ТРИАНГУЛИРОВАННЫЕ КАТЕГОРИИ ОСОБЕННОСТЕЙ И D-БРАНЫ В МОДЕЛЯХ ЛАНДАУ-ГИНЗБУРГА

ДМИТРИЙ ОРЛОВ

Посвящается светлой памяти Андрея Николаевича Тюрина – наставника и друга

Аннотация. В работе определяются триангулированные категории особенностей и изучаются их основные свойства. Устанавливается связь между категориями данного типа и категориями D-бран типа B в моделях Ландау-Гинзбурга. Эта связь интересна своими применениями к зеркальной симметрии.

Введение

Не смотря на физические термины в названии, данная статья является чисто математической. Ее цель – ввести в рассмотрение триангулированные категории, связанные с особенностями алгебраических многообразий, и установить соответствие этих категорий с D-бранами в моделях Ландау-Гинзбурга Существует два вида категорий, возникающих при изучении особенностей (или особенностей отображений). Категории первого типа должны описываться исчезающими циклами и тесно связаны с категориями, которые были введены в [24] для симплектических пучков Пикара-Лефшеца. Категории второго типа чисто алгебраические и возникают из производных категорий когерентных пучков. Категории второго типа будут центральными в данной работе. Важным понятием здесь является понятие совершенного комплекса, введенное в [3]. Совершенный комплекс – это комплекс пучков, который локально квази-изоморфен ограниченному комплексу из локально свободных пучков конечного типа (см. например [25]).

Всякому алгебраическому многообразию X можно сопоставить ограниченную производную категорию когерентных пучков $\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X))$. Эта категория допускает триангулированную структуру. Совершенные комплексы образуют триангулированную подкатегорию $\mathfrak{Perf}(X)$ в производной категории когерентных пучков. Если многообразие X гладкое, то всякий когерентный пучок имеет конечную резольвенту из локально свободных пучков конечного типа, и, следовательно, подкатегория совершенных комплексов совпадает со всей $\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X))$. Однако для особых многообразий данное свойство не выполнено. Введем определение триангулированной категории особенностей $\mathbf{D}_{Sg}(X)$ как фактор триангулированной категории $\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X))$ по полной триангулированной подкатегории совершенных комплексов $\mathfrak{Perf}(X)$. Категория $\mathbf{D}_{Sg}(X)$ отражает свойства особенностей X и "не зависит от всего X ". К примеру, мы покажем, что она инвариантна относительно локализации в топологии Зариского (предложение 1.14). Когда X горенштейнова, категория $\mathbf{D}_{Sg}(X)$ имеет дополнительные хорошие свойства. В этом случае, если локус особенностей является полным, тогда все пространства морфизмов между объектами конечномерны (следствие 1.24). Интерес к таким категориям вызван гипотезой о гомологической зеркальной симметрии ([21]).

В основном, работы по топологической теории струн имеют дело с N=2 суперконформными сигма-моделями с многообразием Калаби-Яу в качестве target space. В этой ситуации теория поля имеет две топологические версии: A-models and B-models. Соответствующие D-браны называются A-бранами и B-бранами. Зеркальная симметрия должна переставлять эти два класса D-бран. С математической точки зрения категория B-бран на Калаби-Яу есть производная категория когерентных пучков на нем ([21],[7]). В качестве кандидата категории A-бран на Калаби-Яу предлагается так называемая категория Фукаи. Ее объекты – это, грубо говоря, лагранжевы подмногообразия с плоскими расслоениями ([21]). Гипотеза о гомологической зеркальной симметрии утверждает, что для зеркально симметричных многообразий Калаби-Яу X и Y производная категория когерентных пучков на X эквивалентна категории Фукая на Y , и наоборот.

С другой стороны, физики также рассматривают более общие N=2 теории поля и соответствующие D-браны. Один из классов таких теорий получаются как сигма-модели на многообразия Фано. Другое множество примеров происходят из N=2 моделей Ландау-Гинзбурга. Во многих случаях эти два класса N=2 теорий связаны зеркальной симметрией ([15]). К примеру сигма-модель для $\mathbb{P}^n$ зеркально симметрична модели Ландау-Гинзбурга с суперпотенциалом

$$W = x_1 + \cdots + x_n + \frac{1}{x_1 \cdots x_n}$$

на $\mathbb{C}^{*n}$. Общее определение модели Ландау-Гинзбурга включает кроме многообразия еще выбор голоморфной функции W на нем. В частности, нетривиальная модель Ландау-Гинзбурга может быть задана только на некомпактном многообразии.

Для многообразий Фано существуют как производная категория когерентных пучков (B-браны) так и, при наличии симплектической формы, категория Фукая (A-branes). Таким образом, если мы хотим распространить гипотезу о гомологической зеркальной симметрии на случай, когда многообразие не есть Калаби-Яу, мы должны понять D-браны в моделях Ландау-Гинзбурга.

Категории A-бран в моделях Ландау-Гинзбурга изучались в [14] и в [24] с математической точки зрения. Зеркальная симметрия связывает B-браны на многообразиях Фано (когерентные пучки) с A-бранами в ЛГ-моделях. Для $\mathbb{P}^n$ зеркальная симметрия была проверена в [14] (и для $\mathbb{P}^2$ в [24] с математической точки зрения).

Можно рассмотреть категорию Фукая (A-браны) на многообразиях Фано. Ожидается, что она эквивалентна категории B-бран в зеркально симметричной модели Ландау-Гинзбурга. Если принять зеркальную симметрию, то можно предсказать ответ для категории Фукая на многообразии Фано, изучая B-браны в зеркальной ЛГ-модели. Как правило B-браны изучать легче, чем A-браны.

Математическое определение категории B-бран в моделях Ландау-Гинзбурга было предложено М. Концевичем. Коротко, оно состоит в том, что суперпотенциал W деформирует комплексы когерентных пучков в "скрученные"комплексы, в которых композиция дифференциалов больше не равна нулю, а есть умножение на W . Такая "скрутка"нарушает $\mathbb{Z}$-градуировку до $\mathbb{Z}/2$-градуировки. Эквивалентность данного определения с физическим понятием B-браны в моделях Ландау-Гинзбурга была проверена в [16] для обычного квадратисного суперпотенциала $W = x_1^2 + \cdots + x_n^2$ и там же были предложены аргументы в поддержку данного определения и в общем случае.

Мы установим связь между категориями B-бран в моделях Ландау-Гинзбурга и триангулированными категориями особенностей. Рассматривая особые слои отображения W, будет показано, что триангулированные категории особенностей этих слоев эквивалентны категориям B-бран (теорема 3.9). В частности, получается, что не смотря на тот факт, что категория B-бран определяется с использованием всего пространства X, она зависит только от особых слоев суперпотенциала. Данный результат для вычисления категорий B-бран в моделях Ландау-Гинзбурга. Замечательным является тот факт, что эта конструкция была известна в теории особенностей под названием матричная факторизация, и была введена в [8] для изучения максимальных Коэн-Макалеевых модулей над локальным кольцом.

Другой результат, полезный для вычислений, связывает категории B-бран в разных размерностях (теорема 2.1). (Данный факт для максимальных Коэн-Макалеевых модулей известен в локальной теории особенностей как периодичность Кноррера.) Он утверждает следующее: Пусть $W : X \to \mathbb{C}$ – суперпотенциал, и $W' = W + xy$ – суперпотенциал на многообразии $Y = X \times \mathbb{C}^2$, где x, y – координаты на $\mathbb{C}^2$. Тогда категории B-бран в моделях Ландау-Гинзбурга на Y и X эквивалентны. В действительности, мы доказываем данное утверждение для триангулированных категорий особенностей слоев X_0 и Y_0 над точкой 0 (теорема 2.1). Но принимая во внимание, что категории особенностей эквивалентны категориям B-бран (теорема 3.9), получаем ту связь, которая была описана выше.

В заключении приводится вычисление категории B-бран в модели Ландау-Гинзбурга с суперпотенциалом $W = z_0^n + z_1^2 + \cdots + z_{2k}^2$ на $\mathbb{C}^{2k+1}$, особенность которого соответствует диаграмме Дынкина типа A_{n-1}. Данная категория имеет $n-1$ неразложимый объект. Мы описываем морфизмы между ними функтор сдвига и триангулированную структуру.

1. Особенности и триангулированные категории

1.1. **Триангулированные категории и локализации.** В этом параграфе напоминаются определения триангулированной категории и ее локализации, введенные в работе [26] (см. также [10],[17],[18]). Пусть $\mathcal{D}$ – аддитивная категория. Структура триангулированной категории на $\mathcal{D}$ определяется заданием следующих данных:

a) аддитивный функтор сдвига $[1] : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$, который является автоэквивалентностью.
b) некоторый класс точных (выделенных) треугольников:

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1],$$

которые должны удовлетворять набору аксиом T1-T4.

T1. a) Для каждого объекта X треугольник $X \xrightarrow{\mathrm{id}} X \longrightarrow 0 \longrightarrow X[1]$ выделен.
b) Если треугольник выделен, то любой изоморфный ему также выделен.
c) Любой морфизм $X \xrightarrow{u} Y$ можно дополнить до выделенного треугольника $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$.

T2. Треугольник $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ выделен тогда и только тогда, когда выделен треугольник $Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1] \xrightarrow{-u[1]} Y[1]$.

T3. Если даны два выделенных треугольника и два морфизма между их началами, образующие коммутативный квадрат, тогда эта диаграмма дополняется до морфизма треугольников:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, dotted, "h"] & X[1] \arrow[d, "f[1]"] \\
X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & X'[1].
\end{tikzcd}$$

T4. Для каждой пары морфизмов $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z$ существует коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "x"] \arrow[d, "v"'] & Z' \arrow[r] \arrow[d, "w"] & X[1] \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r] & Z \arrow[r, "y"] \arrow[d] & Y' \arrow[r, "w'"] \arrow[d, "t"] & X[1] \arrow[d, "u[1]"] \\
 & X' \arrow[r, equal] \arrow[d, "r"] & X' \arrow[r, "r"] \arrow[d] & Y[1] \\
 & Y[1] \arrow[r, "x[1]"] & Z'[1] &
\end{tikzcd}$$

где первые две строчки и два центральных столбца – выделенные треугольники.

Аддитивный функтор $F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}'$ между двумя триангулированными категориями $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}'$ называется **точным** если он коммутирует с функторами сдвига, то есть зафиксирован изоморфизм функторов $t : F \circ [1]_{\mathcal{D}} \xrightarrow{\sim} [1]_{\mathcal{D}'} \circ F,$ и переводит выделенные треугольники в выделенные треугольники, то есть для каждого выделенного треугольника $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ из $\mathcal{D}$ треугольник

$$FX \xrightarrow{Fu} FY \xrightarrow{Fv} FZ \xrightarrow{t_X Fw} FX[1]$$

является выделенным.

Полная аддитивная подкатегория $\mathcal{N} \subset \mathcal{D}$ называется полной триангулированной подкатегорией если выполняются следующие условия: она замкнута относительно функтора сдвига в $\mathcal{D}$ и всякий раз, когда два объекта выделенного треугольника принадлежат ей, третий объект также принадлежит. Полная триангулированная подкатегория $\mathcal{N} \subset \mathcal{D}$ называется **толстой**, если она замкнута относительно взятия прямых слагаемых в $\mathcal{D}$.

Напомним определение локализации категории. Пусть $\mathcal{C}$ – категория, и Σ – некоторый класс морфизмов в $\mathcal{C}$. Хорошо известно (см.[9]), что всегда существует категория $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ и функтор $Q : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$, который универсальный среди функторов, делающих морфизмы из Σ обратимыми ([9]). (Отметим, что в общем случае объекты категории $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ образуют не множество а класс.) Локализация категории по классу морфизмов Σ имеет хорошее описание, если Σ является мультипликативной системой.

Семейство морфизмов Σ в категории $\mathcal{C}$ называется **мультипликативной системой**, если выполнены следующие условия:

M1. все тождественные морфизмы категории принадлежат Σ ;

M2. композиция любых двух морфизмов из Σ также принадлежит Σ ;

М3. любую диаграмму вида $X' \xleftarrow{s} X \xrightarrow{u} Y$, где $s \in \Sigma$, можно дополнить до коммутативного квадрата

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "s"'] & Y \arrow[d, dashed, "t"] \\
X' \arrow[r, dashed, "u'"] & Y'
\end{tikzcd}$$

где $t \in \Sigma$ (то же самое в случае, когда все стрелки обращены);

М4. для любых двух морфизмов f, g существование $s \in \Sigma$ со свойством $fs = gs$ равносильно существованию $t \in \Sigma$ со свойством $tf = tg$.

Если Σ является мультипликативной системой, то категорию $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ можно описать таким способом. Объекты $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ те же, что и объекты $\mathcal{C}$. Морфизмы из X в Y – это классы эквивалентностей диаграмм (s, f) в $\mathcal{C}$ вида

$$X \xrightarrow{f} Y' \xleftarrow{s} Y, \qquad s \in \Sigma,$$

причем две диаграммы (f, s) и (g, t) эквивалентны, если их можно включить в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & Y' \arrow[d] & \\
X \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "g"'] & Y''' & Y \arrow[ul, "s"'] \arrow[l, "r"'] \arrow[dl, "t"] \\
 & Y'' \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

с $r \in \Sigma$.

