых многообразий данное свойство не выполняется, и мы можем определить триангулированную категорию особенностей $\mathbf{D}_{\mathrm{Sg}}(X)$ как фактор триангулированной категории $\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X))$ по полной триангулированной подкатегории совершенных комплексов $\mathfrak{Perf}(X)$ [18]. Категория $\mathbf{D}_{\mathrm{Sg}}(X)$ отражает свойства особенностей X и "не зависит от всего X ". В частности, она инвариантна относительно локализации в топологии Зариского ([18], и Предл. 1.3).

Интерес к категориям данного типа связан не только с изучение особенностей, но во многом вызван гипотезой о гомологической зеркальной симметрии [14].

Данная гипотеза (ГГЗС) имеет дело с многообразиями Калаби-Яу, оснащенными симплектической формой. Она утверждает, что если два многообразия Калаби-Яу X и Y зеркально симметричны друг другу, то категория D-бран типа B на X эквивалентна категории D-бран типа A на Y, и наоборот. С математической точки зрения категория D-бран типа B – это производная категория когерентных пучков на данном многообразии [14, 4]. В качестве кандидата категории A-бран на Калаби-Яу предлагается так называемая категория Фукаи. Ее объекты – это, грубо говоря, лагранжевы подмногообразия с плоскими расслоениями [14].

Работа выполнена при частичной поддержке фонда Вейля, РФФИ (грант 05-01-01034), гранта Президента РФ для поддержки молодых российских ученых МД-2731.2004.1, Американского фонда гражданских исследований CRDF RUM1-2661-MO-05 и Фонда содействия отечественной науке.

С другой стороны, физики также рассматривают зеркальную симметрию для многообразий других типов, например для многообразий Фано. В этом случае зеркально симметричными являются так называемые модели Ландау-Гинзбурга [10]. Общее определение модели Ландау-Гинзбурга включает кроме многообразия еще выбор голоморфной функции W на нем, которая называется суперпотенциалом.

Для многообразий Фано существуют как производная категория когерентных пучков (B-браны) так и, при наличии симплектической формы, можно предложить и категорию Фукая (A-браны). Таким образом, если мы хотим распространить гипотезу о гомологической зеркальной симметрии на случай, когда многообразие не есть Калаби-Яу, мы должны понять D-браны в моделях Ландау-Гинзбурга.

Категории A-бран в моделях Ландау-Гинзбурга изучались в [9] и в [19] с математической точки зрения. Зеркальная симметрия связывает B-браны на многообразиях Фано (когерентные пучки) с A-бранами в ЛГ-моделях. Можно также рассмотреть категорию Фукая (A-браны) на многообразии Фано. Ожидается, что она эквивалентна категории B-бран в зеркально симметричной модели Ландау-Гинзбурга.

Математическое определение категории B-бран в моделях Ландау-Гинзбурга было предложено М. Концевичем. Коротко, оно состоит в том, что суперпотенциал W деформирует комплексы когерентных пучков в "скрученные"комплексы, в которых композиция дифференциалов больше не равна нулю, а есть умножение на $W.$ В статье [18] была установлена связь между категориями B-бран в моделях Ландау-Гинзбурга и триангулированными категориями особенностей. Было показано, что произведение триангулированных категорий особенностей особых слоев суперпотенциала W эквивалентно категории B-бран. В частности, отсюда следует, что категория B-бран зависит только от особых слоев суперпотенциала.

В данной статье устанавливается эквивалентность между моделями Ландау-Гинзбурга разных размерностей. Более точно, доказывается эквивалентность между триангулированными категориями особенностей двух схем, первая из которых – подсхема нулей некоторого регулярного сечения $s \in H^0(S, \mathcal{E})$ для векторного расслоения $\mathcal{E}$ на гладкой схеме $S,$ а другая – соответствующий дивизор в проективном расслоении $\mathbb{P}(\mathcal{E}^{\vee})$ (Теорема 2.1). Из этого результата следует эквивалентность категорий D-бран типа B для различных моделей Ландау-Гинзбурга. В частности, получается следующее. Пусть $W : Y \to \mathbb{A}^1$ суперпотенциал на многообразии $Y = S \times \mathbb{A}^1$ вида $W = f + xg,$ где f и g – две функции на гладком многообразии S и x – координата на $\mathbb{A}^1.$ В данной ситуации можно редуцировать размерность и заменить модель Ландау-Гинзбурга на Y на модель Ландау-Гинзбурга на $X \subset S,$ где X – дивизор нулей функции $g,$ с ограничением f в качестве суперпотенциала. Доказывается, что категория B-бран для модели Ландау-Гирзбурга на Y эквивалентна категории B-бран в модели Ландау-Гинзбурга на X (Следствие 3.2). Ожидается естественно, что для таких ЛГ-моделей категории D-бран типа A также будут эквивалентны.

Автор благодарен Антону Капустину и Людмилу Кацаркову за полезные обсуждения. Валерий Лунц прочитал предварительный вариант данной статьи и сделал целый ряд ценных замечаний. Хочется поблагодарить Александра Кузнецова, указавшего на существование полуортогонального разложения из предложения 2.10. Автор признателен Институту продвинутых исследований, во время пребывания в котором данная статья была написана, за гостеприимство и стимулирующую атмосферу.

1. Триангулированные категории особенностей

Напомним, что триангулированная категория $\mathcal{D}$ – это аддитивная категория с дополнительными данными:

a) аддитивная автоэквивалентность $[1]:\mathcal{D}\longrightarrow\mathcal{D}$ (она называется функтор сдвига),

b) класс точных (или выделенных) треугольников:

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1],$$

которые должны удовлетворять определенному набору аксиом (см. [23] и [6, 12, 13, 16]).

Функтор $F:\mathcal{D}\longrightarrow\mathcal{D}'$ между двумя триангулированными категориями называется **точным**, если он коммутирует с функторами сдвига и переводит точные треугольники в точные.

Пусть $\mathcal{N}\subset\mathcal{D}$ – полная триангулированная подкатегория, т.е. полная подкатегория, замкнутая относительна функтора сдвига и триангулированная точными треугольниками в $\mathcal{D}$. Обозначим через $\Sigma(\mathcal{N})$ класс таких морфизмов s из $\mathcal{D}$, которые включаются в точный треугольник

$$X \xrightarrow{s} Y \longrightarrow N \longrightarrow X[1],$$

где $N\in\mathcal{N}$. Можно проверить, что $\Sigma(N)$ является мультипликативной системой. Определим фактор-категорию $\mathcal{D}/\mathcal{N}$ как локализацию $\mathcal{D}[\Sigma(\mathcal{N})^{-1}]$ [5, 6, 23]. Категория $\mathcal{D}/\mathcal{N}$ становится триангулированной категорией, если в качестве функтора сдвига рассмотреть функтор, индуцированный функтором сдвига в $\mathcal{D}$, и в качестве точных треугольников взять образы точных треугольников из $\mathcal{D}$. Канонический функтор $Q:\mathcal{D}\to\mathcal{D}/\mathcal{N}$ аннулирует $\mathcal{N}$. Более того, любой точный функтор $F:\mathcal{D}\to\mathcal{D}'$ между триангулированными категориями такой, что $F(X)\simeq 0$ для всех $X\in\mathcal{N}$, единственным образом пропускается через Q.

Следующая лемма, которая нам понадобится впоследствии, очевидна.

