Лекция 1

Математическая индукция

Мы начнем наш рассказ с принципа математической индукции. Это очень удобный и популярный способ рассуждений, встречающийся в самых разных областях математики.

1.1 Задача о раскраске плоскости

Начнем с разбора конкретной задачи.

Задача 1.1. На плоскости проведено несколько прямых. Они делят плоскость на области. Докажите, что области можно так раскрасить в два цвета, что соседние (по отрезку или лучу) области покрашены в разные цвета.

Для любого конкретного набора прямых требуемую раскраску легко построить, см. примеры на рисунке 1.1. Но в условии задачи не указан конкретный набор прямых. Это означает, что нужно доказать существование раскраски для произвольного набора прямых. Таких наборов бесконечно много, поэтому требуется какое-то общее рассуждение.

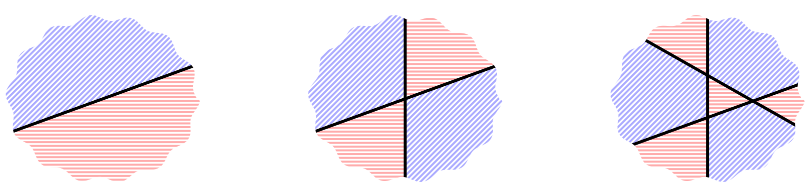

Рис. 1.1: Примеры раскрасок

Одна из напрашивающихся идей — анализировать возможные варианты от простых к сложным. Чем больше прямых, тем сложнее выглядят разбиения на области.

Попробуем понять, что происходит при добавлении одной прямой. Пусть есть набор прямых и области, на которые они разбили плоскость, уже покрашены как требуется.

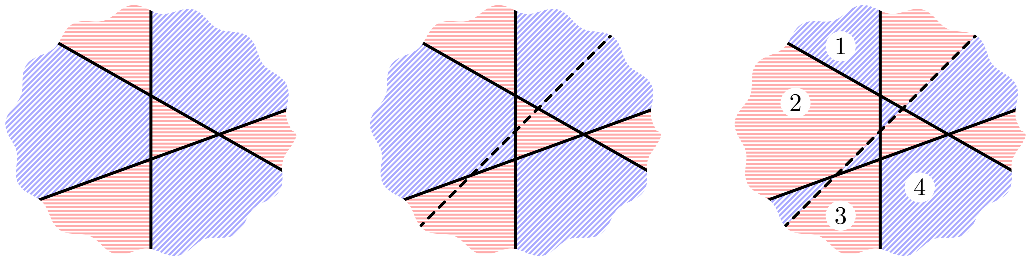

Рис. 1.2: Добавление прямой

Проведем еще одну прямую. Как получить раскраску для новой конфигурации? Посмотрим на какую-нибудь область старой конфигурации, которую пересекает новая прямая. На центральной рисунке 1.2 она не закрашена. Эта область разбивается новой прямой на две. Цвета этих двух новых областей по условию задачи должны быть различны.

Поменяем цвет у одной из областей и сохраним у другой. В этом месте препятствие устранено, но возникают новые.

Поэтому сделаем более обширную перекраску. Перекрасим в другой цвет все области по одну сторону от новой прямой, см. правый рисунок 1.2.

Заметим, что если исходная раскраска была правильной, то и новая раскраска правильная. Действительно, те соседние области, которые не граничат по новой прямой, либо одновременно меняют цвет (как области 1 и 2 на рисунке), либо одновременно не меняют (как области 3 и 4 на рисунке). Поэтому совпасть цвета у них не могут (в исходной раскраске всё было правильно). Те же соседние области, которые граничат по новой прямой, до перекраски были одного цвета. Поскольку перекрашивается только одна из этих областей, то после перекраски эти области будут иметь разные цвета.

Это наблюдение можно сформулировать так:

«если утверждение задачи выполняется для всех конфигураций из n прямых, оно также выполняется и для всех конфигураций из $(n+1)$-й прямой». (1.1)

Для случая одной прямой утверждение задачи очевидно, см. левый рисунок 1.1.

Но тогда по (1.1) для $n = 1$ утверждение нашей задачи справедливо и для двух прямых. Тут мы используем общее правило логики: *если утверждение A верно и условное утверждение «если A, то B» верно, то и утверждение B верно*.