Композиция морфизмов (f, s) и (g, t) есть морфизм $(g'f, s't)$, который строится с помощью квадрата из М3:

$$\begin{tikzcd}
 & & Z'' & & \\
 & Y' \arrow[ur, dashed, "g'"] & & Z' \arrow[ul, dashed, "s'"'] & \\
X \arrow[ur, "f"] & & Y \arrow[ul, "s"'] \arrow[ur, "g"] & & Z \arrow[ul, "t"']
\end{tikzcd}$$

Не трудно видеть, что $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ действительно является категорией, а канонический функтор

$$Q : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}[\Sigma^{-1}], \quad X \mapsto X, f \mapsto (f, 1)$$

обращает все элементы Σ и является универсальным в этом смысле (см. [9]).

Пусть теперь $\mathcal{D}$ – триангулированная категория и $\mathcal{N} \subset \mathcal{D}$ – полная триангулированная подкатегория. Обозначим через $\Sigma(\mathcal{N})$ класс морфизмов s в $\mathcal{D}$, которые включаются в точный треугольник

$$X \xrightarrow{s} Y \longrightarrow N \longrightarrow X[1],$$

где $N \in \mathcal{N}$. Можно проверить, что $\Sigma(\mathcal{N})$ является мультипликативной системой. Положим

$$\mathcal{D}/\mathcal{N} := \mathcal{D}[\Sigma(\mathcal{N})^{-1}].$$

Оснастим категорию $\mathcal{D}/\mathcal{N}$ функтором сдвига, индуцированным функтором сдвига в категории $\mathcal{D}$.

Лемма 1.1. *Категория $\mathcal{D}/\mathcal{N}$ становится триангулированной категорией, если в качестве выделенных треугольников взять треугольники, изоморфные образам выделенных треугольников из $\mathcal{D}$. Естественный функтор $Q : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}/\mathcal{N}$ аннигилирует подкатегорию $\mathcal{N}$. Более того, всякий точный функтор $F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}'$, для которого $F(X) \simeq 0$ для всех $X \in \mathcal{N}$, единственным образом пропускается через Q .*

Следующая лемма, которая нам будет нужна в дальнейшем, очевидна.

Лемма 1.2. *Пусть $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ – полные триангулированные подкатегории в триангулированных категориях $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ соответственно. Пусть $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ и $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ – пара сопряженных точных функторов, таких что $F(\mathcal{M}) \subset \mathcal{N}$ и $G(\mathcal{N}) \subset \mathcal{M}$. Тогда они индуцируют функторы*

$$\overline{F} : \mathcal{C}/\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{D}/\mathcal{N}, \qquad \overline{G} : \mathcal{D}/\mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{C}/\mathcal{M},$$

которые сопряжены.

Предложение 1.3. ([26], [17]). *Пусть $\mathcal{D}$ – триангулированная категория, и $\mathcal{D}', \mathcal{N}$ – полные триангулированные подкатегории. Пусть $\mathcal{N}' = \mathcal{D}' \cap \mathcal{N}$. Предположим, что всякий морфизм $N \to X'$ с $N \in \mathcal{N}$ и $X' \in D'$ допускает факторизацию вида $N \to N' \to X'$ с $N' \in \mathcal{N}'$. Тогда естественный функтор*

$$\mathcal{D}'/\mathcal{N}' \longrightarrow \mathcal{D}/N$$

является вполне строгим.

1.2. **Триангулированные категории особенностей.** Пусть X – схема над полем k . Будем говорить, что она удовлетворяет условию (ELF), если она

(ELF) отделимая, нетерова, конечной размерность Крулля, и категория когерентных пучков $\mathrm{coh}(X)$ имеет достаточно много локально свободных пучков.

Последнее условие означает, что для любого когерентного пучка $\mathcal{F}$ найдется векторное расслоение $\mathcal{E}$ с эпиморфизмом $\mathcal{E} \twoheadrightarrow \mathcal{F}$. К примеру всякая квазипроективная схема удовлетворяет всем этим условиям. Отметим, что любая, как замкнутая, так и открытая подсхема X также является нетеровой, конечной размерности и имеет достаточно много локально свободных пучков. Это очевидно для замкнутой подсхемы, в то время как для открытой подсхемы U это следует из того факта, что всякий когерентный пучок на U может быть получен ограничением когерентного пучка с X (см. [12], упр.5.15).

Обозначим через $\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X))$ (соотв. $\mathbf{D}^b(\mathrm{Qcoh}(X))$) ограниченную производную категорию когерентных (соотв. квази-когерентных) пучков на X . Эти категории имеют канонические триангулированные структуры.

Нетеровость схемы X влечет тот факт, что естественный функтор $\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X)) \longrightarrow \mathbf{D}^b(\mathrm{Qcoh}(X))$ является вполне строгим и осуществляет эквивалентность категории $\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X))$ с полной подкатегорией $\mathbf{D}^b(\mathrm{Qcoh}(X))_{\mathrm{coh}} \subset \mathbf{D}^b(\mathrm{Qcoh}(X))$, состоящей из всех комплексов с когерентными когомологиями (см. [3] II, 2.2.2). По этой причине, всякий раз, когда категория

$\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X))$ рассматривается как подкатегория $\mathbf{D}^b(\mathrm{Qcoh}(X))$, она будет отождествляться с полной подкатегорией $\mathbf{D}^b(\mathrm{Qcoh}(X))_{\mathrm{coh}}$.

Лемма 1.4. ([3], [25]) *Пусть X – как выше. Тогда для всякого ограниченного справа комплекса квазикогерентных пучков $C^{\cdot}$ на X существует ограниченный справа комплекс локально свободных пучков $P^{\cdot}$ и квази-изоморфизм комплексов $P^{\cdot} \xrightarrow{\sim} C^{\cdot}$. Более того, если $C^{\cdot} \in \mathbf{D}^b(\mathrm{Qcoh}(X))_{\mathrm{coh}}$, то тогда существует ограниченный справа комплекс локально свободных пучков конечного типа $P^{\cdot}$ и квази-изоморфизм $P^{\cdot} \xrightarrow{\sim} C^{\cdot}$.*

Напомним конструкции стандартных функторов обрезания. Пусть $C^{\cdot}$ – некоторый комплекс. Существует грубое обрезание

$$\sigma^{\geq k} C^{\cdot} = \cdots \to 0 \to C^k \to C^{k+1} \to C^{k+2} \to \cdots ,$$

которое является подкомплексом $C^{\cdot}$. Фактор-комплекс $C^{\cdot}/\sigma^{\geq k}C^{\cdot}$ – это другое грубое обрезание, которое обозначается $\sigma^{\leq k-1}C^{\cdot}$. Существует также каноническое обрезание

$$\tau^{\geq k} C^{\cdot} = \cdots \to 0 \to \mathrm{Im}\, d\, C^{k-1} \to C^k \to C^{\cdot} \to \cdots .$$

Существует факторизация $C^{\cdot} \twoheadrightarrow \tau^{\geq k}C^{\cdot}$, которая индуцирует изоморфизм на когомологиях H^n для всех $n \geq k$. Ядро этого отображения обозначается $\tau^{\leq k-1}C^{\cdot}$.

Определение 1.5. *Ограниченный комплекс когерентных пучков будет называется* совершенным комплексом*, если он квази-изоморфен ограниченному комплексу локально свободных пучков конечного типа.*

Лемма 1.6. *Всякий комплекс $C^{\cdot}$, который в категории $\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X))$ изоморфен ограниченному комплексу из локально свободных пучков, яляется совершенным.*

Доказательство. Изоморфизм в производной категории может быть представлен как "домик" $P^{\cdot} \xleftarrow{s} E^{\cdot} \xrightarrow{t} C^{\cdot}$, где $P^{\cdot}$ – ограниченный комплекс из локально свободных пучков, а s, t – квази-изоморфизмы. По лемме 1.4 существует ограниченный справа комплекс $Q^{\cdot}$ локально свободных пучков и квази-изоморфизм $Q^{\cdot} \to E^{\cdot}$. Рассмотрим каноническое обрезание $\tau^{\geq -k}Q^{\cdot}$ для достаточно большого k . Так как $E^{\cdot}$ ограничен, существует морфизм $r : \tau^{\geq -k}Q^{\cdot} \to E^{\cdot}$, который также есть квази-изоморфизм. Чтобы доказать лемму, достаточно проверить, что $\tau^{\geq -k}Q^{\cdot}$ является комплексом из локально свободных пучков. Рассмотрим композицию $sr : \tau^{\geq -k}Q^{\cdot} \to P^{\cdot}$, которая есть квази-мзоморфизм. Конус sr – ограниченный ацикличный комплекс, все члены которого, за исключением может быть самого левого, локально свободны. Но ацикличность влечет, что и крайний слева член также локально свободен, по той причине, что ядро эпиморфизма расслоений является расслоением. Таким образом, $\tau^{\geq -k}Q^{\cdot}$ – это ограниченный комплекс из локально свободных, и, следовательно, $C^{\cdot}$ является совершенным. □

Совершенные комплексы образуют полную триангулированную подкатегорию $\mathfrak{Perf}(X) \subset \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X))$, которая является толстой.

Замечание 1.7. На самом деле, совершенный комплекс определяется как комплекс $\mathcal{O}_X$ -модулей локально квази-изоморфных ограниченному комплексу локально свободных пучков конечного типа. Однако при наших условиях на схему всякий такой комплекс квази-изоморфен ограниченному комплексу из локально свободных пучков конечного типа (см. [3] II, or [25] §2).

Определение 1.8. *Определим триангулированную категорию* $\mathbf{D}_{Sg}(X)$ *как фактор триангулированной категории* $\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X))$ *по полной триангулированной подкатегории* $\mathfrak{Perf}(X)$ *и назовем ее триангулированной категорией особенностей* X *.*

Замечание 1.9. Это хорошо известно, что если схема X удовлетворяет (ELF) и является регулярной, то подкатегория совершенных комплексов совпадает со всей ограниченной производной категорией когерентных пучков. Следовательно, в этом случае триангулированная категория особенностей является тривиальной.

Можно также рассмотреть полную триангулированную подкатегорию $\mathfrak{Lfr}(X) \subset \mathbf{D}^b(\mathrm{Qcoh}(X))$, состоящую из тех объектов, которые изоморфны ограниченным комплексам локально свободных пучков в $\mathbf{D}^b(\mathrm{Qcoh}(X))$. Аргументы из леммы 1.6 применимы и в данном случае, и они показывают, что для любого комплекса $C^{\cdot} \in \mathfrak{Lfr}(X)$ существует ограниченный комплекс из локально свободных пучков $P^{\cdot}$ и квази-изоморфизм $P^{\cdot} \to C^{\cdot}$. Применяя лемму 1.4, можно показать, что подкатегория $\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X)) \cap \mathfrak{Lfr}(X)$ совпадаетс с подкатегорией совершенных комплексов $\mathfrak{Perf}(X)$.

Определим триангулированную категорию $\mathbf{D}'_{Sg}(X)$ как фактор $\mathbf{D}^b(\mathrm{Qcoh}(X))/\mathfrak{Lfr}(X)$. Полное вложение $\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X)) \longrightarrow \mathbf{D}^b(\mathrm{Qcoh}(X))$ индуцирует функтор $\mathbf{D}_{Sg}(X) \longrightarrow \mathbf{D}'_{Sg}(X)$. Сейчас мы покажем, что данный функтор также является вполне строгим.

Лемма 1.10. *Пусть схема* X *удовлетворяет (ELF), и пусть* $\mathcal{F}$ *– квазикогерентный пучок на* X *такой, что для всякой точки* $x \in \mathrm{Sing}(X)$ *он является локально свободным в некоторой окрестности* x *. Тогда данный пучок принадлежит подкатегории* $\mathfrak{Lfr}(X)$ *. Если к тому же* $\mathcal{F}$ *когерентен, то он является совершенным комплексом.*

Доказательство. По лемме 1.4 существует ограниченный справа комплекс $Q^{\cdot}$ из локально свободных пучков и квази-изоморфизм $Q^{\cdot} \to \mathcal{F}$. Рассмотрим каноническое обрезание $\tau^{\geq -k}Q^{\cdot}$ для достаточно большого k . Существует морфизм $r : \tau^{\geq -k}Q^{\cdot} \to \mathcal{F}$, который также является квази-изоморфизмом. Для доказательства леммы достаточно показать, что $\tau^{\geq -k}Q^{\cdot}$ есть комплекс из локально свободных пучков. Все члены данного комплекса, исключая может быть крайний слева, локально свободны. Но для любой точки $x \in \mathrm{Sing}(X)$ крайний слева член также локально свободен некоторой ее окрестности, что следует из локальной свободы $\mathcal{F}$. Если теперь $x \notin \mathrm{Sing}(X)$, тогда существует окрестность U точки x , которая регулярна. И, следовательно, крайний слева член локально свободен на U в предположении, что $k > \dim X$.