Лемма 1.1. *Пусть $\mathcal{N}$ и $\mathcal{N}'$ – полные триангулированные подкатегории в триангулированных категориях $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}'$ соответственно. Пусть $F:\mathcal{D}\to\mathcal{D}'$ и $G:\mathcal{D}'\to\mathcal{D}$ – пара точных сопряженных друг другу функторов таких, что $F(\mathcal{N})\subset\mathcal{N}'$ и $G(\mathcal{N}')\subset\mathcal{N}$. Тогда они индуцируют функторы*

$$\overline{F}:\mathcal{D}/\mathcal{N}\longrightarrow\mathcal{D}'/\mathcal{N}',\qquad \overline{G}:\mathcal{D}'/\mathcal{N}'\longrightarrow\mathcal{D}/\mathcal{N},$$

которые также сопряжены. Более того, если функтор $F:\mathcal{D}\to\mathcal{D}'$ является вполне строгим, тогда функтор $\overline{F}:\mathcal{D}/\mathcal{N}\longrightarrow\mathcal{D}'/\mathcal{N}'$ также является вполне строгим.

Нас в основном будут интересовать такие триангулированные категории и их факторы по триангулированным подкатегориям, которые имеют алгебро-геометрическую природу.

Пусть X – схема над полем k. Скажем, что X удовлетворяет условию (ELF), если она

(ELF) отделимая нетерова конечной Круль-размерности и имеет достаточно много локально свободных пучков, т.е. всякий когерентный пучок $\mathcal{F}$ является эпиморфным образом $\mathcal{E} \twoheadrightarrow \mathcal{F}$ локально свободного пучка $\mathcal{E}$.

К примеру, любая квазипроективная схема удовлетворяет данному условию.

Обозначим через $\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X))$ (соотв. $\mathbf{D}^b(\mathrm{Qcoh}(X))$) ограниченную производную категорию когерентных (соотв. квазикогерентных) пучков на X. Так как X нетерова, естественный функтор $\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X)) \longrightarrow \mathbf{D}^b(\mathrm{Qcoh}(X))$ является вполне строгим и осуществляет эквивалентность $\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X))$ с полной подкатегорией $\mathbf{D}^b(\mathrm{Qcoh}(X))_{\mathrm{coh}} \subset \mathbf{D}^b(\mathrm{Qcoh}(X))$, состоящей из комплексов с когерентными когомологиями (см. [1] II, 2.2.2).

Объекты категории $\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X))$, которые изоморфны ограниченным комплексам из локально свободных пучков на X, образуют полную триангулированную подкатегорию. Она называется подкатегорией совершенных комплексов и обозначается $\mathfrak{Perf}(X)$. [1]

Определение 1.2. *Определим триангулированную категорию* $\mathbf{D}_{\mathrm{Sg}}(X)$ *как фактор триангулированной категории* $\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X))$ *по полной триангулированной категории* $\mathfrak{Perf}(X)$ *and назовем ее триангулированной категорией особенностей* X.

Хорошо известно, что если схема X является регулярной, то подкатегория совершенных комплексов совпадает со всей ограниченной категорией когерентных пучков. В этом случае триангулированная категория особенностей тривиальна.

Пусть $f : X \to Y$ – морфизм конечной Тор-размерности (к примеру, плоский морфизм или регулярное замкнутое вложение). Он задает функтор обратного образа $\mathbf{L}f^* : \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(Y)) \longrightarrow \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X))$. Очевидно, что функтор $\mathbf{L}f^*$ переводит совершенные комплексы на Y в совершенные комплексы на X. Следовательно, функтор $\mathbf{L}f^*$ индуцирует точный функтор $\mathbf{L}\bar{f}^* : \mathbf{D}_{\mathrm{Sg}}(Y) \longrightarrow \mathbf{D}_{\mathrm{Sg}}(X)$.

Предположим дополнительно, что морфизм $f : X \to Y$ собственный и локально конечного типа. Тогда функтор прямого образа $\mathbf{R}f_* : \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X)) \to \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(Y))$ переводит совершенные комплексы на X в совершенные комплексы на Y (см. [1] III или [20]). Таким образом, он задает функтор $\mathbf{R}\bar{f}_* : \mathbf{D}_{\mathrm{Sg}}(X) \to \mathbf{D}_{\mathrm{Sg}}(Y)$, который сопряжен справа к $\mathbf{L}\bar{f}^*$.

Фундаментальным свойством триангулированных категорий особеностей является свойство локальности.

Предложение 1.3. [18] *Пусть схема* X *удовлетворяет (ELF), и пусть* $j : U \hookrightarrow X$ *– открытое вложение, такое что* $\mathrm{Sing}(X) \subset U$. *Тогда функтор* $\bar{j}^* : \mathbf{D}_{\mathrm{Sg}}(X) \longrightarrow \mathbf{D}_{\mathrm{Sg}}(U)$ *является эквивалентностью триангулированных категорий.*

Замечание 1.4. Понятие триангулированной категории особенностей может быть распространено на орбифолды и более того на стэки. Рассмотрим схематично пример фактор-стэка.

---

[1] На самом деле, совершенный комплекс определяется как комплекс $\mathcal{O}_X$ -модулей локально квазиизоморфный ограниченному комплексу локально свободных пучков конечного типа. Однако при наших предположениях на схему любой такой комплекс квазиизоморфен ограниченному комплексу из локально свободных пучков конечного типа (см. [1] II, или [20] §2).

Пусть G – аффинная групповая схема конечного типа, действующая на схеме S, которая удовлетворяет свойству (ELF). Рассмотрим фактор-стэк $[S/G]$. Категория когерентных пучков на этом стэке $\mathrm{coh}([S/G])$ совпадает с категорией $\mathrm{coh}^G(S)$ G-эквивариантных когерентных пучков на S. Фактор ограниченной производной категории когерентных пучков $\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}([S/G]))$ по триангулированной подкатегории совершенных комплексов $\mathfrak{Perf}([S/G])$, состоящей из ограниченных комплексов локально свободных пучков из $\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}([S/G])) \cong \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}^G(S))$, может быть названа триангулированной категорией особенностей фактор-стэка $[S/G]$. (Дополнительную информацию о том, когда фактор-стэк имеет достаточно много локально свободных пучков можно найти в статьях [21, 22].)

Замечание 1.5. Можно также рассмотреть и некоммутативный случай. Пусть A – алгебра нетеровая справа. Обозначим через $\mathrm{mod}{-}A$ и $\mathrm{Mod}{-}A$ абелевы категории конечно порожденных правых модулей и всех правых модулей соответственно. Рассмотрим ограниченные производные категории $\mathbf{D}^b(\mathrm{mod}{-}A)$ и $\mathbf{D}^b(\mathrm{Mod}{-}A)$. Они имеют триангулированные подкатегории, состоящие из объектов, изоморфных ограниченным комплексам из проективных модулей. Эти подкатегории можно рассматривать как производные от точных подкатегорий проективных модулей $\mathbf{D}^b(\mathrm{proj}{-}A)$ и $\mathbf{D}^b(\mathrm{Proj}{-}A)$ соответственно (см. например [13]). Теперь можно определить триангулированные категории особенностей $\mathbf{D}_{\mathrm{Sg}}(A)$ и $\mathbf{D}'_{\mathrm{Sg}}(A)$ как факторы $\mathbf{D}^b(\mathrm{mod}{-}A)/\mathbf{D}^b(\mathrm{proj}{-}A)$ и $\mathbf{D}^b(\mathrm{Mod}{-}A)/\mathbf{D}^b(\mathrm{Proj}{-}A)$. Как и в коммутативном случае, если A имеет конечную гомологическую размерность, фактор-категории тривиальны.

Существует способ обобщения определения 1.2 на любую триангулированную категорию. Пусть $\mathcal{D}$ – триангулированная категория.