Аналогично для трёх прямых: мы уже доказали утверждение для двух прямых, а утверждение (1.1) справедливо для любого количества прямых.

Продолжая, получим доказательство для произвольного количества прямых.

Схема рассуждения выглядит так:

$$
\begin{aligned}
&P(1) \text{ и } C(1) \;\Rightarrow\; P(2),\\
&P(2) \text{ и } C(2) \;\Rightarrow\; P(3),\\
&P(3) \text{ и } C(3) \;\Rightarrow\; P(4),\\
&\ldots
\end{aligned}
\qquad (1.2)
$$

(для краткости мы обозначили через $P(n)$ утверждение задачи для n прямых, а через $C(n)$ — условное утверждение (1.1) для n прямых). Добавляя по единице, возможно добраться до любого числа прямых. Значит, утверждение справедливо для любого числа прямых.

1.2 Формулировка принципа математической индукции

Схема рассуждения (1.2) не зависит от конкретного утверждения $P(n)$. Важно лишь, что утверждение $C(n)$ имеет вид: «если $P(n)$ верно, то и $P(n+1)$ верно».

Сформулируем общий принцип, на котором основано наше рассуждение про раскраски.

> **Принцип математической индукции.** *Если некоторое утверждение $A(n)$, зависящее от натурального параметра n, верно для $n = 1$, и для любого n верно утверждение «если $A(n)$ верно, то и $A(n+1)$ верно», то утверждение $A(n)$ верно при любом n.*

Утверждение $A(1)$ называется *базисом индукции* (или *базой индукции*), а условное утверждение «если $A(n)$ верно, то и $A(n+1)$ верно» — *индуктивным переходом* (или *шагом индукции*). В этом условном утверждении *посылка* $A(n)$ называется *индуктивным предположением*.

Выбор в качестве базиса числа 1 связан с тем, что в нашей задаче это наименьшее возможное значение параметра[1]. Если заменить его на какое-то фиксированное положительное число, идея рассуждения не изменится. Нужно только позаботиться о проверке истинности тех значений n, которые оказываются меньше выбранного в качестве базиса.

Оба условия в формулировке принципа математической индукции существенны. Рассмотрим простой пример.

Для любого целого числа n справедливо условное утверждение «если число n положительное, то число $n+1$ положительное». Это утверждение имеет вид индуктивного перехода, где $A(n)$ означает утверждение «число n положительное». Применяя принцип математической индукции, получаем утверждение «любое целое число положительное». Это утверждение очевидно неверно (есть и отрицательные целые числа, скажем, -1).

---

[1] Далее мы обычно будем считать 0 натуральным числом. Принцип математической индукции тогда нужно формулировать, начиная с 0.

Ошибка здесь как раз в том, что мы пропустили базис индукции. Нет такого целого числа N, что добавлением единицы из него возможно получить все целые числа.

Бывают и более тонкие ошибки в применении принципа математической индукции. Классический пример: доказательство утверждения «все натуральные числа равны друг другу».

Докажем по индукции такое утверждение $A(n)$: «в любом наборе из n натуральных чисел все числа равны». Из него легко следует, что все натуральные числа равны.

С базисом индукции здесь всё в порядке: $A(1)$ означает тривиальное утверждение «каждое число равно самому себе».

Докажем истинность индуктивного перехода. Пусть $A(n)$ справедливо. Рассмотрим набор из $(n+1)$-го числа

$$(a_1,\ a_2,\ \dots, a_n,\ a_{n+1}).$$

Применим утверждение $A(n)$ к наборам

$$(a_1,\ a_2,\ \dots, a_n) \quad \text{и} \quad (a_2,\ \dots, a_n,\ a_{n+1})$$

из n чисел. Из этого утверждения следует, что числа и в одном, и в другом наборе равны. Получаем цепочки равенств

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n \quad \text{и}$$
$$a_2 = a_3 = \dots = a_{n+1}.$$

Отсюда уже очевидно, что

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = a_{n+1},$$

то есть утверждение $A(n+1)$ верно. Применяя принцип математической индукции, получаем, что $A(n)$ верно для всех n.