Если к тому же $\mathcal{F}$ когерентен, тогда мы можем взять такую резольвенту $Q^{\cdot}$, все члены которой имеют конечный тип. И, значит, $\mathcal{F}$ является совершенным. □

В частности, из данной леммы следует, что если носитель объекта $E^{\cdot} \in \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X))$ не пересекается с $\mathrm{Sing}(X)$, то $E^{\cdot}$ является совершенным.

Лемма 1.11. *Пусть схема* X *удовлетворяет (ELF). Тогда всякий объект* $A \in \mathbf{D}_{Sg}(X)$ *изоморфен объекту вида* $\mathcal{F}[k]$ *, где* $\mathcal{F}$ *– когерентный пучок.*

Доказательство. Объект A – это ограниченный комплекс когерентных пучков. Давайте рассмотрим ограниченную справа резольвенту из локально свободных $P^\cdot \xrightarrow{\sim} A$, существование которой обеспечивает лемма 1.4. Рассмотрим грубое обрезание $\sigma^{\geq -k}P^\cdot$ для достаточно большого $k \gg 0$. Обозначим через $\mathcal{F}$ когомологию $H^{-k}(\sigma^{\geq -k}P^\cdot)$. Очевидно, что $A \cong \mathcal{F}[k+1]$ в $\mathbf{D}_{Sg}(X)$. □

Лемма 1.12. *Пусть схема X удовлетворяет (ELF). Тогда для каждого локально свободного пучка $\mathcal{E}$ и для любого квазикогерентного пучка $\mathcal{F}$*

$$\mathrm{Ext}^i(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = 0, \qquad \text{для всех} \quad i > n.$$

Доказательство. Пусть $U_1 \cup \ldots \cup U_n$ – некоторое аффинное покрытие X. Для каждой подпоследовательности индексов $I = (i_1, \ldots, i_k)$, положим $U_I = U_{i_1} \cap \ldots \cap U_{i_k}$, и $j_I : U_I \hookrightarrow X$ – открытое вложение. Так как X отделима, каждое U_I является аффинным, и каждый j_I – аффиное отображение. Следовательно, функтор j_{I*} точен и сохраняет квазикогерентность.

Рассмотрим гиперпокрывающий по Чеху комплекс квазикогерентных пучков

$$0 \to \mathcal{F} \to \bigoplus_{i=1}^{n} j_{i*}j_i^*\mathcal{F} \to \bigoplus_{I=(i_1,i_2)} j_{I*}j_I^*\mathcal{F} \to \bigoplus_{I=(i_1,i_2,i_3)} j_{I*}j_I^*\mathcal{F} \to \cdots \tag{1}$$

Он является точной последовательностью пучков.

Так как все $U_I = \mathrm{Spec}(A_I)$ аффинны, категория квазикогерентных пучков на U_I эквивалентна категории A_I-модулей. Следовательно, имеется зануление

$$\mathrm{Ext}^i(\mathcal{E}, j_{I*}j_I^*\mathcal{F}) = \mathrm{Ext}^i(j_I^*\mathcal{E}, j_I^*\mathcal{F}) = 0 \qquad \text{для всех} \qquad i > 0,$$

которое следует из того, что пучок $j_I^*\mathcal{E}$ соответствует некоторому проективному A_I-модулю. Таким образом нетривиальные Ext'ы из $\mathcal{E}$ в $\mathcal{F}$ ограничены длиной комплекса (1), т.е. числом n. □

Предложение 1.13. *Для a scheme X, удовлетворяющей (ELF), естественный функтор $\mathbf{D}_{Sg}(X) \longrightarrow \mathbf{D}'_{Sg}(X)$ является вполне строгим.*

Доказательство. Рассмотрим полное вложение $\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X)) \hookrightarrow \mathbf{D}^b(\mathrm{Qcoh}(X))$. Мы знаем, что $\mathfrak{Perf}(X) = \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X)) \cap \mathfrak{Lfr}(X)$. Для доказательства достаточно проверить выполнение условий предложения 1.3. Пусть $Q^\cdot \xrightarrow{t} \mathcal{F}^\cdot$ – некоторый морфизм в $\mathbf{D}^b(\mathrm{Qcoh}(X))$ такой, что $Q^\cdot \in \mathfrak{Lfr}(X)$ и $\mathcal{F}^\cdot \in \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X))$. Рассмотрим квази-изоморфизм $P^\cdot \xrightarrow{s} \mathcal{F}^\cdot$, где $P^\cdot$ – это ограниченный комплекс локально свободных пучков конечного типа. Он существует по лемме 1.4. Грубое обрезание $\sigma^{\geq -k}P^\cdot$ является совершенным комплексом. Пусть $r : \sigma^{\geq -k}P^\cdot \to \mathcal{F}^\cdot$ – отображение, индуцированное s. Конус отображения r изоморфен $G[k+1]$, где G – это некоторый когерентный пучок. Так как $Q^\cdot$ является ограниченным комплексом локально свободных пучков, то по лемме 1.12 получается, что

$$\mathrm{Hom}(Q^\cdot, G[k+1]) = 0$$

для достаточно большого k. Следовательно, отображение t может быть поднято до отображения $Q^\cdot \to \sigma^{\geq -k}P^\cdot$. □

Рассмотрим сейчас некоторый морфизм $f : X \to Y$ конечной Tor-размерности (например плоский морфизм). Он индуцирует функтор обратного образа $\mathbf{L}f^* : \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(Y)) \longrightarrow$

$\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X))$. Очевидно, что функтор $\mathbf{L}f^*$ переводит совершенный комплекс на Y в совершенный комплекс на X . Следовательно, получаем функтор $\mathbf{L}\bar{f}^* : \mathbf{D}_{Sg}(Y) \longrightarrow \mathbf{D}_{Sg}(X)$. По тем же самым причинам существует функтор $\mathbf{L}\bar{f}^* : \mathbf{D}'_{Sg}(Y) \longrightarrow \mathbf{D}'_{Sg}(X)$.

Пусть $f : X \to Y$ – морфизм конечной Tor-размерности, который к тому же является собственным локально конечного типа. При данных предположениях на морфизм существует функтор прямого образа $\mathbf{R}f_* : \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X)) \to \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(Y))$ и, более того, этот функтор переводит совершенные комплексы в совершенные (смю [3] III, или [25]). В этом случае получаем функтор $\mathbf{R}\bar{f}_* : \mathbf{D}_{Sg}(X) \to \mathbf{D}_{Sg}(Y)$, который является правям сопряженным к функтору $\mathbf{L}\bar{f}^*$.

Сейчас мы докажем свойство локальности для триангулированной категории особенностей.

Предложение 1.14. *Пусть схема X удовлетворяет (ELF), и пусть $j : U \hookrightarrow X$ – вложение открытой подсхемы такой, что $\mathrm{Sing}(X) \subset U$. Тогда функтор $\bar{j}^* : \mathbf{D}_{Sg}(X) \longrightarrow \mathbf{D}_{Sg}(U)$ является эквивалентностью триангулированных категорий.*

Доказательство. Так как X нетерова схема, то существует функтор обратного образа $\mathbf{R}j_* : \mathbf{D}^b(\mathrm{Qcoh}(U)) \longrightarrow \mathbf{D}^b(\mathrm{Qcoh}(X))$, который сопряжен справа к j^* . Композиция $j^*\mathbf{R}j_*$ изоморфна тождественному функтору. Возьмем какой-нибудь объект $B \in \mathfrak{Lfr}(U)$ и рассмотрим $\mathbf{R}j_*(B)$. Легко видеть, что объект $\mathbf{R}j_*(B)$ принадлежит $\mathfrak{Lfr}(X)$. Действительно, данное условие локально. Для U оно выполнено , а для $X \setminus \mathrm{Sing}(X)$ как для гладкой схемы это очевидно. Таким образом функтор $\mathbf{R}j_*$ индуцирует функтор

$$\mathbf{R}\bar{j}_* : \mathbf{D}'_{Sg}(U) \longrightarrow \mathbf{D}'_{Sg}(X).$$

Более того, функтор $\mathbf{R}\bar{j}_*$ сопряжен справа к $\bar{j}^*$.

Для любого объекта $A \in \mathbf{D}^b(\mathrm{Qcoh}(X))$ имеется каноническое отображение $\mu_A : A \longrightarrow \mathbf{R}j_*j^*A$. Конус этого отображения $C(\mu_A)$ является объектом с носителем, принадлежащим $X \setminus U$, и следовательно, не пересекающим $\mathrm{Sing}(X)$. По лемме 1.10 объект $C(\mu_A)$ принадлежит подкатегории $\mathfrak{Lfr}(X)$. Таким образом, μ_A становится изоморфизмом в $\mathbf{D}'_{Sg}(X)$. И, значит, функтор

$$\bar{j}^* : \mathbf{D}'_{Sg}(X) \longrightarrow \mathbf{D}'_{Sg}(U)$$

вполне строгий. С другой стороны, известно, что $j^*\mathbf{R}j_*(B) \cong B$ для любого $B \in \mathbf{D}^b(\mathrm{Qcoh}(U))$. Следовательно, $\bar{j}^*$ является эквивалентностью.

Функтор j^* сохраняет когерентность. Таким образом, используя предложение 1.13, получаем, что функтор

$$\bar{j}^* : \mathbf{D}_{Sg}(X) \longrightarrow \mathbf{D}_{Sg}(U)$$

вполне строгий. Осталось только заметить, что по лемме 1.11 всякий объект $B \in \mathbf{D}_{Sg}(U)$ изоморфен объекту вида $\mathcal{F}[k]$, где $\mathcal{F}$ – когерентный пучок на U , и всякий когерентный пучок на U может быть получен ограничением когерентного пучка с X ([12], упр. 5.15). Отсюда сразу следует, что $\bar{j}^* : \mathbf{D}_{Sg}(X) \longrightarrow \mathbf{D}_{Sg}(U)$ является эквивалентностью. □

1.3. **Триангулированные категории особенностей для горенштейновых схем.** Напомним определения горенштейнова локального кольца и горенштейновой схемы.

Определение 1.15. *Локальное кольцо A называется горенштейновым, если A как модуль над собой имеет конечную инъективную резольвенту.*

Можно показать, что если A горенштейново, то A является дуализирующим комплексом для себя (см. [13]). Это означает, что A имеет конечную инъективную размерность и естественное отображение

$$M \longrightarrow \mathbf{R}\operatorname{Hom}^{\cdot}(\mathbf{R}\operatorname{Hom}^{\cdot}(M,A),A)$$

есть изоморфизм для всякого когерентного A-модуля M и, как следствие, для всякого объекта из $\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(\mathrm{Spec}(A)))$.

Определение 1.16. *Схема X называется горенштейновой, если все ее локальные кольца являются горенштейновыми локальными кольцам.*

Замечание 1.17. Если схема X горенштейнова и имеет конечную размерность Крулля, тогда пучок $\mathcal{O}_X$ является дуализирующим комплексом для X, то есть он имеет конечную инъективную размерность как квазикогерентный пучок, и естественное отображение

$$\mathcal{F} \longrightarrow \mathbf{R}\underline{\mathcal{H}om}^{\cdot}(\mathbf{R}\underline{\mathcal{H}om}^{\cdot}(\mathcal{F},\mathcal{O}_X),\mathcal{O}_X)$$

является изоморфизмом для всякого когерентного пучка $\mathcal{F}$. В частности, отсюда следует, что существует целое n_0 такое, что $\underline{\mathcal{E}xt}^i(\mathcal{F},\mathcal{O}_X)=0$ для каждого квазикогерентного пучка $\mathcal{F}$ и для всех $i>n_0$.

Лемма 1.18. *Пусть схема X удовлетворяет (ELF) и является горенштейновой. Тогда для всякого когерентного пучка $\mathcal{F}$ и объекта $P^{\cdot}\in\mathfrak{Perf}(X)$ существует целое m, зависящее только от $P^{\cdot}$, и такое, что*

$$\operatorname{Hom}^i(\mathcal{F},P^{\cdot})=0$$

для всех $i>m$.

Доказательство. Для всякого когерентного пучка $\mathcal{F}$ и для всякого локально свободного пучка $\mathcal{P}$ мы уже знаем, что

$$\underline{\mathcal{E}xt}^i(\mathcal{F},\mathcal{P})=\underline{\mathcal{E}xt}^i(\mathcal{F},\mathcal{O}_X)\otimes\mathcal{P}=0$$

для любого $i>n_0$. Используя спектральную последовательность от локальных к глобальным Ext'ам, получаем, что

$$\operatorname{Ext}^i(\mathcal{F},\mathcal{P})=0$$

для всех $i>n_0+n$, где n – размерность X. Так как $P^{\cdot}$ – ограниченный комплекс, то существует m, зависящее только от $P^{\cdot}$, такое, что

$$\operatorname{Hom}^i(\mathcal{F},P^{\cdot})=0$$

для всех $i>m$. □

Лемма 1.19. *Пусть схема X удовлетворяет (ELF) и является горенштейновой. Тогда следующие условия на когерентный пучок $\mathcal{F}$ эквивалентны.*

1) *Пучки $\underline{\mathcal{E}xt}^i(\mathcal{F},\mathcal{O}_X)$ тривиальны для всех $i>0$.*
2) *Существует правая локально свободная резольвента*

$$0\longrightarrow\mathcal{F}\longrightarrow\{Q^0\longrightarrow Q^1\longrightarrow Q^3\cdots\}.$$

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Обозначим через $\mathcal{F}^\vee$ пучок $\underline{\mathcal{H}om}(\mathcal{F},\mathcal{O}_X)$. Рассмотрим локально свободную резольвенту пучка $\mathcal{F}^\vee$. Так как $\mathcal{O}_X$ является дуализирующим комплексом, то, применяя к ней функтор $\underline{\mathcal{H}om}(\cdot,\mathcal{O}_X)$, мы получаем правую локально свободную резольвенту $\mathcal{F}$.

