Лекция 12

Комбинаторные игры

Игры, в которые играют люди, многочисленны и разнообразны. Мы здесь будем обсуждать только такие игры, в которых игра делится на ходы, игроки ходят по очереди и знают всю информацию о состоянии игры, правила точно указывают возможности игроков и правило определения выигрыша. К играм такого типа относятся крестики-нолики, шашки, шахматы, го и многие другие. А карточные игры, такие как преферанс и бридж, не относятся к этому классу игр: в них игрокам известна не вся информация о состоянии игры (раскладе карт).

Интересовать нас будет вопрос «кто выигрывает в игре?» и те игры, про которые есть надежда получить ответ на этот вопрос (поэтому го и шахматы мы разбирать не будем). Даже точная формулировка такого вопроса неочевидна.

Мы дадим в этой главе все необходимые формулировки и приведём примеры игр, для которых ответ на такой вопрос удаётся получить. В лекции **??** игры будут применены при анализе трудности алгоритмов (так называемый «метод противника»).

12.1 Позиции

Начнём с примеров.

Пример 12.1 (игра в монетницу)**.** Игроки по очереди кладут монеты в монетницу, которая вмещает самое большее 20 монет. Игроки ходят по очереди. Мы их будем называть в порядке вступления в игру: первым ходит Первый игрок, вторым — Второй. На каждом ходе можно положить 2 или 3 монеты. Тот, кто не может сделать ход (потому что в монетнице уже 20 монет), — проиграл.

Как видим, правила игры определяют точно, какие ходы в игре возможны, и кто является победителем, когда игра закончилась. А она рано или поздно закончится: ведь на каждом ходе в монетнице увеличивается количество монет.

Игра эта довольно простая для анализа. Игрок, который ходит вторым, может обеспечить себе выигрыш, если будет действовать по следующему простому правилу: на каждом ходе он должен делать количество монет кратным 5: если Первый положил 2 монеты, то Второй по этоум правилу кладёт 3 монеты и наоборот.

После каждой пары ходов количество монет увеличивается на 5. Значит, после 8 ходов оно станет равным 20, а очередь хода будет за Первым. Поскольку больше монет уже не положить, Первый проигрывает.

Задача 12.2. Проанализируйте вариант игры с монетницей, в котором ирокам разрешено класть 3 или 4 монеты.

Пример 12.3 (Игра «штриховка»)**.** Игровое поле: полоска бумаги, расчерченная на квадратики. Игроки ходят по очереди. Как и раньше, мы их будем называть Первым и Вторым в порядке вступления в игру. На каждом ходе игрок может заштриховать какую-то часть ещё не заштрихованных квадратиков, причём хотя бы один квадратик нужно заштриховать. Проигрывает тот игрок, который не может сделать ход (заштриховать хотя бы один квадратик).

Если квадратик всего один, то анализ игры вполне очевиден. Первый игрок делает единственно возможный ход, а Второй уже не может сделать ход. Игру всегда выигрывает Первый.

Но если квадратиков больше, анализ игры немногим сложнее. Если Первый заштрихует все квадратики, то Второй уже не сможет сделать ход. Итак, всегда выигрывает Первый.[1]

Выделим то общее, что есть в рассмотренных примерах. Два игрока ходят по очереди. Каждый ход изменяет *позицию* игры. Позиция игры определяет все возможности дальнейшего течения игры и её результата. Поэтому в позицию нужно включать и указание того игрока, чей ход в этой позиции. В первом примере позициями были состояния монетницы. Поэтому в ней всего $2 \cdot 21 = 42$ позиции.

Во втором примере, если исходных квадратиков было n, то количество равно $2(n+1)$, поскольку для игры важно лишь количество незаштрихованных к данному ходу квадратиков.

Обратите внимание, что мы считаем позициями игры всё, что соответствует описанию игры. Некоторые позиции могут оказаться недостижимыми из начальной. Скажем, в игре в монетницу 1 монета в монетнице невозможна.

В общем случае в определении игры нужно указать множество позиций. Мы будем ограничиваться только такими играми, в которых это множество конечно. Одна из позиций объявляется *начальной*: эта та позиция, в которой игра начинается.