Где ошибка в этом рассуждении? Как и говорилось выше, она ровно в том месте, в котором написано «очевидно».

Для $n = 1$ цепочки равенств вырождаются: первая имеет вид $a_1 = a_1$, а вторая — $a_2 = a_2$. Из этих двух тривиальных равенств, конечно же, не следует, что $a_1 = a_2$.

Для $n > 1$ ситуация другая: в первой цепочке есть равенство $a_1 = a_2$, а во второй — $a_2 = a_{n+1}$. Из этих двух равенств следует, что $a_1 = a_{n+1}$.

Итак, ошибка в доказательстве индуктивного перехода возникает только в случае $n = 1$. Но само утверждение $A(n)$ неверно для всех $n > 1$.

Это обычная для математики ситуация. Математика отличается от всех других наук тем, что допускает сколь угодно длинные логические выводы из выбранных посылок. Поэтому математики умеют доказывать очень многое из очень слабых посылок. Платой за такую мощь является необходимость очень тщательно следить за тем, чтобы среди посылок не было ложных утверждений. Достаточно одного ложного утверждения, чтобы сделать бессмысленной всю длинную цепочку выводов.[2]

Замечание 1.1. Индуктивные рассуждения удобны, но зачастую скрывают суть. Например, в задаче о раскраске плоскости ту же самую раскраску легко описать общим правилом. Введём на плоскости координаты и для каждой прямой ℓ_i рассмотрим задающее ее уравнение $a_i x + b_i y + c_i = 0$. Обозначим через f_i левую часть этого уравнения. Тогда нетрудно понять, что $f_i(x, y) = 0$ на прямой ℓ_i, $f_i(x, y) > 0$ в одной полуплоскости относительно ℓ_i и $f_i(x, y) < 0$ в другой полуплоскости.

Точке (x, y), не лежащей ни на одной из прямых, сопоставим число $+1$, если

$$f_1(x, y) \cdot f_2(x, y) \cdot \ldots \cdot f_n(x, y) > 0,$$

и число -1 в противном случае. Легко видеть, что точкам одной области сопоставлено одно и то же число, так как знаки всех линейных функций внутри области не меняются. Поэтому указанное правило задаёт раскраску областей. Причём эта раскраска правильная: в соседних областях отличается знак ровно одной функции, поэтому им приписаны разные знаки.

Оказывается, что мы получим ту же самую (с точностью до выбора знака) раскраску, что и при индуктивном рассуждении. Почему так происходит?

Дальше рассмотрим несколько типичных примеров рассуждений по индукции.

1.3 Доказательство формул суммирования по индукции

Простейшие примеры формул суммирования — это суммы арифметической и геометрической прогрессии:

$$1 + 2 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}; \tag{1.3}$$

$$1 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = \sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1. \tag{1.4}$$

В первом случае утверждение $A(n)$ из принципа математической индукции означает справедливость формулы (1.3) для данного конкретного n. Проверить $A(1)$ очень легко: $1 = 1 \cdot 2/2$. Далее нужно доказать справедливость условного утверждения. Действительно, пусть

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

[2]Это известное в логике обстоятельство: одного противоречия достаточно, чтобы доказать любое утверждение. Например, из равенства $2+2=5$ известный логик Р. Смаллиан доказывает, что он – папа римский. Рассуждение записано в книге Р. Смаллиана. «Как же называется эта книга?»

Тогда получаем

$$1+2+\cdots+n+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+n+1=\frac{(n+2)(n+1)}{2}.$$

Аналогично для геометрической прогресии: для $n=1$ получается $1=2^{0+1}-1$, а индуктивный переход получается прямой выкладкой: если

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1}-1,$$

то

$$\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = \sum_{k=0}^{n} 2^k + 2^{n+1} = 2^{n+1}+2^{n+1}-1 = 2^{n+2}-1.$$

Конечно, у этих формул есть и другие доказательства, у которых есть свои преимущества. Так, индуктивные доказательства хоть и позволяют быстро проверить справедливость равенства, но не позволяют найти правую часть по левой. Для этого нужны другие рассуждения. В частности, справедлива такая теорема:

Теорема 1.1. *Для любого d сумма $1^d+2^d+\cdots+n^d$ является многочленом от n степени не выше $d+1$.*

Зная такой факт[3], уже не трудно находить формулы для сумм степеней. Попробуйте сделать это для сумм квадратов (и проверьте ваш результат с помощью индуктивного рассуждения).