2) $\Rightarrow$ 1). Рассмотрим грубое обрезание $\sigma^{\le k}Q^\cdot$ для достаточно большого k . Обозначим через $\mathcal{G}$ нетривиальную когомологию $H^k(\sigma^{\le k}Q^\cdot)$. Для всякого $i>0$ имеются изоморфизмы

$$\underline{\mathcal{E}xt}^i(\mathcal{F},\mathcal{O}_X)\cong\underline{\mathcal{E}xt}^{i+k+1}(\mathcal{G},\mathcal{O}_X)=0.$$

Последнее равенство следует из замечания 1.17. □

Лемма 1.20. *Пусть схема X удовлетворяет (ELF) и является горенштейновой. Пусть $\mathcal{F}$ – когерентный пучок, который является совершенным комплексом. Предположим, что $\underline{\mathcal{E}xt}^i(\mathcal{F},\mathcal{O}_X)=0$ для всех $i>0$. Тогда $\mathcal{F}$ локально свободен.*

Доказательство. Так как $\mathcal{F}$ совершенный, то $\mathcal{F}^\vee=\underline{\mathcal{H}om}(\mathcal{F},\mathcal{O}_X)$ также является совершенным. Следовательно, $\mathcal{F}^\vee$ имеет ограниченную локально свободную резольвенту $\mathcal{P}^\cdot\longrightarrow\mathcal{F}^\vee$. Используя то, что $\mathcal{O}_X$ является дуализирующим комплексом, мы получаем ограниченную правую резольвенту $\mathcal{F}\longrightarrow\mathcal{P}^\cdot$. Следовательно, $\mathcal{F}$ локально свободен. □

Предложение 1.21. *Пусть схема X удовлетворяет (ELF) и является горенштейновой. Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ – когерентные пучки, для которых $\underline{\mathcal{E}xt}^i(\mathcal{F},\mathcal{O}_X)=0$ для всех $i>0$. Зафиксируем N такое, что $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{P},\mathcal{G})=0$ для $i>N$ и для всякого локально свободного пучка $\mathcal{P}$. Тогда*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}_{Sg}(X)}(\mathcal{F},\mathcal{G}[N])\cong\mathrm{Ext}^N(\mathcal{F},\mathcal{G})/\mathcal{R},$$

где $\mathcal{R}$ – подпространство элементов, которые пропускаются через локально свободный пучок, то есть $e\in\mathcal{R}$ тогда и только тогда, когда $e=\beta\alpha$ с $\alpha:\mathcal{F}\to\mathcal{P}$ и $\beta\in\mathrm{Ext}^N(\mathcal{P},\mathcal{G})$, где $\mathcal{P}$ – локально свободный пучок.

Доказательство. По определению локализации всякий морфизм из $\mathcal{F}$ в $\mathcal{G}[N]$ в категории $\mathbf{D}_{Sg}(X)$ представляется парой морфизмов в $\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X))$ вида

$$\mathcal{F}\xleftarrow{s}A\xrightarrow{a}\mathcal{G}[N] \tag{2}$$

с условием, что конус $C(s)$ есть совершенный комплекс. По лемме 1.19 существует правая локально свободная резольвента $\mathcal{F}\longrightarrow Q^\cdot$. Рассмотрим грубое обрезание $\sigma^{\le k}Q^\cdot$ для достаточно большого k такого, что $\mathrm{Hom}(\mathcal{E}[-k-1],C(s))=0,$ где $\mathcal{E}=H^k(\sigma^{\le k}Q^\cdot)$. Такое k существует по лемме 1.18. Используя треугольник

$$\mathcal{E}[-k-1]\longrightarrow\mathcal{F}\longrightarrow\sigma^{\le k}Q^\cdot\longrightarrow\mathcal{E}[-k],$$

мы видим, что отображение $\mathcal{F}\to C(s)$ может быть поднято до отображения $\sigma^{\le k}Q^\cdot\to C(s)$. Следовательно, существует морфизм $\mathcal{E}[-k-1]\to A$, и этот морфизм индуцирует пару вида

$$\mathcal{F}\xleftarrow{s'}\mathcal{E}[-k-1]\xrightarrow{e}\mathcal{G}[N], \tag{3}$$

которая эквивалентна в категории $\mathbf{D}_{Sg}(X)$ паре (2). Так как $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{P},\mathcal{G})=0$ при $i>N$ и для всякого локально свободного пучка $\mathcal{P}$, получаем равенство

$$\mathrm{Hom}(\sigma^{\le k}Q^\cdot[-1],\mathcal{G}[N])=0.$$

Следовательно, найдется морфизм f, который дополняет следующую диаграмму до коммутативной

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{E}[-k-1] \arrow[dl, "s'"'] \arrow[dr, "e"] & \\ \mathcal{F} \arrow[rr, "f"] & & \mathcal{G}[N] \end{tikzcd}.$$

Это значит, что морфизм f эквивалентен морфизму, задаваемому парой (3) и, как следствие, парой (2). Таким образом, всякий морфизм между $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}[N]$ в $\mathbf{D}_{Sg}(X)$ представляется некоторым морфизмом между $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}[N]$ в категории $\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X))$. Если теперь f является 0-морфизмом, то повторяя процедуру, приведенную выше, мы находим, что f пропускается через $\sigma^{\le k}Q^{\cdot} \to \mathcal{G}[N]$. По условию на G всякий такой морфизм может быть поднят до морфизма $Q^0 \to \mathcal{G}[N]$. Следовательно, если f является 0-морфизмом в $\mathbf{D}_{Sg}(X)$, тогда он пропускается через Q^0. □

Замечание 1.22. Если X является аффинной, тогда N можно положить равным 0.

Предложение 1.23. *Пусть схема X удовлетворяет (ELF) и является горенштейновой. Тогда всякий объект $A \in \mathbf{D}_{Sg}(X)$ изоморфен образу когерентного пучка $\mathcal{F}$ такого, что $\underline{\mathcal{E}xt}^i(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X) = 0$ для всех $i > 0$.*

Доказательство. Объект A представляется некоторым объектом когерентных пучков. Возьмем локально свободную ограниченную справа резольвенту $P^{\cdot} \xrightarrow{\sim} A$, которая существует по лемме 1.4. Рассмотрим грубое обрезание $\sigma^{\ge -k}P^{\cdot}$ для достаточно большого $k \gg 0$. Обозначим через $\mathcal{G}$ когомологию $H^{-k}(\sigma^{\ge -k}P^{\cdot})$. Так как A ограничен и X горенштейнова , то комплекс $\mathbf{R}\underline{\mathcal{H}om}^{\cdot}(A, \mathcal{O}_X)$ ограничен. Отсюда следует, что если $k \gg 0$, то $\underline{\mathcal{E}xt}^i(\mathcal{G}, \mathcal{O}_X) = 0$ для всех $i > 0$. Более того, получаем, что $A \cong \mathcal{G}[k+1]$ в $\mathbf{D}_{Sg}(X)$.

По лемме 1.19 существует правая локально свободная резольвента $\mathcal{G} \to Q^0 \to Q^1 \to \cdots$. Рассмотрим $\mathrm{Im}\, d_{k-1} = \mathrm{Ker}\, d_k \subset Q^k$ и обозначим его через $\mathcal{F}$. Применяя снова лемму 1.19, получаем, что $\underline{\mathcal{E}xt}^i(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X) = 0$ для всех $i \ge 0$. А кроме того, имеется изоморфизм $A \cong \mathcal{G}[k+1] \cong \mathcal{F}$ в $\mathbf{D}_{Sg}(X)$. □

Corollary 1.24. *Пусть схема X удовлетворяет (ELF), горенштейнова и такая, что замкнутое подмножество $\mathrm{Sing}(X)$ является полным. Тогда $\dim_k \mathrm{Hom}(A, B) < \infty$ для любых двух объектов $A, B \in \mathbf{D}_{Sg}(X)$.*

Доказательство. Пусть $\overline{X}$ – некоторая компактификация X. Так как $\mathrm{Sing}(X)$ является полным, то персечение $\mathrm{Sing}(X)$ с дополнением $\overline{X}\backslash X$ является пустым. Разрешая, если это необходимо, особенности $\overline{X}$ на дополнениии $\overline{X}\backslash X$, можно предположить, что $\mathrm{Sing}(\overline{X})$ совпадает с $\mathrm{Sing}(X)$. По предложению 1.14 существует эквивалентность $\mathbf{D}_{Sg}(X) \simeq \mathbf{D}_{Sg}(\overline{X})$. Хорошо известно, что для любых двух объектов $\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(\overline{X}))$ пространство морфизмов является конечномерным. Сейчас утверждение немедленно следует из предложений 1.21 и 1.23. □

2. Периодичность Кноррера

Пусть X – отделимая регулярная схема конечной размерности Крулля. Любая такая схема имеет достаточно много локально свободных пучков (см. [3], II). Пусть $f : X \to \mathbb{A}^1$ – плоский морфизм. Рассмотрим схему $Y = X \times \mathbb{A}^2$ и ее морфизм в $\mathbb{A}^1$ вида $g = f + xy$, где x, y – координаты на $\mathbb{A}^2$. Обозначим через $X_0 = X/f$ и $Y_0 = Y/g$ слои на точкой 0 отображений f и g соответственно. Рассмотрим схемы $Z = Y_0/x$. Существуют естественные отображения $i : Z \to Y_0$ и $q : Z \to X_0$, где первый – это замкнутое вложение, а второй – это $\mathbb{A}^1$-расслоение. Все схемы, определенные выше, являются отделимыми нетеровыми схемами конечной размерности Крулля и имеют достаточно много локально свободных пучков.

Рассмотрим композицию $\mathbf{R}i_* q^* : \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X_0)) \to \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(Y_0))$ и обозначим ее через Φ_Z. Цель данного параграфа доказать следующую теорему.

Теорема 2.1. *Функтор* $\Phi_Z : \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X_0)) \to \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(Y_0))$, *заданный как композиция*

$$\Phi_Z(\cdot) = \mathbf{R}i_* q^*(\cdot)$$

индуцирует функтор $\overline{\Phi}_Z : \mathbf{D}_{Sg}(X_0) \longrightarrow \mathbf{D}_{Sg}(Y_0)$, *который является эквивалентностью.*

Замечание 2.2. *The assertion of this theorem is known in local theory of singularities as Knörrer periodicity. It was proved for maximal Cohen-Macalay modules over regular analitic k-algebra* P *with non-zero element* f *in the maximal ideal by Knörrer (*[20]*, Th.3.1). He used a matrix factorization introduced by Eisenbud in* [8]*, which is discussed in the next section.*

Для начала, введем в рассмотрение частичные компактификации Y and Y_0. Обозначим через $\overline{Y}$ схему $X \times \mathbb{P}^2$ и пусть $\overline{Y}_0 \subset \overline{Y}$ обозначает замкнутую подсхему, которая определяется уравнением $fz^2 + xy = 0$, где x, y, z – проективные координаты на $\mathbb{P}^2$. Существует плоское отображение $\pi : \overline{Y}_0 \to X$, которое является расслоением на коники над X. Схема $\overline{Y}_0$ является частичной компактификацией Y_0 такой, что $\mathrm{Sing}(\overline{Y}_0) = \mathrm{Sing}(Y_0)$. Следовательно, из предложения 1.14 получается эквивалентность $\mathbf{D}_{Sg}(\overline{Y}_0) \cong \mathbf{D}_{Sg}(Y_0)$ триангулированных категорий особенностей.

рассмотрим расслоенный квадрат

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{Z} & \xrightarrow{\bar{i}} & \overline{Y}_0 \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ X_0 & \xrightarrow{j} & X. \end{array}$$

Здесь $\widetilde{Z} = X_0 \times_X \overline{Y}_0$ –расслоенное произведение. Схема $\widetilde{Z}$ является объединением двух компонент $\overline{Z}_1 \cup \overline{Z}_2$. Каждая компонента $\overline{Z}_i$ изоморфна $\mathbb{P}^1 \times X_0$, а их пересечение изоморфно X_0. Компонента $\overline{Z}_1$ является частичной компактификацией $Z = \mathbb{A}^1 \times X_0$. Обозначим через i_1, i_2 замкнутые вложения $\overline{Z}_1, \overline{Z}_2$ в $\overline{Y}_0$, а через $W \subset \overline{Y}_0$ – пересечение $\overline{Z}_1 \cap \overline{Z}_2$, которое изоморфно X_0. Более того, $\mathrm{Sing}(\overline{Y}_0)$ содержится в W и совпадает с $\mathrm{Sing}(X_0)$ относительно изоморфизма $W \cong X_0$.