Определение 1.6. *Скажем, что объект $A \in \mathcal{D}$ является* гомологически ограниченным*, если для всякого объекта $B \in \mathcal{D}$ все $\mathrm{Hom}(A, B[i])$ за исключение конечного числя $i \in \mathbb{Z}$ являются тривиальными. Такие объекты образуют триангулированную подкатегорию, которую будем обозначать $\mathcal{D}_{\mathrm{hf}}$.*

Определение 1.7. *Определим триангулированную категорию $\mathcal{D}_{\mathrm{Sg}}$ как фактор $\mathcal{D}/\mathcal{D}_{\mathrm{hf}}$ триангулированной категории $\mathcal{D}$ по полной триангулированной подкатегории $\mathcal{D}_{\mathrm{hf}}$.*

Категории $\mathcal{D}_{\mathrm{hf}}$ и $\mathcal{D}_{\mathrm{Sg}}$ обладают правильным поведением относительно полуортогонального разложения $\mathcal{D}$. Напомним некоторые факты и определения связанные с допустимыми подкатегориями и полуортогональными разложениями (см. [2, 3]).

Определение 1.8. *Пусть $I : \mathcal{N} \hookrightarrow \mathcal{D}$ – вложение полной триангулированной подкатегории $\mathcal{N}$ в триангулированную категорию $\mathcal{D}$. Назовем $\mathcal{N}$* допустимой справа *(соотв.* допустимой слева*), если существует правый (соотв. левый) сопряженный функтор $P : \mathcal{D} \to \mathcal{N}$. Подкатегория $\mathcal{N}$ будет называться* допустимой*, если она допустима и справа и слева.*

Пусть $\mathcal{N} \subset \mathcal{D}$ – полная триангулированная подкатегория. Правый ортогонал к $\mathcal{N}$ – это полная подкатегория $\mathcal{N}^{\perp} \subset \mathcal{D}$, состоящая из таких объектов M, что $\mathrm{Hom}(N, M) = 0$ для всех $N \in \mathcal{N}$. Левый ортогонал ${}^{\perp}\mathcal{N}$ определяется аналогично. Ортогоналы также являются триангулированными подкатегориями.

Свойство быть допустимой справа для подкатегории $\mathcal{N}$ эквивалентно следующему свойству: для каждого $X \in \mathcal{D}$ существует точный треугольник $N \to X \to M$, в котором $N \in \mathcal{N}$ и $M \in \mathcal{N}^{\perp}$.

Если $\mathcal{N} \subset \mathcal{D}$ допустимая подкатегория, тогда будем говорить, что категория $\mathcal{D}$ имеет полуортогональное разложение вида $\left\langle \mathcal{N}^{\perp}, \mathcal{N} \right\rangle$ и $\left\langle \mathcal{N}, {}^{\perp}\mathcal{N} \right\rangle$.

Определение 1.9. *Последовательность допустимых подкатегорий* $(\mathcal{N}_1, \ldots, \mathcal{N}_n)$ *в триангулированной категории* $\mathcal{D}$ *называется* полуортогональной, *если выполнены условия* $\mathcal{N}_j \subset \mathcal{N}_i^{\perp}$ *для всех* $1 \le j < i \le n$. *Кроме того, полуортогональная последовательность называется* полной, *если она порождает категорию* $\mathcal{D}$. *В этом случае будем говорить, что категория* $\mathcal{D}$ *обладает* полуортогональным разложением *и будем писать*

$$\mathcal{D} = \langle \mathcal{N}_1, \ldots, \mathcal{N}_n \rangle .$$

Предложение 1.10. *Предположим, что триангулированная категория* $\mathcal{D}$ *имеет полуортогональное разложение* $\mathcal{D} = \langle \mathcal{N}_1, ..., \mathcal{N}_n \rangle$. *Тогда категории* $\mathcal{D}_{\mathrm{hf}}$ *и* $\mathcal{D}_{\mathrm{Sg}}$ *также имеют полуортогональные разложения вида*

$$\mathcal{D}_{\mathrm{hf}} = \langle (\mathcal{N}_1)_{\mathrm{hf}}, \ldots, (\mathcal{N}_n)_{\mathrm{hf}} \rangle , \qquad \mathcal{D}_{\mathrm{Sg}} = \left\langle (\mathcal{N}_1)_{\mathrm{Sg}}, \ldots, (\mathcal{N}_n)_{\mathrm{Sg}} \right\rangle . \tag{1}$$

Доказательство. Во-первых, заметим, что если функтор $u : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}'$ имеет правый сопряженный $v : \mathcal{D}' \longrightarrow D$, тогда $u(\mathcal{D}_{\mathrm{hf}}) \subset \mathcal{D}'_{\mathrm{hf}}$ по причине изоморфизма

$$\mathrm{Hom}(uA, B[j]) \cong \mathrm{Hom}(A, vB[j])$$

для всех $A \in \mathcal{D}$, $B \in \mathcal{D}'$. Более того, если u есть полное вложением, то $u(\mathcal{D}_{\mathrm{hf}}) = \mathcal{D}'_{\mathrm{hf}} \cap u(\mathcal{D})$.

Во-вторых, можно предполагать, что $n = 2$. Так как $\mathcal{N}_k$ допустима, функтор вложения $i_k : \mathcal{N}_k \longrightarrow \mathcal{D}$ имеет сопряженный справа p_k. Следовательно, i_k переводит гомологически конечные объекты в гомологически конечные. Теперь возьмем $X \in \mathcal{D}_{\mathrm{hf}}$ и рассмотрим разложение

$$i_1 p_1(X) \longrightarrow X \longrightarrow i_2 q_2(X),$$

где $q_2 : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{N}_2$ – левый сопряженный к i_2. Как было показано выше $q_2(X) \in (\mathcal{N}_2)_{\mathrm{hf}}$. Следовательно, $i_2 q_2(X) \in \mathcal{D}_{\mathrm{hf}}$. Отсюда получаем, что $i_1 p_1(X) \in \mathcal{D}_{\mathrm{hf}}$ и, значит, $p_1(X) \in (\mathcal{N}_1)_{\mathrm{hf}}$. Это дает полуортогональное разложение для $\mathcal{D}_{\mathrm{hf}}$ вида (1). Наконец, применяя лемму 1.1, получаем полуортогональное разложение для $\mathcal{D}_{\mathrm{Sg}}$ в виде $\mathcal{D}_{\mathrm{Sg}} = \left\langle (\mathcal{N}_1)_{\mathrm{Sg}}, \ldots, (\mathcal{N}_n)_{\mathrm{Sg}} \right\rangle$. □

Предложение 1.11. *Пусть* X *удовлетворяет (ELF). Тогда подкатегория* $\mathcal{D}_{\mathrm{hf}}$ *гомологически конечных объектов в* $\mathcal{D} \cong \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X))$ *совпадает с подкатегорией* $\mathfrak{Perf}(X)$ *и, следовательно,* $\mathcal{D}_{\mathrm{Sg}} \cong \mathbf{D}_{\mathrm{Sg}}(X)$.

Доказательство. Если объект $A \in \mathcal{D}$ является совершенным комплексом, тогда он квазиизоморфен ограниченному комплексу векторных расслоений. Так как когомологии когерентного пучка ограничены размерностью схемы X, то для всякого векторного расслоения $\mathcal{P}$

и любого когерентного пучка $\mathcal{F}$ имеет место равенство $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{P},\mathcal{F})=0$, когда i больше размерности X. Следовательно, A принадлежит подкатегории $\mathcal{D}_{\mathrm{hf}}$.

Теперь предположим, что $A\in\mathcal{D}_{\mathrm{hf}}$. Объект A есть ограниченный комплекс когерентных пучков. Возьмем некоторую локально свободную ограниченную справа резольвенту $P^{\cdot}\xrightarrow{\sim}A$ и рассмотрим каноническое обрезание $\tau^{\geq -k}P^{\cdot}$ для достаточно большого $k\gg 0$, которое, очевидно, изоморфно A в $\mathcal{D}$.