Некоторые позиции в игре являются *заключительными*: в этих позициях игра заканчивается. Для заключительных позиций определяется *результат игры*: какой из игроков выиграл, для некоторых игр — сколько именно выиграл, в некоторых играх возможны ничейные исходы. Для единообразия мы будем считать, что результат игры всегда является числом. Для игр на выигрыш (как в рассмотренных примерах), будем считать, что выигрыш одного игрока обозначается числом $+1$, а второго — числом -1. Ничьей, если она возможна, будем сопоставлять результат 0.

[1] Сделаем уточнение. Как уже не раз бывало, полезно рассмотреть вырожденный случай игры — с 0 квадратиков. Тогда уже Первый не может сделать ход и проигрывает.

Замечание 12.1. Мы здесь рассматриваем только *антагонистические игры*. В таких играх выигрыш одного игрока противоположен выигрышу другого.

Естественным образом возникают и неантагонистические игры. В таких играх заключительная позиция определяет результат для каждого из игроков, и эти результаты не обязательно противоположны.

Замечание 12.2. Иногда понять, что является позицией в игре, не так уж легко. Скажем, в шахматах помимо расположения фигур и очерёдности хода в позиции нужно указывать, какие ходы в ней возможны (рокировка не всегда возможна при одном и том же расположении фигур), встречалась ли раньше эта позиция (троекратное повторение позиции — это ничья), и сколько ходов было сделано без взятия фигур и ходов пешек (см. правило 50 ходов в шахматном кодексе).

Для каждой позиции правила игры определяют *возможные ходы* игроков. Ход состоит в переходе к новой позиции. Поэтому ходы игрока можно задать ориентированным графом на множестве позиций: каждое ребро такого графа указывает на возможное по правилам игры изменение позиции при ходе данного игрока. (Напомним, что мы договорились включать в позицию очерёдность хода).

В рассмотренных выше примерах (и во многих других играх) возможные ходы были одинаковы для каждого из игроков в каждой позиции, если не учитывать очерёдность хода. Такие игры называются *беспристрастными*. Крестики-нолики, шашки, шахматы и го являются примерами пристрастных игр.

Для беспристрастных игр удобно считать позиции, не учитывая очерёдность хода. Далее мы так и будем делать при анализе конкретных игр, всякий раз уточняя это отступление от общего определения.

Бывают игры, в которых результат выражается числом.

Пример 12.4 (игра в монетницу «на интерес»)**.** Рассмотрим ещё один вариант игры в монетницу. Теперь игрок на каждом ходе обязательно использует 3 монеты. Если он кладёт в монетницу 2 монеты, то третью отдаёт противнику.

Игра заканчивается, когда в монетнице набралось 20 монет. Сделавший последний ход забирает все монеты из монетницы.

Результатом такой игры естественно считать прибавление монет у одного игрока (оно в точности равно убавлению монет у другого). Для определённости считаем прибавление монет у того, кто ходит первым.

Как мы видели, есть правило игры для второго, при котором он делает последний ход и забирает всю монетницу. Однако результат в новой игре пока не определён: он зависит от ходов первого игрока. Легко видеть, что если второй игрок придерживается указанного выше правила, то первый игрок может обеспечить себе 4 монеты, делая каждый раз ход в 3 монеты. Общий результат в такой игре: -8 (первый получает 4 монеты и теряет $4 \cdot 3 = 12$).

Является ли этот результат оптимальным? Мы ещё вернёмся к этому вопросу. Попробуйте сейчас ответить на него самостоятельно.

Задача 12.5. Опишите множество позиций для игры в монетницу «на интерес». Является ли эта игра беспристрастной?

Завершим раздел формальным определением игры, которому будут удовлетворять (после некоторых уточнений) все интересующие нас игры.

Определение 12.1. (Конечная) *комбинаторная игра* двух игроков, назовём их Макс (M) и Мин (m), задаётся

- (Конечным) множеством позиций S, разбитым на два непересекающихся подмножества S_M и S_m (в позициях из первого множества ходит Макс, в позициях второго — Мин);
- множеством ходов игроков в каждой позиции, то есть ориентированным графом (S, E);
- начальной позицией $s_0 \in S$;
- множеством заключительных позиций $S_f \subseteq S$;
- функцией выигрыша $v\colon S_f \to \mathbb{R}$, которая определяет результат игры в заключительных позициях.

Замечание 12.3. Данное определение не запрещает одному из игроков сделать несколько ходов подряд. Впрочем, возможность делать несколько ходов подряд не очень существенна. Всегда можно объединить несколько ходов в один и перейти к играм, в которых игроки ходят строго по очереди).