Лемма 2.3. *Замкнутое вложение* $i_1 : \overline{Z}_1 \hookrightarrow \overline{Y}_0$ *является регулярным, а* $\overline{Z}_1$ *– дивизором Картье в* $\overline{Y}_0$. *Ограничение линейного расслоения* $\mathcal{O}_{\overline{Y}_0}(\overline{Z}_1)$ *на* $\overline{Z}_1$ *изоморфно* $\mathcal{O}_{\overline{Z}_1}(-1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \boxtimes \mathcal{O}_{X_0}$.

Доказательство. Рассмотрим дивизор Картье на $\overline{Y}_0$, задаваемый уравнением $x = 0$. Он является объединением $\overline{Z}_1$ и D, где D – это компонента $\overline{Y}_0 \setminus Y_0$. Следовательно, D не пересекается с особенностями $\overline{Y}_0$. Из чего следует, что D есть дивизор Картье. Значит, $\overline{Z}_1$ также является дивизором Картье, а i_1 – регулярным вложением.

Рассмотрим дивизор $\widetilde{Z} = \overline{Z}_1 \cup \overline{Z}_2$. Он является прообразом $\pi^{-1}(X_0)$, а его ограничение на $\overline{Z}_1$ тривиально. Ограничение же $\mathcal{O}(\overline{Z}_2)$ на $\overline{Z}_1$ есть $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \boxtimes \mathcal{O}_{X_0}$, так как пересечение $\overline{Z}_2 \cap \overline{Z}_1 = W$ изоморфно X_0 . Следовательно, ограничение $\mathcal{O}(\overline{Z}_1)$ на $\overline{Z}_1$ есть $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \boxtimes \mathcal{O}_{X_0}$. □

Обозначим через p_1 проекцию $\overline{Z}_1$ на X_0 и рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \overline{Z}_1 & \xrightarrow{i_1} & \overline{Y}_0 \\ {\scriptstyle p_1}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \pi} \\ X_0 & \xrightarrow{j} & X. \end{array}$$

Предложение 2.4. *Функтор* $\Phi_{\overline{Z}_1} = \mathbf{R}i_{1*}p_1^* : \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X_0)) \to \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(\overline{Y}_0))$ *является вполне строгим.*

Доказательство. Функтор $\Phi_{\overline{Z}_1} = \mathbf{R}i_{1*}p_1^*$ имеет правый сопряженный $\Phi_{\overline{Z}_{1*}} = \mathbf{R}p_{1*}i_1^\flat$, где $i_1^\flat(\cdot) \cong \mathbf{L}i_1^*(\cdot \otimes \mathcal{O}(Z_1))[-1]$ (см., к примеру, [13] След.7.3).

В начале отметим, что функтор $p_1^* : \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X_0)) \longrightarrow \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(\overline{Z_1}))$ является вполне строгим, так как по формуле проекции имеется изоморфизм

$$\mathbf{R}p_{1*}p_1^*(A) \cong A \otimes \mathbf{R}p_{1*}\mathcal{O}_{\overline{Z}_1} \cong A \otimes \mathcal{O}_{X_0} \cong A$$

для каждого $A \in \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X_0))$.

Рассмотрим каноническое преобразование функторов $\mathrm{id} \to \Phi_{\overline{Z}_{1*}}\Phi_{\overline{Z}_1}$. Требуется показать, что данное преобразование является изоморфизмом функторов. Возьмем объект $A \in \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X_0))$ и рассмотрим выделенный треугольник

$$A \longrightarrow \Phi_{\overline{Z}_{1*}}\Phi_{\overline{Z}_1}(A) \longrightarrow C \tag{4}$$

Для того, чтобы показать, что $C = 0$, достаточно проверить, что $\mathbf{R}j_*C = 0$.

Так как функтор p_1^* вполне строгий, треугольник (4) есть образ треугольника

$$p_1^*A \longrightarrow i_1^\flat \mathbf{R}i_{1*}p_1^*A \longrightarrow B \tag{5}$$

относительно функтора $\mathbf{R}p_1^*$ (первый морфизм в треугольнике – каноническое отображение, индуцированное естественным преобразованием $\mathrm{id} \to i_1^\flat \mathbf{R}i_{1*}$). Применяя функтор $\mathbf{R}i_{1*}$ к выделенному треугольнику (5), получаем треугольник

$$\mathbf{R}i_{1*}p_1^*A \longrightarrow \mathbf{R}i_{1*}i_1^\flat \mathbf{R}i_{1*}p_1^*A \longrightarrow \mathbf{R}i_{1*}B.$$

Он расщепляется каноническим морфизмом $\mathbf{R}i_{1*}i_1^\flat \mathbf{R}i_{1*}p_1^*A \to \mathbf{R}i_{1*}p_1^*A$, который получается как тензорное произведение объекта $\mathbf{R}i_{1*}p_1^*A$ и морфизма α из треугольника

$$i_{1*}\mathcal{O}_{\overline{Z}_1}(\overline{Z}_1)[-1] \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_{\overline{Y}_0} \longrightarrow \mathcal{O}_{\overline{Y}_0}(Z_1) \longrightarrow i_{1*}\mathcal{O}_{\overline{Z}_1}(\overline{Z}_1).$$

Следовательно, объект $\mathbf{R}i_*B$ изоморен $\mathbf{R}i_*p_1^*A(\overline{Z_1}) = \mathbf{R}i_*(p_1^*A \otimes \mathcal{O}_{\overline{Z}_1}(-1))$. Имеется последовательность изоморфизмов

$$\begin{aligned} \mathbf{R}j_*C \cong \mathbf{R}j_*\mathbf{R}p_{1*}B \cong \mathbf{R}\pi_*\mathbf{R}i_{1*}B \cong \mathbf{R}\pi_*\mathbf{R}i_{1*}(p_1^*A \otimes \mathcal{O}_{\overline{Z}_1}(-1)) \\ \cong \mathbf{R}j_*\mathbf{R}p_{1*}(p_1^*A \otimes \mathcal{O}_{\overline{Z}_1}(-1)) \cong \mathbf{R}j_*(A \otimes \mathbf{R}p_{1*}\mathcal{O}_{\overline{Z}_1}(-1)) \cong 0. \end{aligned}$$

Таким образом, получается, что функтор $\Phi_{\overline{Z}_1} = \mathbf{R}i_{1*}p_1^*$ является вполне строгим. $\square$

Corollary 2.5. *Функтор* $\Phi_{\overline{Z}_1} : \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X_0)) \to \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(\overline{Y}_0))$ *индуцирует функтор* $\overline{\Phi}_Z : \mathbf{D}_{Sg}(X_0) \longrightarrow \mathbf{D}_{Sg}(\overline{Y}_0)$ *, который является вполне строгим.*

Доказательство. Функторы p_1^* и $i_1^\flat = \mathbf{L}i_1^*(\cdot \otimes \mathcal{O}(\overline{Z}_1))[-1]$, как функторы обратного образа, переводят совершенные комплексы в совершенные. Функторы $\mathbf{R}i_{1*}$ и $\mathbf{R}p_{1*}$ также сохраняют совершенные комплексы, так как оба морфизма i_1 и p_1 имеют конечную Tor-размерность, собственны и конечного типа.

Таким образом, мы получили функтор $\overline{\Phi}_{\overline{Z}_1} : \mathbf{D}_{Sg}(X_0) \to \mathbf{D}_{Sg}(Y_0)$ и этот функтор имеет сопряженный справа $\overline{\Phi}_{\overline{Z}_1 *}$. Так как композиция $\Phi_{\overline{Z}_1 *}\Phi_{\overline{Z}_1}$ изоморфна тождественному функтору, то композиция $\overline{\Phi}_{\overline{Z}_1 *}\overline{\Phi}_{\overline{Z}_1}$ также изоморфна тождественному функтору. $\square$

Таким образом, мы получили функтор $\overline{\Phi}_{\overline{Z}_1} : \mathbf{D}_{Sg}(X_0) \longrightarrow \mathbf{D}_{Sg}(\overline{Y}_0)$ и показали, что он вполне строгий. Для завершения доказательства теоремы нужно проверить, что данный функтор является эквивалентностью. Мы покажем, что любой объект $\mathcal{E} \in \mathbf{D}_{Sg}(\overline{Y}_0)$, удовлетворяющий условию $\overline{\Phi}_{\overline{Z}_1 *}\mathcal{E} = 0$, является нулевым. Свойство быть эквивалентностью легко следует из данного факта.

Лемма 2.6. *Каждый объект* $A \in \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(\overline{Z}_1))$ *, такой что* $\mathbf{R}p_{1*}A = 0$ *, изоморфен объекту вида* $p_1^*B \otimes \mathcal{O}_{\overline{Z}_1}(-1)$ *для некоторого* $B \in \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X_0))$ *.*

Доказательство. Обозначим через B объект $\mathbf{R}p_{1*}(A(1))$. Имеется естественное отображение $p_1^*B \otimes \mathcal{O}_{\overline{Z}_1}(-1) \to A$. Обозначим через C его конус. Для объект C выполнены равенства

$$\mathbf{R}p_{1*}C = 0 \qquad \text{и} \qquad \mathbf{R}p_{1*}(C(1)) = 0,$$

последнее является следствием того факта, что p_1^* вполне строгий. Всякий пучок $\mathcal{O}_{\overline{Z}_1}(n)$ имеет резольвенту вида

$$\mathcal{O}_{\overline{Z}_1}(-1)^{\oplus n} \longrightarrow \mathcal{O}_{\overline{Z}_1}^{\oplus(n+1)} \longrightarrow \mathcal{O}_{\overline{Z}_1}(n).$$

Рассматривая тензорное произведение этой последовательности с C и применяя функтор $\mathbf{R}p_{1*}$, мы получаем, что $\mathbf{R}p_{1*}(C(n)) = 0$ для всех n . Следовательно, объект C нулевой, так как пучок $\mathcal{O}_{\overline{Z}}(1)$ относительно обилен. $\square$

В действительности, данная лемма показывает, что категория $\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(\overline{Z}_1))$ имеет полуортогональное разложение вида

$$\left\langle p_1^*\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X_0)) \otimes O_{\overline{Z}_1}(-1), \quad p_1^*\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}(X_0)) \right\rangle$$

(для определения см. [4]). Это может быть доказано для любого $\mathbb{P}^1$ -расслоения и, более того, для любой проективизации векторного расслоения. Доказательство для гладкой базы можно найти в [22], оно работает и для произвольной базы.

Следующая лемма почти очевидна.

Лемма 2.7. *Пусть* $i : Z \hookrightarrow Y$ *– замкнутое вложение дивизора Картье. Пусть* $\mathcal{E}$ *– пучок на* Y *, такой что его ограничение на дополнение* $U = Y \setminus Z$ *является локально свободным, и* $\mathbf{L}i^*\mathcal{E}$ *изоморфно локально свободному пучку на* Z *. Тогда* $\mathcal{E}$ *локально свободен на* Y *.*

Доказательство. Для того, чтобы доказать, что $\mathcal{E}$ локально свободен, достаточно проверить, что для каждой точки $t : y \hookrightarrow Y$ выполняются равенства

$$\mathrm{Ext}^i(\mathcal{E}, t_*\mathcal{O}_y) = 0$$

для всех $i > 0$. Пучок $\mathcal{E}$ локально свободен на U . Следовательно, нужно только рассмотреть случай $y \in Z$. В этом случае $t = i \cdot t'$, где $t' : y \hookrightarrow Z$ –замкнутое вложение. Имеем

$$\mathrm{Ext}^i_Y(\mathcal{E}, t_*\mathcal{O}_y) = \mathrm{Hom}^i_Z(\mathbf{L}i^*\mathcal{E}, t'_*\mathcal{O}_y) = 0$$

для $i > 0$, так как $\mathbf{L}i^*\mathcal{E}$ изоморфен локально свободному пучку на Z . □

Используя две данные леммы, теперь можем доказать следующее предложение.

Предложение 2.8. *Предположим, что для объекта* $\mathcal{E} \in \mathbf{D}_{Sg}(\overline{Y}_0)$ *выполнено равенство* $\overline{\Phi}_{\overline{Z}_1*}\mathcal{E} = 0$. *Тогда* $\mathcal{E} = 0$ *в* $\mathbf{D}_{Sg}(\overline{Y}_0)$.

Доказательство. Для начала отметим, что все схемы $X_0, \overline{Z}_1, \overline{Y}_0$ горенштейновы. Учитывая предложение 1.23, можно считать, что $\mathcal{E}$ – пучок и $\underline{\mathcal{E}xt}^i(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X) = 0$ для всех $i \neq 0$. Отметим, что каждый такой $\mathcal{E}$ локально свободен на дополнении $X \setminus \mathrm{Sing}(X)$. Кроме того, для такого $\mathcal{E}$ имеем $\mathbf{L}i_1^*\mathcal{E} \cong i_1^*\mathcal{E}$ является пучком.