Так как $A\in\mathcal{D}_{\mathrm{hf}}$, то для любой замкнутой точки $t:x\hookrightarrow X$ группы $\mathrm{Hom}(A,t_*\mathcal{O}_x[i])$ тривиальны при $|i|\gg 0$. Это значит, что для достаточно большого $k\gg 0$ обрезание $\tau^{\geq -k}P^{\cdot}$ является комплексом пучков локально свободных в точке x, и, следовательно, в некоторой окрестности x. Так как схема X является квазикомпактной, то найдется общее достаточно большое k такое, что обрезание n $\tau^{\geq -k}P^{\cdot}$ есть комплекс из локально свободных пучков на всем X, т.е. A совершенный. $\square$

Следствие 1.12. *Пусть схема X удовлетворяет (ELF). Предположим, что ограниченная производная категория когерентных пучков на X обладает полуортогональным разложением $\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X))=\langle\mathcal{D}_1,\dots,\mathcal{D}_n\rangle$. Тогда триангулированная категория особенностей $\mathbf{D}_{\mathrm{Sg}}(X)$ так же имеет полуортогональное разложение вида*

$$\mathbf{D}_{\mathrm{Sg}}(X)=\Big\langle(\mathcal{D}_1)_{\mathrm{Sg}},\dots,(\mathcal{D}_n)_{\mathrm{Sg}}\Big\rangle.$$

Пример 1.13. Пусть X есть расслоение на проективные пространства $\mathbb{P}(\mathcal{E})$, где $\mathcal{E}$ – векторное расслоение ранга r на схеме Y. Можно показать, что ограниченная производная категория $\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X))$ имеет для всякого $i\in\mathbb{Z}$ полуортогональное разложение вида

$$\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X))=\Big\langle p^*\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(Y))\otimes\mathcal{O}(i),\dots,p^*\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(Y))\otimes\mathcal{O}(i+r-1)\Big\rangle,$$

где $p:X\longrightarrow Y$ – проекция. Данное утверждение для гладкой базы можно найти в [17], но доказательство работает для любой базы. По следствие 1.12 подкатегория совершенных комплексов $\mathfrak{Perf}(X)$ также имеет полуортогональное разложение вида

$$\mathfrak{Perf}(X)\cong\big\langle p^*\mathfrak{Perf}(Y)\otimes\mathcal{O}(i),\dots,p^*\mathfrak{Perf}(Y)\otimes\mathcal{O}(i+r-1)\big\rangle.$$

И, наконец, мы получаем полуортогональное разложение для триангулированной категории особенностей X через триангулированную категорию особенностей Y.

Триангулированная категория особенностей X имеет дополнительные хорошие свойства в случае, когда схема горенштейнова. Напомним, что нетерово локальное кольцо A называется горенштейновым, если A как модуль над собой имеет конечную инъективную размерность. Можно показать, что, если A горенштейново, то A является дуализирующим комплексом для себя (см. [8]). Это означает, что A имеет конечную инъективную размерность и естественное отображение

$$M\longrightarrow\mathbf{R}\mathrm{Hom}^{\cdot}(\mathbf{R}\mathrm{Hom}^{\cdot}(M,A),A)$$

является изоморфизмом для всякого конечно порожденного A-модуля M и, следовательно, для всякого объекта из $\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(\mathrm{Spec}(A)))$.

Определение 1.14. *Схема X называется горенштейновой, если все ее локальные кольцы являются горенштейновыми.*

Если схема X горенштейнова и имеет конечную размерность, тогда пучок $\mathcal{O}_X$ является дуализирующим комплексом для X, то есть он имеет конечную инъективную размерность как квазикогерентный пучок, и естественное отображение

$$\mathcal{F} \longrightarrow \mathbf{R}\underline{\mathcal{H}om}^{\cdot}(\mathbf{R}\underline{\mathcal{H}om}^{\cdot}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X), \mathcal{O}_X)$$

является изоморфизмом для всякого когерентного пучка $\mathcal{F}$. В частности, отсюда следует, что существует целое n_0 такое, что $\underline{\mathcal{E}xt}^i(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X) = 0$ для каждого квазикогерентного пучка $\mathcal{F}$ и для всех $i > n_0$.

Следующие утверждения и их доказательства могут быть найдены в [18].

Лемма-Определение 1.15. *Пусть схема X удовлетворяет (ELF) и является горенштейновой. Будем говорить, что когерентный пучок $\mathcal{F}$ есть пучок Коэн-Макалея, если выполнены следующие эквивалентные условия:*

1) *Пучки $\underline{\mathcal{E}xt}^i(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$ тривиальны для всех $i > 0$.*
2) *Существует правая локально свободная резольвента $0 \to \mathcal{F} \to \{Q^0 \to Q^1 \to Q^3 \cdots\}$.*

Лемма 1.16. *Пусть X удовлетворяет (ELF) и является горенштейновой. Пусть $\mathcal{F}$ – пучок Коэн-Макалея, который является совершенным как комплекс. Тогда $\mathcal{F}$ локально свободен.*

Предложение 1.17. *Пусть X удовлетворяет (ELF) и является горенштейновой. Тогда всякий объект $A \in \mathbf{D}_{\mathrm{Sg}}(X)$ изоморфен образу некоторого пучка Коэн-Макалея.*

2. Редукция размерности

Пусть S – нетерова отделимая регулярная схема конечной размерности Круля, и пусть $\mathcal{E}$ – векторное расслоение ранга r на S, а $s \in H^0(S, \mathcal{E})$ – некоторое сечение. Обозначим через $X \subset S$ подсхему нулей s. Будем предполагать, что сечение s является регулярным, т.е. коразмерность подсхемы X равна рангу r. [2] В частности, ограничение расслоения $\mathcal{E}$ на X совпадает с нормальным расслоением X в S, которое будем обозначать через $\mathcal{N}_{X/S}$.

Рассмотрим проективизации векторных расслоений $\mathbb{P}(\mathcal{E}^\vee)$ и $\mathbb{P}(\mathcal{N}_{X/S}^\vee)$, где $\mathcal{E}^\vee$ и $\mathcal{N}_{X/S}^\vee$ – двойственные векторные расслоения. Обозначим эти схемы через S' и Z соответственно, а проекции на S и X через q и p соответственно. На S' и Z имеются канонические линейные расслоения $\mathcal{O}_\mathcal{E}(1)$ и $\mathcal{O}_\mathcal{N}(1)$ соответственно, вместе с каноническими проекциями

$$q^*\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{O}_\mathcal{E}(1), \qquad p^*\mathcal{N}_{X/S} \longrightarrow \mathcal{O}_\mathcal{N}(1). \tag{2}$$

Сечение s индуцирует сечение $w \in H^0(S', \mathcal{O}_\mathcal{E}(1))$. Обозначим через Y дивизор нулей w на S'. Естественное замкнутое вложение $Z = \mathbb{P}(\mathcal{N}_{X/Y})$ в S' пропускается через Y.

[2] By definition, regularity means that the Koszul complex constructed with s is exact, but since S is regular it is equivalent to the codimension of the zero subscheme being the right one.

Рассмотрим замкнутое вложение $i : Z \hookrightarrow Y$. Ядро второго отображения из (2) совпадет с нормальным расслоением $N_{Z/Y}$, т.е. имеется точная последовательность пучков на Z

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}_{Z/Y} \longrightarrow p^*\mathcal{N}_{X/S} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{N}}(1) \longrightarrow 0. \tag{3}$$

Все схемы, определенные выше, включаются в следующую коммутативную диаграмму.

$$\begin{tikzcd} Z = \mathbb{P}(\mathcal{N}^{\vee}_{X/S}) \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "p"] & Y \arrow[r, hook, "u"] \arrow[dr, "\pi"] & S' = \mathbb{P}(\mathcal{E}^{\vee}) \arrow[d, "q"] \\ X \arrow[rr, hook, "j"] & & S \end{tikzcd} \tag{4}$$

Рассмотрим функтор $\mathbf{R}i_*p^* : \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X)) \to \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(Y))$ и обозначим его через Φ_Z. Цель данного раздела доказать следующую теорему.