1.4 Доказательство неравенств с помощью индукции

Теорема 1.2 (неравенство Бернулли)**.** *Для всех $n \geqslant 1$ верно неравенство $(1+h)^n \geqslant 1+hn$, при $1+h \geqslant 0$.*

Доказательство. База индукции:

$$1+h \geqslant 1+h.$$

Индуктивный переход: пусть $(1+h)^n \geqslant 1+hn$, тогда

$$(1+h)(1+h)^n \geqslant (1+h)(1+hn) = 1+(n+1)h+h^2n \geqslant 1+(n+1)h,$$

где первое неравенство верно так как $1+h \geqslant 0$. □

Более сложный пример – доказательство следующего неравенства для всякого $n \geqslant 1$:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2.$$

[3]Доказательство этой теоремы намечено в разделе 2.9, см. с. 60.

С основанием индукции проблем нет, но индуктивный шаг выполнить напрямую не удается (попробуйте!).

Здесь оказывается полезной такая идея: доказывать более сильное утверждение. Казалось бы, не ясно, как это может помочь, ведь доказывать более сильное утверждение сложнее. Трюк состоит в том, что в случае рассуждения по индукции на шаге индукции сильнее станет не только рассуждение, но и посылка.

В данном случае мы хотим оценить сверху числа $1/k^2$ в левой части подобрать такие числа, чтобы они явно суммировались и каждое оценивало обратный квадрат сверху. Используем равенство

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}>\frac{1}{(n+1)^2}.$$

Оценим каждый член по отдельности подходящей разностью. В сумме останется только первая и последняя дробь:

$$1+\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{n^2}<1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(n-1)n}=$$
$$1+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=2-\frac{1}{n}<2.$$

1.5 Пример из алгебры: существование решения однородной линейной системы уравнений

Напомним определения. *Однородным линейным уравнением* называется уравнение вида

$$a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n=0,$$

где x_i — переменные, а a_i — числовые коэффициенты.

Система однородных линейных уравнений состоит из нескольких уравнений такого типа:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=0,\\ \dots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n=0.\end{cases}$$

Её *решением* называется такой набор значений переменных $(x_1,\dots,x_n)$, на котором все уравнения системы обращаются в истинные равенства.

Для системы однородных уравнений решение всегда есть:

$$x_1=x_2=\dots=x_n=0.$$

Поэтому интересен вопрос о существовании ненулевого решения системы однродных линейных уравнений.

Теорема 1.3. *Если количество уравнений m в однородной системе линейных уравнений меньше количества переменных n, то система имеет ненулевое решение.*

Докажем эту теорему индукцией по числу уравнений. Для начала разберём случай одного уравнения с $n > 1$ переменными. Тут есть два варианта.

(I) Все коэффициенты уравнения нулевые:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = 0.$$

Любой набор значений переменных является решением такого уравнения. Утверждение теоремы в этом случае выполняется.

(II) Есть хотя бы один ненулевой коэффициент в уравнении

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0.$$

Без ограничения общности считаем, что $a_1 \neq 0$ (в противном случае перенумеруем переменные).

Выберем какие-нибудь ненулевые значения для переменных $x_2, \ldots, x_n$, скажем,

$$x_2 = \cdots = x_n = 1.$$

Значение x_1 выразим из уравнения:

$$x_1 = \frac{1}{a_1}\left(-a_2 - a_3 - \cdots - a_n\right).$$

Получили ненулевой набор значений переменных, на котором уравнение обращается в истинное равенство:

$$a_1 \cdot \frac{1}{a_1}\left(-a_2 - a_3 - \cdots - a_n\right) + a_2 \cdot 1 + \cdots + a_n \cdot 1 = \\ = -a_2 - a_3 - \cdots - a_n + a_2 + \cdots + a_n = 0.$$

Поэтому утверждение теоремы в этом случае выполняется.

Контрольный вопрос 1.1. Использовалось ли в этом рассуждении условие на количество переменных?