Обозначим через $\mathcal{L}$ относительно обильное расслоение на $\overline{Y}_0$, получающееся ограничением линейного расслоения $\mathcal{O}_{\overline{Y}}(1)$ на $\overline{Y} = \mathbb{P}^2 \times X$. Можно видеть, что объект $\mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}$ изоморфен $\mathcal{E}$ в категории $\mathbf{D}_{Sg}(\overline{Y}_0)$, так как существует включение $\mathcal{E} \to \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}$ такое, что носитель коядра не пересекается с $\mathrm{Sing}(\overline{Y}_0)$ и, следовательно, является совершенным по лемме 1.10.

Возьмем пучок $i_1^*\mathcal{E}$ и обозначим через $\mathcal{F}$ пучок $p_{1*}i_1^*\mathcal{E}$ на X_0 . Тензорно умножая $\mathcal{E}$ на $\mathcal{L}^n$, если это необходимо, мы можем предполагать, что

$$\mathbf{R}^i p_{1*} i_1^*\mathcal{E} = 0 \quad \text{для всех} \quad i > 0 \quad \text{и} \quad p_1^*\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} i_1^*\mathcal{E} \quad \text{сюръективен.}$$

По лемме 2.6 ядро α есть пучок вида $p_1^*\mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_{\overline{Z}_1}(-1),$ где $\mathcal{G}$ – пучок на X_0 . По предположению, пучок $\mathcal{F}$ совершенен как комплекс на X_0 . Более того, пучок $\mathcal{G} \cong p_{1*}i_1^*(\mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^{-1})$ также совершенен на X_0 . Следовательно, пучок $i_1^*\mathcal{E}$ на $\overline{Z}_1$ является совершенным комплексом на $\overline{Z}_1$. С другой стороны, мы знаем, что $\mathcal{E}$ имеет правую локально свободную резольвенту. Следовательно пучок $i_1^*\mathcal{E}$ как ограничение относительно регулярного вложения дивизора также имеет правую локально свободную резольвенту. Из леммы 1.19 следует, что

$$\underline{\mathcal{E}xt}^i(i_1^*\mathcal{E}, \mathcal{O}_{\overline{Z}_1}) = 0 \quad \text{для всех} \quad i > 0.$$

Лемма 1.20 влечет, что $i_1^*\mathcal{E}$ локально свободен на $\overline{Z}_1$. Теперь, применяя лемму 2.7, получаем, что $\mathcal{E}$ локально свободен на всем $\overline{Y}_0$. Значит, он изоморфен нулевому объекту в $\mathbf{D}_{Sg}(\overline{Y}_0)$. □

Доказательство теоремы 2.1 Мы уже знаем, что $\overline{\Phi}_{\overline{Z}_1}$ является вполне строгим. Возьмем объект $A \in \mathbf{D}_{Sg}(\overline{Y}_0)$ и рассмотрим естественное отображение $\overline{\Phi}_{\overline{Z}_1}\overline{\Phi}_{\overline{Z}_1*}A \to A$. Обозначим через C его конус. Применим функтор $\overline{\Phi}_{\overline{Z}_1*}$ к получившемуся выделенному треугольнику. Так как $\overline{\Phi}_{\overline{Z}_1}$ вполне строгий, то $\overline{\Phi}_{\overline{Z}_1*}C = 0$. По предложению 2.8 объект C является нулевым. Следовательно, функтор $\overline{\Phi}_{\overline{Z}_1*}$ также вполне строгий и, значит, есть эквивалентность. Осталось только заметить, что функтор $\overline{\Phi}_Z : \mathbf{D}_{Sg}(X_0) \to \mathbf{D}_{Sg}(Y_0)$ есть композиция функторов $\overline{\Phi}_{\overline{Z}_1} : \mathbf{D}_{Sg}(X_0) \to \mathbf{D}_{Sg}(\overline{Y}_0)$ и $\overline{J}^* : \mathbf{D}_{Sg}(\overline{Y}_0) \to \mathbf{D}_{Sg}(Y_0)$, где $J : Y_0 \hookrightarrow \overline{Y}_0$ открытое вложение. Оба этих функтора – эквивалентности. Значит, $\overline{\Phi}_Z$ также является эквивалентностью. □

3. Триангулированныя категория D-бран типа B в модели Ландау-Гинзбурга

3.1. Kontsevich's proposal and categories of pairs. Математическое определение категорий D-бран типа B было предложено М.Концевичем (см. также [16]).

Под моделью Ландау-Гинзбурга мы будем понимать следующий набор данных: гладкое многообразие (или регулярную схему) X и регулярную функцию W на X такую, что морфизм $W: X \longrightarrow \mathbb{A}^1$ является плоским (для определения D-бран типа B нам не нужна симплектическая форма на X, которая должна быть в модели Ландау-Гинзбурга также).

С каждой точкой $w_0 \in \mathbb{A}^1$ мы можем связать дифференциальную $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуированную категорию $DG_{w_0}(W)$, точную категорию $\mathrm{Pair}_{w_0}(W)$, and a triangulated category $DB_{w_0}(W)$. Мы дадим конструкции этих категорий в предположении что схема $X = \mathrm{Spec}(A)$ аффинна (см. [16]). Определение в общей ситуации не такое простое.

Так как категория когерентных пучков на аффинной схеме $X = \mathrm{Spec}(A)$ не что иной как категория конечно порожденных A-модулей, мы будем свободно переходить от пучков к модулям и обратно.

Объектами всех трех категорий являются упорядоченные пары

$$\overline{P} := \Big(P_1 \underset{p_0}{\overset{p_1}{\rightleftarrows}} P_0 \Big),$$

в которых P_0, P_1 – конечно порожденные проективные A-модули, а композиции $p_0 p_1$ и $p_1 p_0$ являются умножением на элемент $(W - w_0) \in A$.

Морфизмы из $\overline{P}$ в $\overline{Q}$ в категории $DG_{w_0}(W)$ – это $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуированный комплекс

$$\mathbb{H}\mathrm{om}(\overline{P},\ \overline{Q}) = \bigoplus_{i,j} \mathrm{Hom}(P_i, Q_j)$$

с естественной градуировкой $(i-j) \mod 2,$ и с дифференциалом D, действующим на однородных элементах степени k по правилу

$$Df = q \circ f - (-1)^k f \circ p.$$

Пространство морфизмов $\mathrm{Hom}(\overline{P},\ \overline{Q})$ в категории $\mathrm{Pair}_{w_0}(W)$ – это пространство однородных степени 0 морфизмов в $DG_{w_0}(W)$, который коммутируют с дифференциалом. Пространство морфизмов в категории $DB_{w_0}(W)$ – пространство морфизмов в $\mathrm{Pair}_{w_0}(W)$ по модулю нуль-гомотопных, то есть

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Pair}_{w_0}(W)}(\overline{P},\ \overline{Q}) = \mathrm{Z}^0(\mathbb{H}\mathrm{om}(\overline{P},\ \overline{Q})), \qquad \mathrm{Hom}_{DB_{w_0}(W)}(\overline{P},\ \overline{Q}) = \mathrm{H}^0(\mathbb{H}\mathrm{om}(\overline{P},\ \overline{Q})).$$

Таким образом, морфизм $f: \overline{P} \to \overline{Q}$ в категории $\mathrm{Pair}_{w_0}(W)$ – это пара морфизмов $f_1 : P_1 \to Q_1$ и $f_0 : P_0 \to Q_0$ таких, что $f_1 p_0 = q_0 f_0$ и $q_1 f_1 = f_0 p_1$. Морфизм f нуль-гомотопен, если найдется пара морфизмов $s : P_0 \to Q_1$ и $t : P_1 \to Q_0$, для которых $f_1 = q_0 t + s p_1$ и $f_0 = t p_0 + q_1 s$.

Очевидно, что категория $\mathrm{Pair}_{w_0}(W)$ является точной категорией относительно покомпонентных мономорфизмов и эпиморфизмов (см. определение в [23]).

Замечание 3.1. Замечательным фактом является то, что данная конструкция появилась много лет назад в статье [8] и известна для специалистов в теории особенностей как матричная факторизация.

Категория $DB_{w_0}(W)$ может быть оснащена естественной структурой триангулированной категории. Для ее определения мы должны задать функтор сдвига $[1]$ и класс выделенных треугольников.

Функтор сдвига определяется как функтор, которые переводит объект $\overline{P}$ в объект

$$\overline{P}[1] = \left(P_0 \underset{-p_1}{\overset{-p_0}{\rightleftarrows}} P_1 \right),$$

(то есть меняет порядок модулей и знак у морфизмов), и преводит морфизм $f = (f_0, f_1)$ в морфизм $f[1] = (f_1, f_0)$. Видно, что функтор $[2]$ является тождественным функтором.

Для всякого морфизма $f : \overline{P} \to \overline{Q}$ в категории $\mathrm{Pair}_{w_0}(W)$ определим конус $C(f)$ как объект вида

$$C(f) = \left(Q_1 \oplus P_0 \underset{c_0}{\overset{c_1}{\rightleftarrows}} Q_0 \oplus P_1 \right),$$

где

$$c_0 = \begin{pmatrix} q_0 & f_1 \\ 0 & -p_1 \end{pmatrix}, \qquad c_1 = \begin{pmatrix} q_1 & f_0 \\ 0 & -p_0 \end{pmatrix}.$$

Существую отображения $g : \overline{Q} \to C(f),\ g = (\mathrm{id}, 0)$ и $h : C(f) \to \overline{P}[1],\ h = (0, -\mathrm{id})$.

Теперь, определим стандартный треугольник в категории $DB_{w_0}(W)$ как треугольник вида

$$\overline{P} \xrightarrow{f} \overline{Q} \xrightarrow{g} C(f) \xrightarrow{h} \overline{P}[1].$$

для некоторого $f \in \mathrm{Pair}_{w_0}(W)$.

Определение 3.2. *Треугольник* $\overline{P} \to \overline{Q} \to \overline{R} \to \overline{P}[1]$ *in* $DB_{w_0}(W)$ *будет выделенным, если он изоморфен стандартному треугольнику.*

Предложение 3.3. *Категория* $DB_{w_0}(W)$ *с функтором сдвига* $[1]$ *и классом выделенных треугольников, определнных выше, является триангулированной.*

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству для обычно гомотопической категории (см.,например, [10],[17]). $\square$

Определение 3.4. *Определим категорию D-бран типа B (B-браны) на* X *с суперпотенциалом* W *как произведение* $DB(W) = \prod_{w \in \mathbb{A}^1} DB_w(W)$.

Отметим, что, так как X регулярная, множество точек на $\mathbb{A}^1$ с особыми слоями является конечным [12], III,След.10.7 (мы считаем, что все происходит над поле характеристики 0). Ниже будет показано, что категория $DB_w(W)$ является тривиальной, если слой на точкой w гладкий. Следовательно, категория $DB(W)$ является произведением конечного числа категорий.

Произведение двух триангулированных категотрий $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$ – это тоже самое, как их ортогональная сумма. Объекты – пары (A, B) , где $A \in \mathcal{D}_1$ и $B \in \mathcal{D}_2$. Пространство морфизмов между (A, B) и (A', B') – это сумма $\mathrm{Hom}(A, A') \oplus \mathrm{Hom}(B, B')$. Функтор сдвига и выделенные треугольники определяются по компонентно.

Конструкция категории $DB_{w_0}(W)$ вкладывается в общую конструкцию стабильной категории, ассоциированной с точной категорией. Напомним кратко определение точной категории, введенной Квилленом в [23].

Точная категория $\mathcal{E}$ – это аддитивная категория с выбранным классом последовательностей $\{F \rightarrowtail E \twoheadrightarrow G\}$, называемых точными. Этот выбор определяет два класса морфизмов: допустимые эпиморфизмы $E \twoheadrightarrow G$ и допустимые мономорфизмы $F \rightarrowtail E$. Точная категория должна удовлетворять следующим аксиомам. Всякая последовательность, изоморфная точной, точна. Во всякой точной последовательности $F \overset{i}{\rightarrowtail} E \overset{p}{\twoheadrightarrow} G$, отображение i является ядром p , а p – коядром i . Класс допустимых мономорфизмов замкнут относительно композиции и относительно замены кобазы вдоль произвольного отображения $F \to F'$. Класс допустимых эпиморфизмов замкнут относительно композиции и относительно замены базы вдоль произвольного отображения $G' \to G$. Данной определение эквивалентно оригинальному определению Квиллена (см. [19]).

Объект $I \in \mathcal{E}$ – **инъективен** (соотв. P – **проективен**), если последовательность

$$\mathrm{Hom}(E, I) \to \mathrm{Hom}(F, I) \to 0 \qquad (\text{соотв. } \mathrm{Hom}(P, E) \to \mathrm{Hom}(P, G) \to 0)$$

точна для каждого допустимого мономорфизма (соотв. эпиморфизма). Скажем, что $\mathcal{E}$ имеет достаточно много инъективных, если для каждого $F \in \mathcal{E}$ существует допустимый мономорфизм в инъективен.