Теорема 2.1. *Пусть X, Y и Z – схемы, определенные выше. Тогда функтор Φ_Z : $\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X)) \to \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(Y))$, заданный по формуле $\Phi_Z(\cdot) = \mathbf{R}i_*p^*(\cdot)$, индуцирует функтор*

$$\overline{\Phi}_Z : \mathbf{D}_{\mathrm{Sg}}(X) \longrightarrow \mathbf{D}_{\mathrm{Sg}}(Y),$$

который является эквивалентностью триангулированных категорий.

Мы дадим два доказательства данной теоремы. Оба используют следующее предложение.

Предложение 2.2. *Функтор $\Phi_Z = \mathbf{R}i_*p^* : \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X)) \to \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(Y))$ вполне строгий.*

Доказательство. Во-первых, заметим, что функтор $\Phi_Z = \mathbf{R}i_*p^*$ имеет сопряженный справа функтор, который обозначим через Φ_{Z*}. Он представляется в виде композиции $\mathbf{R}p_*i^{\flat}$, где $i^{\flat}$ – сопряженный справа к $\mathbf{R}i_*$. Функтор $i^{\flat}$ совпадает с $\mathbf{L}i^*(\cdot \otimes \omega_{Z/Y})[-r+1]$, где $\omega_{Z/Y} \cong \Lambda^{r-1}\mathcal{N}_{Z/Y}$ (см, к примеру, [8] III, Cor.7.3).

Во-вторых, нетрудно видеть, что функтор $p^* : \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X)) \longrightarrow \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(Z))$ вполне строгий, т.к. $\mathbf{R}p_*\mathcal{O}_Z \cong \mathcal{O}_X$ и по формуле проекции получаем изоморфизмы

$$\mathbf{R}p_*p^*(A) \cong A \otimes \mathbf{R}p_*\mathcal{O}_Z \cong A \otimes \mathcal{O}_X \cong A$$

для любого $A \in \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X))$.

Теперь рассмотрим каноническое преобразование функторов $\mathrm{id} \to \Phi_{Z*}\Phi_Z$. Для того чтобы доказать предложение, нужно показать, что данное преобразование является изоморфизмом. Таким образом, надо проверить что для всякого объекта $A \in \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X))$ конус C_A из точного треугольника

$$A \longrightarrow \Phi_{Z*}\Phi_Z A \longrightarrow C_A \tag{5}$$

является нулевым объектом. Все такие объекты A, для которых $C_A = 0$, образуют триангулированную подкатегорию в $\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X))$. Так как минимальная триангулированная подкатегория, содержащая все пучки, совпадает со всей $\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X))$ достаточно показать, что $C_A = 0$, когда $A = \mathcal{G}$ есть пучок.

Пусть $A = \mathcal{G}$ – пучок. Так как функтор p^* вполне строгий, треугольник (5) есть образ относительно функтора $\mathbf{R}p_*$ треугольника

$$p^*\mathcal{G} \longrightarrow i^\flat \mathbf{R} i_* p^* \mathcal{G} \longrightarrow B_{\mathcal{G}}, \tag{6}$$

в котором первый морфизм – это каноническое отображение, индуцированное естественным преобразованием $\mathrm{id} \to i^\flat \mathbf{R} i_*$. Имеется следующая последовательность изоморфизмов

$$\begin{aligned}\mathbf{R}i_* i^\flat \mathbf{R} i_* p^* \mathcal{G} \cong \mathbf{R} i_* (\mathbf{L} i^* \mathbf{R} i_* p^* \mathcal{G} \otimes \omega_{Z/Y})[-r+1]) \cong \mathbf{R} i_*(p^*\mathcal{G} \otimes \omega_{Z/Y}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_Z[-r+1] \cong \\ \mathbf{R} i_*(p^*\mathcal{G} \otimes \omega_{Z/Y}) \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_Z} (\mathcal{O}_Z \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_Z)[-r+1]).\end{aligned} \tag{7}$$

Известно (см. [1]VII, 2.5), что $\underline{\mathcal{T}or}_k^{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_Z, \mathcal{O}_Z) \cong \Lambda^k \mathcal{N}_{Z/Y}^\vee$.

Таким образом, объект $\mathbf{R}i_* i^\flat \mathbf{R} i_* p^* \mathcal{G}$ есть комплекс, $(r-k-1)$-ая когомология которого изомофна $i_*(p^*\mathcal{G} \otimes \omega_{Z/Y} \otimes \Lambda^k \mathcal{N}_{Z/Y}^\vee)$. Следовательно, объект $i^\flat \mathbf{R} i_* p^* \mathcal{G}$ – это комплекс на Z, k-ая когомология которого есть $p^*\mathcal{G} \otimes \Lambda^k \mathcal{N}_{Z/Y}$ при $k = 0, \dots, r-1$. Отсюда получаем, что объект $B_{\mathcal{G}}$ имеет нетривиальные когомологии только при $k = 1, \dots, r-1$, и $H^k(B_{\mathcal{G}})$ изоморфны $p^*\mathcal{G} \otimes \Lambda^k \mathcal{N}_{Z/Y}$.

Теперь заметим, что применение функтора $\mathbf{R}p_*$ к точной последовательности (3) дает $\mathbf{R}p_* \mathcal{N}_{Z/Y} \cong 0$. Более того, легко проверить, что

$$\mathbf{R}p_* \Lambda^k \mathcal{N}_{Z/Y} \cong 0 \qquad \text{для всех} \qquad k > 0. \tag{8}$$

(Это относительный аналог того факта, что на проективном пространстве $H^i(\Omega^k(-k)) = 0$ для всех i и всех $k > 0$, который является частным случаем формулы Ботта.) Равенства (8) приводят к равенствам

$$\mathbf{R}p_* H^k(B_{\mathcal{G}}) \cong 0 \quad \text{для всех} \quad k.$$

Следовательно, $\mathbf{R}p_* B_{\mathcal{G}} = 0$. И значит, функтор $\Phi_Z = \mathbf{R} i_* p^*$ вполне строгий. □

Полезно отметить, что на самом деле мы доказали более общее утверждение.

Предложение 2.3. *Пусть $p : Z = \mathbb{P}(\mathcal{N}^\vee) \to X$ – расслоение на проективные пространства, ассоциированное с векторным расслоением $\mathcal{N}$ на схеме X. Предположим, что существует регулярное замкнутое вложение $i : Z \hookrightarrow Y$ такое, что нормальное расслоение $\mathcal{N}_{Z/Y}$ совпадает с ядром канонического отображения $p^*\mathcal{N} \to \mathcal{O}_{\mathcal{N}}(1)$. Тогда функтор $\mathbf{R} i_* p^* : \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X)) \longrightarrow \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(Y))$ является вполне строгим.*

Следствие 2.4. *Функтор $\Phi_Z : \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X)) \to \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(Y))$ индуцирует функтор*

$$\overline{\Phi}_Z : \mathbf{D}_{\mathrm{Sg}}(X) \longrightarrow \mathbf{D}_{\mathrm{Sg}}(Y),$$

и он является вполне строгим.