Теперь докажем справедливость индуктивного перехода. Напомним, что это условное утверждение: если теорема выполняется для систем из m уравнений с $n > m$ переменными, то она выполняется и для систем из $m+1$ уравнения с $n > m+1$ переменными.

В системе из $m+1$ уравнения с $n > m+1$ переменными возьмём первое уравнение

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0.$$

Если все его коэффициенты нулевые, то любой набор значений переменных обращает это уравнение в истинное равенство. В том числе и ненулевое решение системы из оставшихся m уравнений с $n > m+1 > m$ переменными, которое существует в силу индуктивного предположения.

В противном случае без ограничения общности считаем, что $a_{11} \neq 0$. Тогда первое уравнение равносильно уравнению

$$x_1 = -\frac{1}{a_{11}}\left(a_{12}x_2 + a_{13}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n\right). \tag{1.5}$$

Из этого уравнения значение переменной x_1 однозначно выражается через значения остальных переменных. Подставляя это выражение в уравнение с номером $i > 1$, получаем

$$\begin{aligned} &a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = \\ &\qquad = -\frac{a_{i1}}{a_{11}}\left(a_{12}x_2 + a_{13}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n\right) + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = \\ &\qquad = \left(a_{i2} - \frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{12}\right)x_2 + \cdots + \left(a_{in} - \frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1n}\right)x_n = a'_{i2}x_2 + \cdots + a'_{in}x_n = 0. \end{aligned}$$

У системы уравнений с m уравнениями и $n-1 > m$ переменных

$$\begin{cases} a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = 0, \\ a'_{32}x_2 + \cdots + a'_{3n}x_n = 0, \\ \dots \\ a'_{(m+1)2}x_2 + \cdots + a'_{(m+1)n}x_n = 0. \end{cases}$$

по предположению индукции есть ненулевое решение. Добавим к нему значение переменной x_1, вычисленное из уравнения (1.5). Получим ненулевое решение исходной системы.

На этом доказательство индуктивного перехода завершается.

1.6 Коды Грея

Алфавитом размера q называется любой набор из q различных символов. Слово длины n в алфавите из q символов — это последовательность n символов из этого алфавита.

Пример 1.2 (Двоичные слова)**.** Пусть в алфавите всего два символа — 0 и 1. Такой алфавит называется двоичным и слова в таком алфавите называются двоичными. Тогда есть четыре двоичных слова длины 2:

$$00,\ 01,\ 10,\ 11.$$

Пример 1.3. Если в алфавите 33 символа, их можно отождествить с буквами русского алфавита. Примерами слов длины 3 в таком алфавите будут

СЫР, МАЙ, ЪЙФ.

Последний пример показывает, что словами мы считаем любые последовательности символов, в том числе и те, которые не являются словами в обычном бытовом смысле.

В примере 1.2 перечислены все двоичные слова длины 2. Порядок перечисления таков, что при переходе от второго слова к третьему изменяются значения всех символов (в двоичном случае символы называются *битами*). Это иногда неудобно и желательно упорядочить слова так, чтобы при переходе от слова к следующему изменялось как можно меньше символов.

Ясно, что хотя бы один символ должен измениться (иначе не получим новое слово). А всегда ли можно подобрать такой порядок, чтобы при каждом переходе изменялся лишь один символ? Такой порядок слов и называется *кодом Грея*.

Для двоичных слов длины 2 такой порядок легко найти:

$$00,\ 01,\ 11,\ 10.$$

Мы просто переставили местами два последних слова.

А как быть с двоичными словами длины 3? Каждое такое слово получается дописыванием к слову длины 2 ещё одного бита. Возможных значений этого бита ровно 2. Попробуем составить порядок для слов длины 3 из двух порядков для слов длины 2, приписывая в начале слов первый раз 0, а затем 1:

$$000,\ 001,\ 011,\ 010,\ 100,\ 101,\ 111,\ 110.$$

Видно, что при переходе от четвёртого слова к пятому изменяются два бита, так что такой порядок не подходит. Но слово 010 отличается от последнего слова 110 лишь в одном бите. Поэтому подходящий порядок получится, если записать слова во второй половине в обратном порядке:

$$000,\ 001,\ 011,\ 010,\ 110,\ 111,\ 101,\ 100.$$

Эта идея работает и в общем случае.