Если $\mathcal{E}$ имеет достаточно много инъективных, тогда можно определить **стабильную категорию** $\underline{\mathcal{E}}$ как категорию с теми же объектами, что и в $\mathcal{E}$, морфизмы в $\underline{\mathcal{E}}$ – это классы эквивалентностей $\overline{f}$ морфизмов в $\mathcal{E}$ по модулю подгруппы морфизмов, пропускающихся через инъективный объект в $\mathcal{E}$ (см. [11, 18, 19]).

Если $\mathcal{E}$ к тому же имеет достаточно много проективных (то есть для каждого $G \in \mathcal{E}$ найдется допустимый эпиморфизм $P \twoheadrightarrow G$ с проективным P), и классы проективных и инъективных совпадают, тогда $\mathcal{E}$ называется **фробениусовой категорией**. Стабильная категория $\underline{\mathcal{E}}$ связанная с фробениусовой категорией имеет естественную структуру триангулированной категории ([11]).

В нашем случае категория $\mathrm{Pair}_{w_0}(W)$ является точной категорией относительно покомпонентных мономорфизмов и эпиморфизмов. Более того, можно проверить, что $\mathrm{Pair}_{w_0}(W)$ фробениусова, и класс инъективных состоит в точности из пар гомотопных нулю. Таким образом, категория $DB_{w_0}(W)$ ничто иное как стабильная категория, ассоциированная с точной категорией $\mathrm{Pair}_{w_0}(W)$, и, в частности, имеет естественную структуру триангулированной категории. Это также доказывает предложение 3.3.

3.2. **Категории пар и категории особенностей.** В этом параграфе будет установлена связь между категорией B-бран в модели Ландау-Гинзбурга и триангулированными категориями особенностей слоев, введенными ранее. Как оказалось такая связь для максимальных Коэн-Макалеевых модулей над локальным кольцом впервые появилась в статье [8], Секция 6.

Далее, положим $w_0 = 0$. Обозначим через X_0 слой $f : X \to \mathbb{A}^1$ над точкой 0 . С любой парой $\overline{P}$ можно связать короткую точную последовательность

$$0 \longrightarrow P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \longrightarrow \mathrm{Coker}\, p_1 \longrightarrow 0. \tag{6}$$

Сопоставим объекту $\overline{P}$ пучок $\mathrm{Coker}\, p_1$. Это пучок на X . Но так как умножение на W аннигилирует его, то $\mathrm{Coker}\, p_1$ можно рассматривать как пучок на X_0 . Всякий морфизм f :

$\overline{P} \to \overline{Q}$ в $\mathrm{Pair}_0(W)$ задает морфизм между коядрами. Таким образом, получаем функтор $\mathrm{Cok}: \mathrm{Pair}_0(W) \longrightarrow \mathrm{coh}(X_0)$.

Лемма 3.5. *Функтор* Cok *является полным.*

Доказательство. Всякий морфизм $g : \mathrm{Coker}\ p_1 \to \mathrm{Coker}\ q_1$ может быть продолжен до отображения точных последовательностей

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & P_1 & \xrightarrow{p_1} & P_0 & \longrightarrow & \mathrm{Coker}\ p_1 & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle f_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_0} & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \\
0 & \longrightarrow & Q_1 & \xrightarrow{q_1} & Q_0 & \longrightarrow & \mathrm{Coker}\ q_1 & \longrightarrow & 0,
\end{array}$$

так как P_1 и P_0 проективные. Для доказательства леммы достаточно показать, что $f = (f_1, f_0)$ является отображением пар, то есть $f_1 p_0 = q_0 f_0$. Имеется последовательность равенств

$$q_1(f_1 p_0 - q_0 f_0) = f_0 p_1 p_0 - q_1 q_0 f_0 = f_0 W - W f_0 = 0.$$

Так как q_1 – вложение, получаем, что $f_1 p_0 = q_0 f_0$. □

Лемма 3.6. *Для любой пары* $\overline{P}$ *когерентный пучок* $\mathrm{Coker}\ p_1$ *на* X_0 *удовлетворяет условию*

$$\mathrm{Ext}^i(\mathrm{Coker}\ p_1, \mathcal{O}_{X_0}) = 0$$

для всех $i > 0$.

Доказательство. В начале отметим, что X_0 является горенштейновой как полное пересечение. Рассмотрим ограничение последовательности (6) на X_0 . Получаем точную последовательность

$$0 \to \mathrm{Coker}\ p_1 \longrightarrow P_1/W \xrightarrow{p_1|_W} P_0/W \longrightarrow \mathrm{Coker}\ p_1 \to 0.$$

Отсюда следует, что у пучка $\mathrm{Coker}\ p_1$ имеется правая периодическая резольвента

$$0 \to \mathrm{Coker}\ p_1 \longrightarrow P_1/W \xrightarrow{p_1|_W} P_0/W \longrightarrow P_1/W \longrightarrow \cdots .$$

Так как X_0 аффинна и горенштейнова, существование такой резольвенты влечет, что

$$\mathrm{Ext}^i(\mathrm{Coker}\ p_1, \mathcal{O}_{X_0}) = 0$$

для всех $i > 0$ (по лемме 1.19). □

Теперь покажем, что функтор Cok индуцирует точный функтор между триангулированными категориями $DB_0(W)$ и $\mathbf{D}_{Sg}(X_0)$.

Предложение 3.7. *Существует функтор* F *, который дополняет следующую диаграмму до коммутативной*

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Pair}_0(W) & \xrightarrow{\mathrm{Cok}} & \mathrm{coh}(X_0) \\
\downarrow & & \downarrow \\
DB_0(W) & \xrightarrow{F} & \mathbf{D}_{Sg}(X_0).
\end{array}$$

Более того, функтор F *является точным функтором между триангулированными категориями.*

Доказательство. Имеем функтор $\mathrm{Pair}_0(W) \to \mathbf{D}_{Sg}(X_0)$, который есть композиция Cok и естественного функтора из $\mathrm{coh}(X)$ в $\mathbf{D}_{Sg}(X_0)$. Для того, чтобы доказать существование функтора F , необходимо проверить, что морфизм $\overline{f} = (f_1, f_0) : \overline{P} \to \overline{Q}$, который гомотопен 0 переходит в 0-морфизм в $\mathbf{D}_{Sg}(X_0)$. Зафиксируем гомотопию (t, s) , где $t : P_1 \to Q_0$ и $s : P_0 \to Q_1$. Рассмотрим разложение $\overline{f}$ вида:

$$\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[r, shift left, "p_1"] \arrow[d, "{(t,f_1)}"'] & P_0 \arrow[l, shift left, "p_0"] \arrow[r] \arrow[d, "{(s,f_0)}"] & \mathrm{Coker}\ p_1 \arrow[d] \\
Q_0 \oplus Q_1 \arrow[r, shift left, "c_1"] \arrow[d, "pr"'] & Q_1 \oplus Q_0 \arrow[l, shift left, "c_0"] \arrow[r] \arrow[d, "pr"] & Q_0/W \arrow[d] \\
Q_1 \arrow[r, shift left, "q_1"] & Q_0 \arrow[l, shift left, "q_0"] \arrow[r] & \mathrm{Coker}\ q_1
\end{tikzcd}
\qquad \text{где} \qquad c_0 = \begin{pmatrix} -q_0 & \mathrm{id} \\ 0 & q_1 \end{pmatrix},\ c_1 = \begin{pmatrix} -q_1 & \mathrm{id} \\ 0 & q_0 \end{pmatrix}.$$

Оно показывает, что $F(\overline{f})$ пропускается через локально свободный объект Q_0/W . Следовательно, $F(\overline{f}) = 0$ в категории $\mathbf{D}_{Sg}(X_0)$. Доказательство точности функтора F прямое и оставляется в качестве упражнения. □

Лемма 3.8. *Если* $F\overline{P} = 0$ *, тогда* $\overline{P} = 0$ *в* $DB_0(W)$.

Доказательство. Если $F\overline{P} = 0$, то $\mathrm{Coker}\, p_1$ совершенный комплекс. Значит, по леммам 1.20 и 3.6 он локально свободен. Следовательно, существует отображение $f : \mathrm{Coker}\ p_1 \to P_0/W$, которое расщепляет эпиморфизм $pr : P_0/W \to \mathrm{Coker}\ p_1$. Он может быть поднят до отображения из $\{P_1 \xrightarrow{p_1} P_0\}$ в $\{P_0 \xrightarrow{W} P_0\}$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "t"'] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "u"] & \mathrm{Coker}\ p_1 \arrow[d, "f"] \\
P_0 \arrow[r, "W"] \arrow[d, "p_0"'] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & P_0/W \arrow[d, "pr"] \\
P_1 \arrow[r, "p_1"] & P_0 \arrow[r] & \mathrm{Coker}\ p_1.
\end{tikzcd}$$

Так как композиция $pr \cdot f$ тождественна, отображение $(p_0 t, u)$ пары $\{P_1 \xrightarrow{p_1} P_0\}$ в себя гомотопно тождественному отображению. Следовательно, существует морфизм $s : P_0 \to P_1$ такой, что

$$\mathrm{id}_{P_1} - p_0 t = s p_1 \qquad \text{и} \qquad p_1 s = \mathrm{id}_{P_0} - u.$$

Более того, имеются равенства

$$0 = (u p_1 - W t) = (u p_1 - t W) = (u - t p_0) p_1.$$

Это значит, что $(u - t p_0) = 0$, так как нету отображений из $\mathrm{Coker}\, p_1$ в P_0 . Окончательно получаем морфизмы t и s , для которых

$$\mathrm{id}_{P_1} = p_0 t + s p_1 \qquad \text{и} \qquad \mathrm{id}_{P_0} = p_1 s + t p_0.$$

Следовательно, пара $\overline{P}$ изоморфна нулевому объекту в категории $DB_0(W)$. □

Теорема 3.9. *Функтор* $F : DB_0(W) \longrightarrow \mathbf{D}_{Sg}(X_0)$ *является точной эквивалентностью.*

Доказательство. По лемме 3.6 когерентные пучки $\mathrm{Coker}\ p_1$ и $\mathrm{Coker}\ q_1$ удовлетворяют условию предложения 1.21 с $N = 0$. Получаем изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}_{Sg}(X_0)}(\mathrm{Coker}\ p_1, \mathrm{Coker}\ q_1) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{coh}(X_0)}(\mathrm{Coker}\ p_1, \mathrm{Coker}\ q_1)/\mathcal{R},$$

где $\mathcal{R}$ – подпространство морфизмов, пропускающихся через локально свободные пучки. Так как Cok является полным, получаем, что функтор F так же является полным.

Доказательство того, что F строгий является стандартным. Пусть $f : \overline{P} \to \overline{Q}$ морфизм, для которого $F(f) = 0$. Включим f в выделенный треугольник

$$\overline{P} \xrightarrow{f} \overline{Q} \xrightarrow{g} \overline{R}.$$

Получается, что тождественное отображение $F\overline{Q}$ пропускается через $F\overline{Q} \xrightarrow{Fg} F\overline{R}$. Так как F полный, то найдется отображение $h : \overline{Q} \to \overline{Q}$, пропускающееся через $g : \overline{Q} \to \overline{R}$, для которого $Fh = \mathrm{id}$. Следовательно, конус $C(h)$ отображения h переходит в нулевой объект под действием функтора F . По лемме 3.8 объект $C(h)$ сам является нулевым, и, значит, h – изоморфизм. Таким образом, $g : \overline{Q} \to \overline{R}$ – расщепляющийся мономорфизм, и, следовательно, $f = 0$.

Для завершения доказательства мы должны показать, что всякий объект $A \in \mathbf{D}_{Sg}(X_0)$ изоморфен объекту вида $F\overline{P}$ для некоторого $\overline{P}$. По предложению 1.23 всякий объект $A \in \mathbf{D}_{Sg}(X_0)$ изоморфен образу когерентного пучка $\mathcal{F}$, для которого $\underline{\mathcal{E}xt}^i(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X) = 0$ для всех $i > 0$. Рассмотрим эпиморфизм $P_0 \to \mathcal{F}$ пучков на X с локально свободным P_0 . Обозначим через $p_1 : P_1 \to P_0$ ядро этого отображения. Так как умножение на W индуцирует нулевой морфизм на $\mathcal{F}$, то существует отображение $p_0 : P_0 \to P_1$ такое, что $p_0 p_1 = W$ и $p_1 p_0 = W$. Получается пара

$$\overline{P} := \Big(P_1 \underset{p_0}{\overset{p_1}{\rightleftarrows}} P_0 \Big).$$

Нам только нужно показать, что P_1 локально свободен. Это следует из того факта, что для каждой замкнутой точки $t : x \hookrightarrow X$ имеется зануление

$$\mathrm{Ext}^i(P_1, t_* \mathcal{O}_x) = 0 \tag{7}$$

для всех $i > 0$. Для того, чтобы проверить это, заметим, что по лемме 1.19 пучок $\mathcal{F}$ имеет правую локально свободную резольвенту на X_0 . Для всякого локально свободного пучка Q на X_0 имеем $\mathrm{Ext}^i_X(Q, t_* \mathcal{O}_x) = 0$ при $i > 1$. И так как категория когерентных пучков на X имеет конечную когомологическую размерность, получаем, что и для $\mathcal{F}$ также $\mathrm{Ext}^i_X(\mathcal{F}, t_* \mathcal{O}_x) = 0$ при $i > 1$. Откуда сразу следует (7). □

Corollary 3.10. *Категория B-бран на гладком многообразии* X *с суперпотенциалом* W *эквивалентна произведению* $\prod_{w \in \mathbb{A}^1} \mathbf{D}_{Sg}(X_w)$ *, и данное произведение конечно.*

3.3. **Некоторые простые вычисления.** В этом параграфе мы опишем категорию B-бран в модели Ландау-Гинзбурга с суперпотенциалом $W' = z_0^n + z_1^2 + \dots + z_{2k}^2$, заданным на $\mathbb{C}^{2k+1}$. (Описание этих категорий и других, которые связаны с другими диаграммами Дынкина известны и могут быть найдены в статьях [1, 2, 6], где используется техника Ауслендера-Рейтена.)