Доказательство. Во-первых, функторы p^* и $i^\flat = \mathbf{L} i^*(\cdot \otimes \mathcal{O}(Z))[-1]$ как функторы обратного образа переводят совершенные комплексы в совершенные. Во-вторых, функторы прямого образа $\mathbf{R} i_*$ и $\mathbf{R} p_*$ так же переводят совершенные коплексы в совершенные, так как оба морфизма i и p имеют конечную Тор-размерность. Значит, по лемме 1.1 существует функтор $\overline{\Phi}_Z : \mathbf{D}_{\mathrm{Sg}}(X) \to \mathbf{D}_{\mathrm{Sg}}(Y)$, который является вполне строгим. □

Таким образом, построен функтор $\overline{\Phi}_Z : \mathbf{D}_{\mathrm{Sg}}(X) \longrightarrow \mathbf{D}_{\mathrm{Sg}}(Y)$ и показано, что он является вполне строгий.

Теперь, будет предложено первое доказательство теоремы 2.1. Покажем, что любой объект $F \in \mathbf{D}_{\mathrm{Sg}}(Y)$, для которого $\overline{\Phi}_{Z*}F = 0$, является нулевым объектом. Эквивалентность функтора $\overline{\Phi}_Z$ можно формально вывести из данного факта. Доказательство опирается на следующие две простые леммы.

Лемма 2.5. *Пусть $i : Z \hookrightarrow Y$ – замкнутое вложение. Пусть $\mathcal{F}$ – когерентный пучок на Y такой, что его ограничение на дополнение $U = Y \setminus Z$ локально свободно, и $\mathbf{L}i^*\mathcal{F}$ изоморфен локально свободному пучку на Z. Тогда $\mathcal{F}$ локально свободен на Y.*

Доказательство. Чтобы показать, что $\mathcal{F}$ локально свободен, достаточно проверить, что для любой замкнутой точки $t : y \hookrightarrow Y$ выполняются равенства $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{F}, t_*\mathcal{O}_y) = 0$ для всех $i > 0$. Пучок $\mathcal{F}$ локально свободен на U. Таким образом, нужно рассмотреть только случай $y \in Z$. Это значит, что $t = i \cdot t'$ где $t' : y \hookrightarrow Z$ – замкнутая точка на Z. В данном случае

$$\mathrm{Ext}^i_Y(\mathcal{F}, t_*\mathcal{O}_y) = \mathrm{Hom}^i_Z(\mathbf{L}i^*\mathcal{F}, t'_*\mathcal{O}_y) = 0$$

для $i > 0$, по причине того, что $\mathbf{L}i^*\mathcal{F}$ изоморфен локально свободному пучку на Z. □

Лемма 2.6. *Объект $B \in \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(Z))$ совершенный, если и только если объекты $\mathbf{R}p_*(B(n))$ являются совершенными в $\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X))$ для всех $n \in \mathbb{Z}$.*

Доказательство. Если объект B совершенный, то объекты $\mathbf{R}p_*(B(n))$ также совершенные. Обратное утверждение следует из полуортогонального разложения для $\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(Z))$, которое было описано в замечании 1.13. □

Замечание 2.7. Утверждение леммы 2.6 остается верным для любого гладкого морфизма $Z \to X$.

Используя данные две леммы можно доказать следующее утверждение.

Предложение 2.8. *Предположим, что объект $F \in \mathbf{D}_{\mathrm{Sg}}(Y)$ удовлетворяет условию $\overline{\Phi}_{Z*}F \cong 0$. Тогда $F \cong 0$ в $\mathbf{D}_{\mathrm{Sg}}(Y)$.*

Доказательство. В начале отметим, что все схемы X, Z и Y являются горенштейновыми как локально полные пересечения в регулярных схемах. Предложение 1.17 позволяет предполагать, что объект F представлен пучком Коэн-Макалея $\mathcal{F}$, в частности $\underline{\mathcal{E}xt}^i(\mathcal{F}, \mathcal{O}_Y) = 0$ для всех $i \neq 0$. Любой такой пучок $\mathcal{F}$ локально свободен на дополнении $Y \setminus \mathrm{Sing}(Y)$. Кроме того, так как пучок $\mathcal{F}$ имеет правую локально свободную резольвенту, объект $\mathbf{L}i^*\mathcal{F} \cong i^*\mathcal{F}$ является пучком.

Обозначим через $\mathcal{L}$ относительно обильное линейное расслоение на Y, получающееся ограничением линейного расслоения $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}(1)$. Рассмотрим объект $G = \mathbf{L}u^*\mathbf{R}u_*\mathcal{F}$, где $u : Y \hookrightarrow S'$ – замкнутое вложение дивизора Y. С одной стороны, объект G является совершенным комплексом как обратный образ ограниченного комплекса когерентных пучков с регулярной схемы S'. С другой стороны, комплекс G имеет две когомологии: $\mathcal{F}$ как нулевую и $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{-1}$

как (-1)-ю. Отсюда следует, что образ $\mathcal{F}\otimes\mathcal{L}^{-1}$ в $\mathbf{D}_{\mathrm{Sg}}(Y)$ изоморфен образу $\mathcal{F}[-2]$. По предположению, объект $\overline{\Phi}_{Z*}\mathcal{F}$ нулевой, и значит $\overline{\Phi}_{Z*}(\mathcal{F}\otimes\mathcal{L}^n)=0$ для всех $n\in\mathbb{Z}$.

Обозначим пучок $i^*\mathcal{F}$ через $\mathcal{F}'$. Было показано, что $\mathbf{R}p_*(\mathcal{F}'(n))$ совершенные комплексы на X для всех $n\in\mathbb{Z}$. По лемме 2.6 пучок $\mathcal{F}'=i^*\mathcal{F}$ также совершенен как комплекс на Z.

С другой стороны, пучок $\mathcal{F}'=i^*\mathcal{F}$ имеет правую локально свободную резольвенту и, значит, является пучком Коэн-Макалея на Z. Лемма 1.16 говорит, что пучок $\mathcal{F}'=i^*\mathcal{F}=\mathbf{L}i^*\mathcal{F}$ локально свободен на Z. Следовательно, по лемме 2.5 пучок $\mathcal{F}$ локально свободен на всем Y. Таким образом, F изоморфен нулевому объекту в $\mathbf{D}_{\mathrm{Sg}}(Y)$. □

Первое доказательство теоремы 2.1 Мы уже знаем, что функтор $\overline{\Phi}_Z$ вполне строгий по следствию 2.4. Теперь проверим, что функтор $\overline{\Phi}_{Z*}$ также вполне строгий. Возьмем объект $B\in\mathbf{D}_{\mathrm{Sg}}(Y)$ и рассмотрим естественное отображение $\overline{\Phi}_Z\overline{\Phi}_{Z*}B\to B$. Обозначим через C_B его конус. Применяя функтор $\overline{\Phi}_{Z*}$ к получившемуся точному треугольнику и учитывая то, что функтор $\overline{\Phi}_Z$ вполне строгий, имеем изоморфизм $\overline{\Phi}_{Z*}C_B\cong 0$. Предложение 2.8 влечет, что объект C_B изоморфен нулевому объекту. Значит, отображение $\overline{\Phi}_Z\overline{\Phi}_{Z*}B\to B$ есть изоморфизм, и функтор $\overline{\Phi}_{Z*}$ вполне строгий. □

Замечание 2.9. Теорема 2.1 остается верной и в случае фактор-стэков. Предположим, что групповая схема G действует на S так, что на $\mathcal{E}$ имеется структура эквивариантного расслоения, а сечение s инвариантно. В этом случае действие G может быть продолжено на все схемы X,Y,Z и S'. Более того, получаем функтор между эквивариантными категориями $\mathbf{R}i_*p^*:\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}^G(X))\to\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}^G(Y))$. Данный функтор индуцирует функтор $\mathbf{D}_{\mathrm{Sg}}([X/G])\longrightarrow\mathbf{D}_{\mathrm{Sg}}([Y/G])$, который также является эквивалентностью триангулированных категорий.

Второе доказательство теоремы 2.1 основано на полуортогональном разложении производной категории когерентных пучков на Y. Данное разложение является частным случаем разложений, появляющихся в работе [15].