Теорема 1.4. *Можно так упорядочить все слова длины n в алфавите из q символов, что любые два соседних слова различаются только в одной позиции.*

Для определённости в обозначениях договоримся обозначать символы алфавита числами $0, \ldots, q-1$.

Доказательство проведём по индукции.

База индукции — слова длины 1, то есть просто одинокие символы. Тут нет никаких проблем. Скажем, перечислим эти слова в порядке возрастания:

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ q-1.$$

Каждый раз изменение происходит только в одном символе (так как символ всего один).

Индуктивный переход. Предположим, что уже есть порядок на словах длины n, в котором соседние слова различаются лишь в одной позиции:

$$u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_N.$$

Основываясь на этом порядке, упорядочим слова длины $n+1$.

Вначале поставим слова, начинающиеся с нуля:

$$0u_1,\ 0u_2,\ \ldots,\ 0u_N.$$

Первые позиции у них совпадают, а в остальных различия такие же, как для слов длины n. Теперь добавим слова, начинающиеся с 1, но расставим их в порядке, обратном тому, который мы выбрали для слов длины n: первым возьмём слово u_N, затем слово u_{N-1} и т.д. Получаем такую последовательность слов:

$$0u_1,\ 0u_2,\ \ldots,\ 0u_N,\ 1u_N,\ 1u_{N-1},\ \ldots,\ 1u_1.$$

Средние слова в этой последовательности $0u_N$ и $1u_N$ различаются в одной позиции. Все остальные слова имеют одинаковый первый символ, а в остальных различаются так же, как и в выбранном порядке для слов длины n.

Продолжаем эту последовательность аналогичным образом. Слова, начинающиеся с чётных символов записываем в том порядке, в котором расположены слова длины n, а слова, начинающиеся с нечётных символов записываем в обратном порядке. Получаем в итоге последовательность, которую для удобства разобьём на строки

$$\begin{array}{llll}
0u_1, & 0u_2, & \ldots, & 0u_N,\\
1u_N, & 1u_{N-1}, & \ldots, & 1u_1,\\
2u_1, & 2u_2, & \ldots, & 2u_N,\\
3u_N, & 3u_{N-1}, & \ldots, & 3u_1,\\
 & & \ldots & \\
(q-1)u_N, & (q-1)u_{N-1}, & \ldots, & (q-1)u_1.
\end{array}$$

Это результат для чётного q. Для нечётного аналогично:

$$\begin{array}{llll}
0u_1, & 0u_2, & \ldots, & 0u_N,\\
1u_N, & 1u_{N-1}, & \ldots, & 1u_1,\\
2u_1, & 2u_2, & \ldots, & 2u_N,\\
3u_N, & 3u_{N-1}, & \ldots, & 3u_1,\\
 & & \ldots & \\
(q-1)u_1, & (q-1)u_2, & \ldots, & (q-1)u_N.
\end{array}$$

Слова, которые стоят на границах строк (последнее в строке и первое в следующей), различаются только в первой позиции. Внутри строк у слов первые позиции заняты одинаковыми символами, а различий столько же, сколько в выбранном порядке на словах длины n. Индуктивный переход доказан.

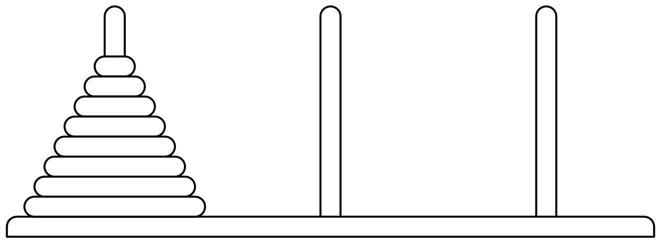

Рис. 1.3: В оригинальном варианте было 8 дисков

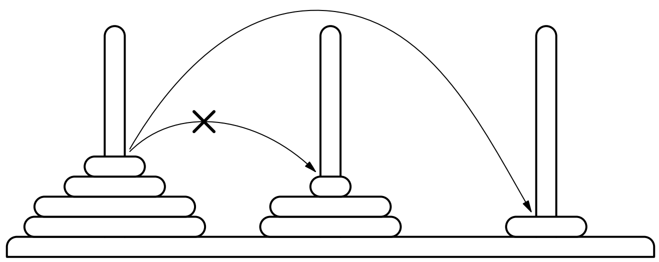

Рис. 1.4: Разрешенный ход и запрещенный ход (перечеркнут)

1.7 Ханойская башня

«Ханойская башня» — это старинная головоломка. Есть три штырька, на который можно сажать n дисков разного размера. В начальный момент времени все диски насажены на одном штырьке в порядке убывания размера. (См. рис. 1.3.)