Задача 12.6. Составьте граф игры в монетницу.

12.2 Стратегии

Теперь вернёмся к вопросу «кто выигрывает в игре?» и точно сформулируем его смысл. Весь данный раздел состоит по существу из одного длинного определения, разбитого на части для удобства.

Из определения игры известен результат игры в заключительных позициях. Следующим шагом определим результат игры в *партии*.

Определение 12.2. Партия игры: это такая последовательность позиций игры $s_0, \dots, s_n$, что

- s_0 — начальная позиция;
- s_n — заключительная позиция игры, а все предыдущие не являются заключительными;
- для всех $0 \leqslant i < n$ в графе возможных ходов (S, E) есть ребро (s_i, s_{i+1}).

  Результатом партии является функция выигрыша $v(s_n)$ от заключительной позиции в партии.

Другими словами, партия — это ориентированный маршрут из начальной позиции в одну из заключительных, не проходящий через заключительные позиции.

Аналогично можно определить и бесконечную партию: это бесконечный маршрут в графе игры, не проходящий через заключительную позицию. Результат такой партии не определён.[2]

Бесконечные партии возможны и в играх с конечным числом позиций. Скажем, если в беспристрастной игре есть ориентированный цикл, достижимый из начальной позиции, игроки могут перейти в позицию на этом цикле и двигаться по нему бесконечно долго.

Мы далее предполагаем всюду, что граф игры является не только конечным, но и ациклическим, т.е. в нём отсутствуют ориентированные циклы. На таком графе бесконечные партии невозможны.

Партий игры много и результаты в них, как правило, разные. Чтобы анализировать игры, нужно ввести следующее важное понятие.

Определение 12.3. *Стратегия* игрока — это функция α, которая ставит в соответствие позиции s_k один из возможных ходов игрока в позиции s_k, т.е. следующую позицию игры.

Говорят, что в партии $s_0, \dots, s_n$ игрок *придерживается стратегии* α, если для тех i, в которых его очередь хода, выполняется равенство $s_{i+1} = \alpha(s_i)$.

В примере 12.1 мы называли стратегию правилом игры.

Пример 12.7. Какую именно функцию задаёт правило, сформулированное в примере 12.1? Для позиций, номера которых имеют остаток 2 или 3 при делении на 5, эта функция указывает на ход в позицию с номером, кратным 5. Для позиции 11 такая функция не определена.

Обычно требуют, чтобы стратегия была всюду определённой функцией. На самом деле, достаточно более слабого свойства: стратегия, пусть и частично определённая, должна быть *всегда применимой*. Это означает, что как бы ни играл противник, в любой возникающей позиции стратегия определена. Именно так обстоит дело с игрой в монетницу.

Замечание 12.4. Есть более общее определение стратегии, в котором ход игрока определяется не только позицией, а всей предысторией партии. Определённые нами стратегии называются в таком случае *позиционными* и являются лишь частным случаем.

Для игр, которые мы рассматриваем, разница между общими стратегиями и позиционными несущественна.

Сформулируем теперь предположение о предпочтениях игроков: Макс стремится максимизировать результат игры, а Мин — минимизировать. Поэтому качество стратегий для игроков определяется по-разному.

---

[2] Есть много способов доопределить результат для бесконечных партий. Здесь такие случаи не рассматриваются.

Определение 12.4. Стратегия α *гарантирует игроку Макс* выигрыш W, если в любой партии, в которой Макс придерживается стратегии α, результат игры **не меньше** W.

Аналогично определяем *гарантированный выигрыш для Мина*: теперь в любой партии, в которой Мин придерживается стратегии α, результат игры **не больше** W.

В примере игры в монетницу стратегия второго игрока (пусть он будет Мином) гарантировала ему выигрыш -1, т.е. просто выигрыш по сделанному нами соглашению.

После такого длинного введения мы наконец дадим ответ на вопрос, кто выигрывает в игре. Если функция выигрыша игры принимает значения ± 1 («выиграл»/ «проиграл»), то Макс выигрывает, если у него есть стратегия, гарантирующая $+1$; Мин выигрывает, если у него есть стратегия, гарантирующая -1. В этом важном частном случае говорят также о наличии *выигрышной стратегии* у одного из игроков.

Важно отметить, что в определении стратегии, гарантирующей выигрыш W, речь идёт обо всех партиях, в которых игрок придерживается данной стратегии.

Для игр с произвольной функцией выигрыша определим более общее понятие цены игры.