Предложение 2.10. *Категория* $\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}\,Y)$ *имеет полуортогональное разложение вида*

$$\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(Y))=\langle\mathbf{R}i_*p^*\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X)),\ \mathbf{L}\pi^*\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(S))\otimes\mathcal{L},\ \ldots,\ \mathbf{L}\pi^*\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(S))\otimes\mathcal{L}^{r-1}\rangle,$$

где $\mathcal{L}$ *– это ограничение* $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}(1)$ *на* Y.

Доказательство. Во-первых, по предложению 2.2 функтор $\mathbf{R}i_*p^*$ является вполне строгим. Во-вторых, применяя к последовательности

$$0\longrightarrow\mathcal{O}_{\mathcal{E}}(-1)\longrightarrow\mathcal{O}_{S'}\longrightarrow u_*\mathcal{O}_Y\longrightarrow 0$$

функторы $\mathbf{R}q_*(\mathcal{O}_{\mathcal{E}}(-k)\otimes -)$, получаем, что

$$\mathbf{R}\pi_*\mathcal{O}_Y\cong\mathbf{R}q_*\mathbf{R}u_*O_Y\cong\mathcal{O}_S\qquad\text{и}\qquad\mathbf{R}\pi_*\mathcal{L}^{-k}=0\quad\text{для всех}\quad 0<k\le r-2.$$

Отсюда следует, что функтор $\mathbf{L}\pi^* : \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(S)) \longrightarrow \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(Y))$ вполне строгий, и последовательность подкатегорий $\big(\mathbf{L}\pi^*\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(S)) \otimes \mathcal{L}, \dots, \mathbf{L}\pi^*\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(S)) \otimes \mathcal{L}^{r-1}\big)$ является полуортогональной.

В-третьих, для любых $A \in \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X))$ и $B \in \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(S))$ имеется последовательность изоморфизмов

$$\mathrm{Hom}(\mathbf{L}\pi^* B \otimes \mathcal{L}^k,\ \mathbf{R}i_* p^* A) \cong \mathrm{Hom}(\mathbf{L}i^*(\mathbf{L}\pi^* B \otimes \mathcal{L}^k),\ p^* A) \cong \mathrm{Hom}(p^*\mathbf{L}j^* B,\ p^* A(-k)) \cong \mathrm{Hom}(\mathbf{L}j^* B,\ A \otimes \mathbf{R}p_*\mathcal{O}_{\mathcal{N}}(-k)) = 0.$$

И последнее равенство выполнено, т.к. $\mathbf{R}p_*\mathcal{O}_{\mathcal{N}}(-k) = 0$ для $0 < k \le r-1$. Таким образом, получаем полуортогональную последовательность подкатегорий

$$\Big(\mathbf{R}i_* p^*\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X)),\ \mathbf{L}\pi^*\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(S)) \otimes \mathcal{L},\ \dots,\ \mathbf{L}\pi^*\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(S)) \otimes \mathcal{L}^{r-1}\Big). \tag{9}$$

В заключении, осталось показать, что данная последовательность является полной. Обозначим через $\mathcal{C}$ подкатегорию в $\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(Y))$, которая порождена последовательностью (9). Так как $\mathcal{C}$ допустима, имеем полуортогональное разложение $\mathcal{D} = \langle \mathcal{C}^{\perp}, \mathcal{C}\rangle$. Чтобы показать, что $\mathcal{C}^{\perp}$ тривиальна, достаточно проверить, что любой структурный пучок замкнутой точки принадлежит $\mathcal{C}$. Рассмотрим замкнутую точку $y \in Y$. Обозначим через s образ $\pi(y) \in S$. Слой над s изоморфен проективному пространству $\mathbb{P}^{r-2}$, если $s \in S \setminus X$, и изоморфен $\mathbb{P}^{r-1}$, если $s \in X$. В первом случае, т.к. π плоский над s, имеем $\mathcal{O}_{Y_s} \otimes \mathcal{L}^k = \mathbf{L}\pi^*\mathcal{O}_s \otimes \mathcal{L}^k$. Данные пучки при $k = 1, ..., r-1$ принадлежат $\mathcal{C}$ и образуют полный исключительный набор на проективном пространстве $Y_s = \mathbb{P}^{r-2}$. Следовательно, и сам пучок $\mathcal{O}_y$ принадлежит $\mathcal{C}$.

Во втором случае, мы знаем, что $\mathbf{R}i_* p^*\mathcal{O}_s = \mathcal{O}_{Y_s}$ принодлежит $\mathcal{C}$ и объекты $\mathbf{L}\pi^*\mathcal{O}_s \otimes \mathcal{L}^k = \mathbf{L}j^*\mathcal{O}_{Y_s} \otimes \mathcal{L}^k$ также лежат в $\mathcal{C}$ при $k = 1, \dots, r-1$. Объект $\mathbf{L}\pi^*\mathcal{O}_s \otimes \mathcal{L}$ – это комплекс с двумя когомологиями $\mathcal{O}_{Y_s}$ и $\mathcal{O}_{Y_s} \otimes \mathcal{L}$. Так как $\mathcal{O}_{Y_s}$ принадлежит $\mathcal{C}$, то имеем, что и $\mathcal{O}_{Y_s} \otimes \mathcal{L} \in \mathcal{C}$. Повторяя данную процедуру, получаем, что $\mathcal{O}_{Y_s} \otimes \mathcal{L}^k \in \mathcal{C}$ для всех $k = 0, \dots, r-1$. Так как $Y_s = \mathbb{P}^{r-1}$, то по тем же самым причинам как и выше получаем, что $\mathcal{O}_y \in \mathcal{C}$ для всех $y \in Y$. Следовательно наша полуортогональная последовательность является полной. □

Второе доказательство теоремы 2.1 По следствию 1.12 полуортогональное разложение категории $\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X))$ дает полуортогональное разложение для $\mathbf{D}_{\mathrm{Sg}}(Y)$. Так как S регулярна, то $\mathbf{D}_{\mathrm{Sg}}(S)$ тривиальна. Значит, категория $\mathbf{D}_{\mathrm{Sg}}(Y)$ эквивалентна $\mathbf{D}_{\mathrm{Sg}}(X)$. □

3. Применения к D-бранам в моделях Ландау-Гинзбурга.

Под моделью Ландау-Гинзбурга будем иметь в виду следующий набор данных: гладкое многообразие X с симплектической кэлеровой формой ω и регулярной непостоянной функцией W на X, которая рассматриваемая как плоский морфизм $W : X \longrightarrow \mathbb{A}^1$ должна быть симплектическим расслоением. Функция W называется суперпотенциалом. Отметим, что для определения D-бран типа B симплектическая форма не нужна.

Математическое определение категории D-бран типа B для аффинной модели Ландау-Гинзбурга было предложено М.Концевичем (см. [11, 18]). Вкратце говоря, он предположил, что суперпотенциал W превращает комплексы когерентных пучков в "скрученные"комплексы, т.е композиция дифференциалов теперь не равна нулю, а есть умножение на W. Такое "скручивание"разрушает $\mathbb{Z}$-градуировку до $\mathbb{Z}/2$-градуировки. В статье [11] была проверена эквивалентность данного определения с физическим понятием B-бран в ЛГ-модели для случая простейшего квадратичного суперпотенциала и были предложены физические аргументы, подтверждающие данное определение в общем случае.

В статье [18] (Следствие 3.10) было доказано, что категория B-бран на гладком аффинном X с суперпотенциалом W эквивалентна произведению $\prod\limits_{\lambda\in\mathbb{A}^1}\mathbf{D}_{\mathrm{Sg}}(X_\lambda)$, где X_λ – слой над $\lambda\in\mathbb{A}^1$. (Заметим, что данное произведение конечно.) Для не аффинного X категория $\prod\limits_{\lambda\in\mathbb{A}^1}\mathbf{D}_{\mathrm{Sg}}(X_\lambda)$ может рассматриваться как определение категории D-бран типа B.