За один ход разрешается переносить верхний в стопке диск на любой другой штырек так, чтобы под ним был диск бóльшего размера. (См. рис. 1.4.)

Требуется перенести всю стопку дисков с одного штырька на другой. Всегда ли это возможно?

Если $n = 1$, то есть диск всего один, никаких препятствий к переносу нет. Задача решается за один ход.

Если $n = 2$, первый ход по сути единственный. Затем можно перенести более широкий диск на третий штырек. После чего положить меньший диск на бóльший и задача решена (за 3 хода).

Попробуйте отложить книгу и решить задачу для случая 3 дисков. Общее решение после этого станет гораздо понятнее.

Решение в общем случае получается по индукции. Базис индукции уже установлен выше. Осталось сделать индуктивный переход.

Предположим, что n дисков возможно перенести с одного штырька на другой. Рассмотрим теперь $n+1$ диск. Перенос будет происходить в три стадии, см. рис. 1.5.

(I) Перенесём верхние n дисков с первого штырька на второй. Самый большой

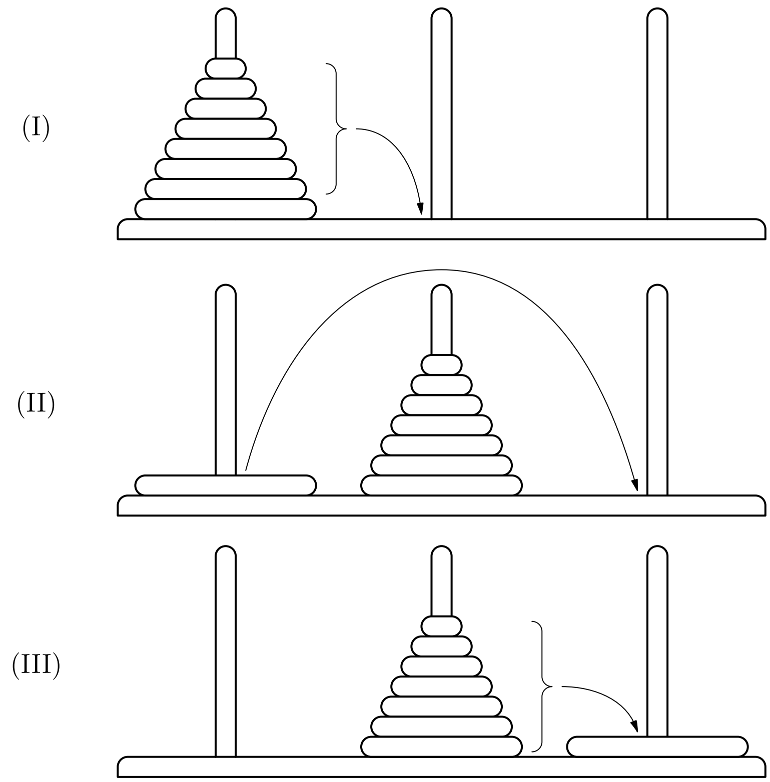

Рис. 1.5: Индуктивное решение головоломки «Ханойская башня»

диск в это время лежит на первом штырьке на самом низу. При необходимости остальные диски помещаются на него — это не противоречит правилам.

(II) Перенесём самый большой диск с первого штырька на третий.

(III) Перенесём n дисков со второго штырька на третий. На третьем штырьке уже лежит самый большой диск, так что после завершения этой стадии все диски будут на третьем штырьке.