Определение 12.5. Число C называется *ценой игры*, если у Макса и у Мина есть стратегии, гарантирующие выигрыш C.

Если у игры есть цена, то играть в неё становится необязательно. Как бы ни играл Макс, больше C он не получит, если Мин придерживается той стратегии, которая гарантирует C. Аналогично Мин не сможет получить меньше C, если Макс придерживается той стратегии, которая гарантирует C.

Замечание 12.5. Тем не менее, в реальной жизни люди иногда играют в игры с известной ценой. Один из самых наглядных примеров: крестики-нолики. Маленькие дети во всем мире играют в эту игру, хотя хорошо известно, что её цена равна 0 (ничья).

Нас будет интересовать как раз вопрос о существовании цены игры и описании соответствующих стратегий.

12.3 Разбор с конца

Докажем, что для тех игр, которые мы рассматриваем, цена игры существует всегда. В доказательстве возникает очень полезный приём построения стратегий, который мы назовём разбором с конца. По сути это ещё один вариант рассуждения по индукции. В дальнейшем мы значительно обобщим его, см. раздел 10.6. Пока докажем лемму об ациклических графах.

Лемма 12.1. *Пусть конечный граф (S, E) ациклический, а $X \subset S$ — собственное подмножество его вершин. Тогда в графе найдётся такая вершина s, что все рёбра, начинающиеся в s, ведут в множество X.*

Доказательство. По определению собственного подмножества, среди вершин графа (S, E) найдётся не принадлежащая X вершина s_0.

Построим маршрут, начинающийся в s_0, последовательно продлевая его. Пусть уже построен маршрут $s_0, \dots, s_k$. Для вершины s_k есть две возможности: либо есть ребро (s_k, s_{k+1}), которое начинается в s_k и заканчивается вне X, либо такого ребра нет. Во втором случае построение маршрута закончено. Заметим, что последняя вершина маршрута удовлетворяет желаемому свойству: все рёбра из неё ведут в множество X.

Граф конечный, поэтому бесконечно продолжать маршрут не получится. Значит, рано или поздно маршрут закончится в вершине, удовлетворяющей желаемому свойству. □

Теорема 12.2. *Для антагонистической игры на ациклическом графе существует цена при любой функции результатов.*

Доказательство. Мы будем рассматривать не только саму игру Γ, для которой доказываем существование цены $C(\Gamma)$, но и все игры, которые получаются из неё изменением начальной позиции. Для позиции s игра Γ_s отличается от игры Γ заменой начальной позиции s_0 на s.

Идея доказательства состоит в том, что если известны цены игры для всех позиций, в которые можно пойти из данной, то цена игры определена и для данной позиции (вспомним, что при известной цене игру можно не разыгрывать, а сразу объявить результат).

Если s_f — заключительная позиция, то игра Γ_{s_f} тривиальна. Ни один из игроков не может сделать ход, а результат $v(s_f)$ определён. Ясно, что это и есть цена игры:

$$C(\Gamma_{s_f}) = v(s_f).$$

Далее можно определеить цену для позиций, из которых все ходы ведут в заключительные и т.д. Мы опишем это рассуждение подробно.

Построим функцию $C(s)$, определяя её значения итеративно. На первой итерации функция определяется для заключительных позиций $C(s) = v(s)$, где $s \in S_f = X_1$.

После i-й итерации функция определена для позиций из множества X_i. На $(i+1)$-й итерации значение функции определяется для тех позиций s, из которых все рёбра ведут в X_i.

Если в позиции s ход Макса (формально $s \in S_M$), то

$$C(s) = \max_{(s,s') \in E} C(s').$$

Если в позиции s ход Мина (формально $s \in S_m$), то

$$C(s) = \min_{(s,s') \in E} C(s').$$

Доказанная выше лемма 12.1 гарантирует, что на каждой итерации область определения функции увеличивается. Поскольку граф конечный, рано или поздно функция окажется определена для всех позиций.

Осталось доказать, что функция $C(s)$ совпадает с ценой игры $C(\Gamma_s)$. Докажем утверждение индукцией по номеру итерации, на которой значение функции становится определённым в данной позиции.

Мы уже проверили утверждение для залючительных позиций. Это база индукции.

Теперь индуктивный переход. Предположим, что для позиций из множества X_i (те позиции, в которых значение функции C определено после i итераций) утверждение справедливо: $C(s) = C(\Gamma_s)$.