Пусть S – гладкое квазипроективное многообразие, и пусть $f,g\in H^0(S,\mathcal{O}_S)$ – две регулярных функции. Предположим, что дивизор нулей $D\subset S$, задаваемый функцией g, является гладким, и ограничение f на D не является постоянной. Многообразие D может быть рассмотрено как модель Ландау-Гинзбурга с суперпотенциалом $f_D: D\to\mathbb{A}^1$. Обозначим через D_λ слой отображения $f_D: D\to\mathbb{A}^1$ над точкой $\lambda\in\mathbb{A}^1$.

Другая модель Ландау-Гинзбурга состоит из гладкого многообразия $T=S\times\mathbb{A}^1$ и суперпотенциала $W: T\to\mathbb{A}^1$, заданного по правилу $W=f+xg$, где x – координата на $\mathbb{A}^1$. Обозначим через T_λ слой W над точкой λ. Естественное замкнутое вложение $Z_\lambda=D_\lambda\times\mathbb{A}^1$ в T индуцирует замкнутое вложение $i_\lambda: D_\lambda\to T_\lambda$. Рассмотрим функтор

$$\Phi_{Z_\lambda}=\mathbf{R}i_{\lambda *}p_\lambda^*:\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(D_\lambda))\to\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(T_\lambda)),$$

где $p_\lambda: Z_\lambda\to D_\lambda$ каноническая проекция.

Теорема 3.1. *Функтор* $\Phi_{Z_\lambda}:\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(D_\lambda))\to\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(T_\lambda))$ *индуцирует функтор* $\overline{\Phi}_{Z_\lambda}:\mathbf{D}_{\mathrm{Sg}}(D_\lambda)\xrightarrow{\sim}\mathbf{D}_{\mathrm{Sg}}(T_\lambda)$ *который является эквивалентностью триангулированных категорий.*

Доказательство. Это частный случай теоремы 2.1. Чтобы применить ее, рассмотрим тривиальное двумерное векторное расслоение $\mathcal{E}=\mathcal{O}_S^{\oplus 2}$ на S и сечение $s_\lambda\in H^0(S,\mathcal{E})$, которое задается двумя функциями $g, f-\lambda\mathbf{1}$. Таким образом D_λ – это подмногообразие нулей s_λ и является аналогом схемы X из теоремы 2.1. Повторяя конструкцию предшествующую теореме 2.1, получим многообразия $Z=X\times\mathbb{P}^1$ и $Y\subset S\times\mathbb{P}^1$, которые являются компактификациями Z_λ и T_λ соответственно. По теореме 2.1 триангулированные категории особенностей $X=D_\lambda$ и Y эквивалентны. Дополнение T_λ в Y является относительно обильным дивизором, который не пересекается с особенностями $\mathrm{Sing}(Y)=\mathrm{Sing}(T_\lambda)$. Следовательно, по предложению 1.3 многообразия Y и T_λ также имеют эквивалентные триангулированные категории особенностей. □

Следствие 3.2. *Пусть* S *– гладкое квазипроективное многообразие и* f,g *– две регулярные функции, такие, что* $D:=\{g=0\}\subset S$ *гладкое, и ограничение* f_D *не является постоянным. Тогда модели Ландау-Гинзбурга* $f_D: D\to\mathbb{A}^1$ *и* $W: S\times\mathbb{A}^1\to\mathbb{A}^1$, *где* $W=f+xg$, *имеют эквивалентные категории D-бран типа B.*

Список литературы

[1] Berthelot P., Grothendieck A., Illusie L., *Théorie des intersections et théoreme de Riemann-Roch*, SGA6, Springer Lect. Notes in Math., v.225 (1971).

[2] Бондал А.И., Капранов М., *Представимые функторы, функторы Серра и перестройки*, Изв. АН СССР, Сер. Матем., т.53, N6 (1989) 1183-1205.

[3] Bondal A., Orlov D., *Semiorthogonal decomposition for algebraic varieties*, preprint MPIM 95/15 (1995), arXiv:math.AG/9506012.

[4] Douglas M.R., *D-branes, categories and N=1 supersymmetry*, J.Math.Phys., v.42, 2818 (2001).

[5] Gabriel P., Zisman M., *Calculus of fractions and homotopy theory*, Springer, Berlin (1967); перевод: Габриель П., Цисман М., *Категории частных и теория гомотопий*, Изд. "Мир", Москва (1971).

[6] Гельфанд С. И., Манин Ю. И., *Методы гомологической алгебры. Введение в теорию когомологий и производных категорий*, Изд. "Наука", Москва (1988).

[7] Hartshorne R., *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, No. 52. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, (1977); перевод: Хартсхорн Р., *Алгебраическая геометрия,* Изд. "Мир", Москва (1981).

[8] Hartshorne R., *Residues and Duality*, Springer Lect. Notes Math., v.20 (1966).

[9] Hori K., Iqbal A., Vafa C., *D-branes and Mirror Symmetry*, arXiv:hep-th/0005247.

[10] Hori K., Vafa C., *Mirror Symmetry*, arXiv:hep-th/0002222.

[11] Kapustin A., Li Yi, *D-branes in Landau-Ginzburg models and algebraic geometry*, J. High Energy Phys., JHEP 12 (2003) 005, arXiv:hep-th/0210296.

[12] Kashiwara M., Schapira P., *Sheaves on Manifoldss*, Springer, Berlin (1994); перевод: Кашивара М., Шапира П., *Пучки на многообразиях*, Из-во "Мир", Москва (1994).

[13] Keller B., *Derived categories and their uses*, Chapter of the Handbook of algebra, Vol. 1, edited by M. Hazewinkel, Elsevier (1996).

[14] Kontsevich M., *Homological algebra of mirror symmetry*, Proceedings of ICM (Zurich, 1994), 120-139, Basel: Birkhäuser (1995).

[15] Kuznetsov A., *Homological projective duality*, in preparation.

[16] Neeman A., *Triangulated categories*, Ann. of Math. Studies, 148. Princeton University Press (2001).

[17] Орлов Д.О., *Проективные расслоения, моноидальные преобразования и производные категории когерентных пучков*, Известия РАН, Сер. Матем., т.56, N4 (1992) 852-862.

[18] Орлов Д.О., *Триангулированные категории особенностей и D-браны в моделях Ландау-Гинзбурга*, Труды Матем. Инст. Стеклова РАН, т. 246, (2004) 240-262.

[19] Seidel P., *Vanishing cycles and mutations*, Proc. 3rd European Congress of Mathematics (Barcelona, 2000), Vol. II, Progr. Math., 202, Birkhäuser, Basel, (2001), 65–85, arXiv:math.SG/0007115.

[20] Thomason R.W., Trobaugh T., *Higher Algebraic K-Theory of Schemes and of Derived Categories*, The Grothendieck Festschrift v.III, Birhäuser, Boston, Basel, Berlin, (1990), 247-436.

[21] Thomason R.W., *Equivariant resolution, linearization, and Hilbert's fourteenth problem over arbitrary base schemes*, Adv. in Math., v. 65 (1987), no. 1, 16–34.

[22] Totaro B., *The resolution property for schemes and stacks*, J. Reine Angew. Math., v.577 (2004), 1-22.

[23] Verdier J.L., *Categories derivées*, in SGA 4 1/2, Lecture Notes in Math., v.569, Springer-Verlag, (1977).

Отдел алгебры, Математический институт им. В.А.Стеклова РАН, ул. Губкина 8, Москва 119991, Россия

E-mail address: orlov@mi.ras.ru