Суперпотенциал W имеет только одну особую точку над 0 . По теореме 3.9 категория B-бран $DB_0(W')$ эквивалентна триангулированной категорией особенностей $\mathbf{D}_{Sg}(Y_0)$, где Y_0 – слой над 0 , то есть Y_0 задается уравнением $W' = 0$. По теореме 2.1 эта категория эквивалентна категории $\mathbf{D}_{Sg}(X_0)$, где $X_0 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[z]/z^n)$ – слой над 0 суперпотенциала $W = z^n$ на $\mathbb{C}$. Токим образом, достаточно описать категорию $\mathbf{D}_{Sg}(X_0)$.

Объекты. Обозначим через A алгебру $\mathbb{C}[z]/z^n$. По предложению 1.23 всякий объект ппредставляется конечномерным модулем M над A . Каждый A-модуль – это просто векторное пространство с оператором L , для которого $L^n = 0$. Следовательно, всякий есть прямая сумма модулей V_i с $i = 1, ..., n$, где $V_i = A/z^i$. Это жорданово разложение на жордановы блоки. Кроме того, модуль $V_n = A$ является свободным, и, значит, есть нулевой объект в $\mathbf{D}_{Sg}(X_0)$. Таким образом, неразложимые объекты в категории $\mathbf{D}_{Sg}(X_0)$ – это

$$V_1, V_2, ..., V_{n-1}.$$

Все другие являются конечными прямыми суммами объектов $V_\mu,\ \mu = 1, ...n-1$.

Морфизмы. Для каждой пары V_μ, V_ν зафиксируем морфизм

$$_\nu\alpha_\mu : V_\mu \to V_\nu,$$

который получается из естественой проекции, если $\mu \geq \nu$, и из инъекции, которая переводит $1 \in V_\mu = A/z^\mu$ в $z^{\nu-\mu}$, если $\nu \geq \mu$. Все остальные морфизмы есть линейные комбинации композиций $_\nu\alpha_\mu$. Существуют следующие соотношения:

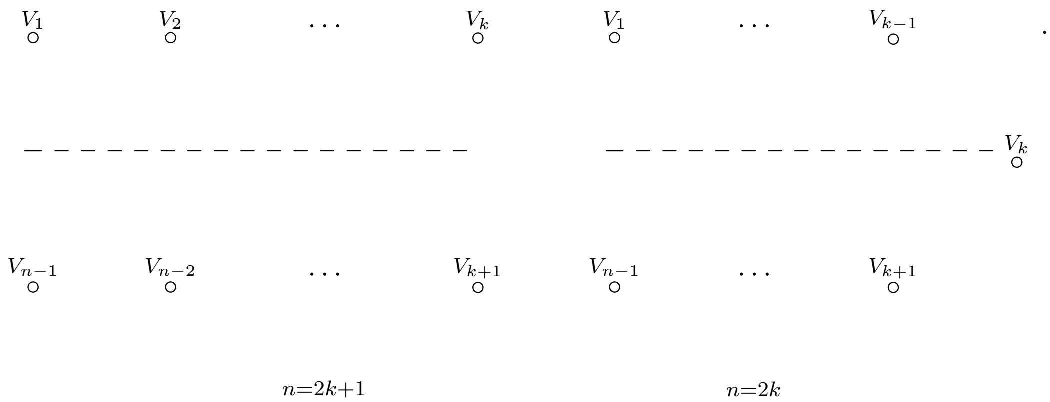
$$(8)\qquad \begin{array}{lll} 1) & _\mu\alpha_\mu = id_\mu, & \\ 2) & _\nu\alpha_{\lambda\lambda}\alpha_\mu = {_\nu\alpha_\mu}, & \text{если} \quad \nu \geq \lambda \geq \mu \quad \text{или} \quad \nu \leq \lambda \leq \mu, \\ 3) & _\nu\alpha_{\lambda\lambda}\alpha_\mu = 0, & \text{если} \quad \lambda \geq \mu + \nu \quad \text{или} \quad \lambda + n \leq \mu + \nu, \\ 4) & _\nu\alpha_{\lambda\lambda}\alpha_\mu = {_\nu\alpha_{\kappa\kappa}\alpha_\mu}, & \text{если} \quad \lambda + \kappa = \mu + \nu. \end{array}$$

Используя данные соотношения, можно увидеть, что пространство $\mathrm{Hom}(V_\mu, V_\nu)$ имеет базис, сформированный из морфизмов $_\nu\alpha_{\lambda\lambda}\alpha_\mu$, где $\max(\mu, \nu) \leq \lambda < \mu + \nu$. Обозначим через $\operatorname{depth} V_\mu$ целое число равное $\min(\mu, n-\mu)$. Получаем, что

$$\dim \mathrm{Hom}(V_\mu, V_\nu) = \min(\operatorname{depth} V_\mu, \operatorname{depth} V_\nu).$$

Более того, кольцо $\mathrm{End}(V_\mu)$ изоморфно кольцу $\mathbb{C}[x]/x^d$, где $d = \operatorname{depth} V_\mu$.

Функтор сдвига. Чтобы увидеть функтор сдвига, удобно нарисовать следующие картинки



Функтор сдвига $[1]$ – отражение относительно горизонтальной линии, то есть он переводит V_μ в $V_{n-\mu}$, а ${}_\nu\alpha_\mu$ в ${}_{(n-\nu)}\alpha_{(n-\mu)}$. Легко видеть, что все соотношения (8) сохраняются.

Выделенные треугольники. Для удобства будем писать $V_{-\mu}$ вместо $V_{n-\mu}$, рассматривая все целые по модулю n. Положим также $V_0 = 0$. Во-первых, всякий треугольник вида

$$V_\mu \xrightarrow{{}_\nu\alpha_\mu} V_\nu \xrightarrow{{}_{(\nu-\mu)}\alpha_\nu} V_{(\nu-\mu)} \xrightarrow{h} V_{(-\mu)}, \tag{9}$$

где $h = {}_{(-\mu)}\alpha_{(\nu-\mu)}$, если $\nu-\mu \geq 0$, и $h = -{}_{(-\mu)}\alpha_{(\nu-\mu)}$, если $\nu-\mu < 0$, является выделенным. Если теперь $f: V_\mu \to V_\nu$ – другой морфизм, который является композицией некоторых α, тогда, используя соотношения (8), его можно представить как ${}_\nu\alpha_{\lambda\lambda}\alpha_\mu$, где $\lambda > \max(\mu,\nu)$ и $\lambda < \mu+\nu$. В этом случае треугольник вида

$$V_\mu \xrightarrow{f} V_\nu \xrightarrow{g} V_{(\lambda-\mu)} \oplus V_{(\nu-\lambda)} \xrightarrow{h} V_{(-\mu)} \tag{10}$$

является выделенным. Здесь $g = ({}_{(\lambda-\mu)}\alpha_\nu\ ,{}_{(\nu-\lambda)}\alpha_\nu)^t$ и $h = ({}_{(-\mu)}\alpha_{(\lambda-\mu)}, -{}_{(-\mu)}\alpha_{(\nu-\lambda)})$. Отметим, что треугольник (9) является частным случаем треугольника (10) при $\lambda = \max(\mu,\nu)$.

Все другие выделенные треугольники изоморфны введенным выше.

Благодарности

Автор благодарен Алексею Бондалу, Антону Капустину, Людмилу Кацаркову, Бернарду Келлеру, Максиму Концевичу и Леониду Посицельскому за полезные обсуждения. Николай Тюрин внимательно прочитал предварительный вариант статьи и сделал целый ряд ценных замечаний. Дюко Ван Стратена привлек внимание автора к статьям [8, 20, 5]. Хочется также поблагодарить Амнона Нимана, который указал на некоторые неточности в первом варианте статьи.

Автор признателен Математическому институту Макса Планка, во время пребывания в котором была написана большая часть данной работы. Эта работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант є 02-01-00468), гранта Президента РФ для поддержки молодых российских ученых є МД-2731.2004.1. Исследования, описанные в данной работе, были сделаны при частичной поддержке Американского фонда гражданских исследований (CRDF є RM1-2405-MO-02.) Автору также приятно выразить свою благодарность Фонду содействия отечественной науке.

И наконец, я должен поблагодарить моего неформального наставника Андрея Николаевича Тюрина, без участия которого данная статья не могла бы быть написана вовсе.

Список литературы

[1] Auslander M., *Rational singularities and almost split sequences*, Trans. Am. Math. Soc., v.293 (1986) 511-532.

[2] Auslander M., Reiten I., *Almost split sequences for rational double points*, Trans. Am. Math. Soc., v.302 (1987) 87-99.

[3] Berthelot P., Grothendieck A., Illusie L., *Théorie des intersections et théoreme de Riemann-Roch*, Springer Lect. Notes in Math., v.225 (1971).

[4] Bondal A., Orlov D., Semiorthogonal decomposition for algebraic varieties, *preprint MPIM* 95/15 (1995), *preprint* math.AG/9506012.

[5] Buchweitz R.-O. *The comparison theorem*, appendix to Buchweitz, R.-O., Eisenbud, D., Herzog, J., Cohen-Macaulay modules on quadrics., Lect. Notes in Math., 1273, Springer, Berlin, (1987) pp.96-116.

[6] Dietrich E., Wiedemann A., *The Auslander-reiten quiver of a simple curve singularity*, Trans. Am, Math. Soc., v.294 (1986) 455-475.

[7] Douglas M.R., *D-branes, categories and N=1 supersymmetry*, J.Math.Phys. v.42, 2818 (2001), arXiv:hep-th/0011017.

[8] Eisenbud, D. *Homological algebra on a complete intersection, with an application to group representations* Trans. Am. Math. Soc., v.260 (1980) 35-64.

[9] Габриель П., Цисман М., *Категории частных и теория гомотопий*, Изд. "Мир", Москва (1971).

[10] Гельфанд С. И., Манин Ю. И., *Методы гомологической алгебры. Введение в теорию когомологий и производных категорий*, Изд. "Наука", Москва (1988).

[11] Happel D., *On the derived categories of finite-dimensional algebra*, Comment. Math. Helv. v.62 (1987), 339-389.

[12] Hartshorne R., *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, No. 52. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, (1977).

[13] Hartshorne R., *Residues and Duality*, Springer Lect. Notes Math., v.20 (1966).

[14] Hori K., Iqbal A., Vafa C., *D-branes and Mirror Symmetry*, arXiv:hep-th/0005247.

[15] Hori K., Vafa C., *Mirror Symmetry*, arXiv:hep-th/0002222.

[16] Kapustin A., Li Yi, *D-branes in Landau-Ginzburg models and algebraic geometry*, arXiv:hep-th/0210296.

[17] Кашивара М., Шапира П., *Пучки на многообразиях*, Из-во "Мир", Москва (1994).

[18] Keller B., *Derived categories and their uses*, Chapter of the Handbook of algebra, Vol. 1, edited by M. Hazewinkel, Elsevier (1996).

[19] Keller B., *Chain complexes and stable categories*, Manus. Math. v.67 (1990), 379-417.

[20] Knörrer, H. *Cohen-Macaulay modules on hypersurface singularities I.*, Invent. Math., v.88 (1987) 153-164.

[21] Kontsevich M., *Homological algebra of mirror symmetry*, Proceedings of ICM (Zurich, 1994), 120-139, Basel: Birkhäuser (1995).

[22] Орлов Д.О., *Проективные расслоения, моноидальные преобразования и производные категории когерентных пучков*, Известия РАН, Сер. Матем., т.56, N4 (1992) 852-862.

[23] Quillen D., *Higher Algebraic K-theory I*, Springer Lect. Notes Math. v.341 (1973), 85-147.

[24] Seidel P., *Vanishing cycles and mutations*, arXiv:math.SG/0007115; *More about vanishing cycles and mutations*, arXiv:math.SG/0010032.

[25] Thomason R.W., Trobaugh T., *Higher Algebraic K-Theory of Schemes and of Derived Categories*, The Grothendieck Festschrift v.III, Birhäuser, Boston, Basel, Berlin, (1990) 247-436.

[26] Verdier J.L., *Categories derivées*, in SGA 4 1/2, Lecture Notes in Math., v.569, Springer-Verlag, (1977).

119991, Москва, ул. Губкина 8, Математический институт им. В.А.Стеклова РАН, отдел алгебры

E-mail address: `orlov@mi.ras.ru`