Рассмотрим позицию $s \in X_{i+1}$. Пусть это позиция Макса. Тогда стратегия, гарантирующая ему выигрыш $C(s)$, состоит в том, чтобы из s пойти в ту вершину s', на которой достигается максимум $\max_{(s,s')\in E} C(s')$. В игре $\Gamma_{s'}$ Макс должен придерживаться стратегии, гарантирующей выигрыш $C(s')$.

Для Мина есть стратегия, гарантирующая $C(s')$ во всех позициях, куда может сделать ход Макс. Эта же стратегия гарантирует ему выигрыш $C(s)$ в игре Γ_s.

Аналогично разбирается случай позиции Мина. Игроки меняются местами: стратегия Мина состоит в том, чтобы сделать ход в позицию s', на которой достигается минимум $\min_{(s,s')\in E} C(s')$ и далее придерживаться стратегии, гарантирующей выигрыш $C(s')$.

У Макса есть стратегия, гарантирующая выигрыш $C(s')$ в каждой вершине s', куда может сделать ход Мин. Эта же стратегия гарантирует ему выигрыш $C(s)$ в игре Γ_s. □

Замечание 12.6. При неформальном обсуждении игр очень часто используются выражения «лучший ход в данной позиции» или «выигрышный ход в данной позиции». Разбор с конца позволяет придать этому выражению точный смысл: «лучшим» («выигрышным» при игре на выигрыш) ходом будем называть тот ход, который ведёт в позицию с той же ценой игры, что и данная.

Заметим, что при этом «выигрышный» ход может вести в позицию, в которой данный игрок проигрывает! (Если он проигрывает во всех позициях, куда может сделать ход.) Поэтому такое словоупотребление неудачно.

Пример 12.8 (Пристрастная игра в монетницу)**.** Рассмотрим вариант игры в монетницу, в котором Максу разрешается класть 2 или 3 монеты, а Мину — 1 или 4 монеты. Первый ход за Максом. У кого есть выигрышная стратегия?

Всего есть 42 позиции (число монет + очередность хода). Будем указывать не количество монет в монетнице, а количество монет, которые в монетницу ещё можно положить. Так позиция (Макс,0) означает, что ход за Максом и в монетницу уже нельзя положить ни одной монеты.

Найдём цену игры для каждой позиции. Из функции результата мы уже знаем цену игры в заключительных позициях. Запишем их в таблицу (столбцы отвечают количеству монет, строки — тому игроку, который делает ход):

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Макс	-1	-1																			
Мин	$+1$																				

Из позиции (Мин,1) Мин может сделать ровно один ход в позицию (Макс,0). Поэтому цена игры в позиции (Мин,1) равна -1 (Мин выигрывает). То же самое выполняется для позиции (Мин,2).

Из позиции (Макс, 2) Макс также может сделать единственный ход и цена этой позиции $+1$. Получаем уточнённую таблицу:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Макс	-1	-1	$+1$																		
Мин	$+1$	-1	-1																		

Для позиции (Макс, 3) есть два хода. Один ведёт в позицию (Мин,1) с ценой -1, а второй — в позицию (Мин,0) с ценой $+1$. Для определения цены игры нужно взять максимум (ход за Максом). Поэтому цена позиции (Макс, 3) равна $+1$. Продолжая этот процесс, получим следующую таблицу:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Макс	-1	-1	$+1$	$+1$	-1	$+1$	$+1$	-1	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$
Мин	$+1$	-1	-1	$+1$	-1	-1	$+1$	$+1$	-1	$+1$	$+1$	-1	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$

Из этой таблицы мы видим, что у Макса есть выигрышная стратегия для всех позиций, в которых больше 11 монет в монетнице. Поэтому есть выигрышная стратегия, которая в позиции (Макс, 20) выбирает ход 2, равно как и есть выигрышная стратегия, которая в этой позиции выбирает ход 3. С другой стороны, в позиции (Макс, 14) ход 3 приводит к позиции, в которой выигрывает Мин. Поэтому любая выигрышная стратегия должна в позиции (Макс, 14) выбирать ход 2.

Пример 12.9 (продолжение примера 12.1)**.** А каковы цены позиций в первоначальном варианте игры в монетницу? Эта игра беспристрастная, то есть множество ходов для каждого игрока одинаково. В заключительных позициях цена игры противоположна (проигрывает тот, кто не может сделать ход). Поэтому и в каждой позиции цена игры для игроков противоположна (докажите это по индукции!).