Из этого решения легко получить и количество ходов, требуемое для переноса по указанным правилам. Обозначим количество ходов для n дисков через $T(n)$. Тогда $T(1) = 1$, а из индуктивного построения следует равенство

$$T(n + 1) = 2T(n) + 1.$$

Задача 1.4. Докажите, что $T(n) = 2^n - 1$.

1.8 Задачи для самостоятельного решения

5. Докажите, что для любого целого положительного n выполняется

a) $1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$;
b) $1\cdot 2^1+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\dots+n\cdot 2^n=(n-1)\cdot 2^{n+1}+2$;
c) $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dots+\dfrac{1}{2^n}>\dfrac{n}{2}+1.$

6. Докажите равенства

a) $1\cdot(n-1)+2\cdot(n-2)+\dots+(n-1)\cdot 1=\dfrac{(n-1)n(n+1)}{6}$;

b) $\cos x+\cos 2x+\dots+\cos nx=\dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}-\dfrac{1}{2}$.

7. Докажите неравенства

a) $\sqrt{1}+\sqrt{2}+\dots+\sqrt{n}>\dfrac{2}{3}\cdot n\sqrt{n}$;

b) $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2n-1}{2n}<\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

8. Докажите, что 1 можно представить в виде суммы 2014 различных обыкновенных дробей с числителем 1 и положительным знаменателем.

9. В зачете участвовало несколько студентов и преподавателей. Известно, что в комнату, где происходил зачет, каждый участник зачета вошел лишь однажды и что каждый преподаватель поговорил с каждым студентом. Докажите, что в какой-то момент зачета в комнате присутствовали либо все студенты (и, может быть, кто-то из преподавателей), либо все преподаватели (и, может быть, кто-то из студентов).

10. В прямоугольнике $3\times n$ стоят фишки трех цветов, по n штук каждого цвета. Докажите, что можно переставить фишки в каждой строке так, чтобы в каждом столбце были фишки всех цветов.

11. Из целых чисел от 1 до $2n$ выбрано $n+1$ число. Докажите, что среди выбранных чисел найдутся два, одно из которых делится на другое.

12. На доске написаны сто цифр — нули и единицы (в любой комбинации). Разрешается выполнять два действия:

1. заменять первую цифру (нуль на единицу и наоборот);

2. заменять цифру, стоящую после первой единицы.

Докажите, что после нескольких таких замен можно получить любую комбинацию из 100 нулей и единиц.

13. На краю пустыни имеется большой запас бензина и машина, которая при полной заправке может проехать 50 километров. Имеются (в неограниченном количестве) канистры, в которые можно сливать бензин из бензобака машины и оставлять на хранение (в любой точке пустыни). Доказать, что машина может проехать любое расстояние. (Канистры с бензином возить не разрешается, пустые можно возить в любом количестве.)

14. На кольцевой дороге стоит некоторое количество одинаковых автомобилей. Суммарное количество бензина в их бензобаках достаточно, чтобы один автомобиль мог совершить полный круг. Докажите, что найдется автомобиль, который, начав двигаться против часовой стрелки и забирая бензин по ходу движения у стоящих на дороге автомобилей, сможет совершить полный круг.

15. a) Докажите, что любой квадрат $2^n \times 2^n$, из которого вырезана угловая клетка, можно разрезать на уголки из трех клеток.

b) Докажите, что на уголки можно разрезать любой квадрат $2^n \times 2^n$, из которого вырезана любая (не обязательно угловая) клетка.

16*. Целые положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ таковы, что $a_k \leqslant k$ и сумма всех этих чисел четна и равна $2S$. Докажите, что эти числа можно разбить на две группы, сумма по каждой из которых равна S.

17*. Лабиринтом называется клетчатый квадрат 10×10, некоторые пары соседних узлов в котором соединены отрезком — «стеной» — таким образом, что переходя из клетки в соседнюю по стороне клетку и не проходя через стены, можно посетить все клетки квадрата. Границу квадрата будем также считать обнесенной стеной. В некоторой клетке некоторого лабиринта стоит робот. Он понимает 4 команды — Л, П, В, Н, по которым соответственно идет влево, вправо, вверх и вниз, а если перед ним «стена», то стоит на месте. Как написать программу для робота, выполняя которую он обойдет все клетки независимо от лабиринта и от своего начального положения?