Поэтому таблицу позиций можно сократить, и указывать лишь одну строчку в ней. Однако принят немного другой способ описания цены для таких игр: указывается тот игрок, который выигрывает в данной сокращённой позиции (без очерёдности хода), Мы будем отмечать позицию буквой N, если выгрывает тот игрок, который делает ход в данной позиции, и буквой P, если выгрывает игрок, который сделал ход в данную позицию.[3]

[3]Такое обозначение выглядит не вполне понятным для русскоязычного читателя, оно используется в англоязычных книгах по играм. “N” означает “next” (игрок, делающий следующий ход), а “P” означает “previous” (игрок, который сделал предыдущий ход).

Индуктивное правило определения цены игры в данном случае также упрощается. Поскольку игроки ходят по очереди, то Первый игрок выигрывает, если у него есть ход в позицию с ценой P (после следанного хода Первый будет ходить вторым!). В противном случае выигрывает Второй игрок.

Разбором с конца нетрудно составить таблицу цены игры в монетницу. В принятых выше обозначениях получаем такую таблицу

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
P	P	N	N	N	P	P	N	N	N	P	P	N	N	N	P	P	N	N	N	P

Из этой таблицы видно, что в начальной позиции 20 выигрывает игрок, который делает ход вторым. А в позиции 19 выигрывает игрок, который делает ход первым (выигрышная стратегия сопоставляет этой позиции ход 3, так как для позиции 16 цена P).

Пример 12.10 (продолжение примера 12.4)**.** Вернёмся к игре в монетницу «на интерес». Мы уже видели, что у второго (Мина) есть стратегия, гарантирующая ему -8 (то есть выигрыш 8 монет).

Даёт ли эта стратегия цену игры? Для ответа на этот вопрос нужно понять, есть ли у Макса, который ходит первым, стратегия, гарантирующая -8.

Такая стратегия есть. Для её описания удобно использовать разметку позиций, сделанную в предыдущем примере. В позициях, которые кратны 5, Макс должен делать ход 3. В позициях, помеченных N, он должен придерживаться стратегии, гарантирующей выигрыш в обычной игре в монетницу. Стратегия Макса в остальных позициях несущественна.

Давайте оценим, какой выигрыш гарантирует данная стратегия для Макса. Если Макс оказался в N-позиции, то он заберёт в итоге монетницу. Его выигрыш при этом будет неотрицательным (дополнительно он отдаст не больше 4 монет, а получит не меньше 4: хотя бы два хода Мин сделает).

Осталлось рассмотреть только тот случай, когда Макс делает ход только в P-позициях. Глядя на таблицу, легко проверить, что партия тогда однозначно определена стратегией Макса: Макс кладёт 3 монеты, Мин кладёт 2 (и одну отдаёт Максу по правилам игры «на интерес») и т.д.

В этой партии Макс кладёт 12 монет в монетницу, но получает от Мина 4 монеты. Значит, его выигрыш равен -8.

Итак, если Макс придерживается описанной выше стратегии, то его выигрыш либо неотрицательный, либо равен -8. По определению это означает, что данная стратегия гарантирует ему выигрыш -8.

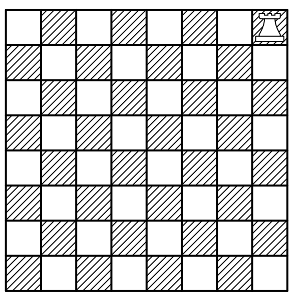
12.4 Симметричные стратегии

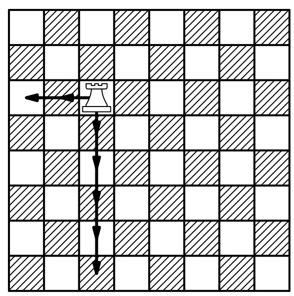
Разбор с конца требует анализа всех позиций игры. Для большинства игр это очень трудоёмкая, а иногда и непосильная задача. Скажем, теорема 12.2 гарантирует, что в шахматах есть цена.[4] То есть, либо у белых есть стратегия, гарантирующая выигрыш, либо у чёрных есть стратегия, гарантирующая выигрыш, либо у обоих игроков есть стратегии, гарантирующие ничью. Однако перебрать все шахматные позиции нереально на существующих компьютерах. Поэтому до сих пор неизвестно, какой из трёх вариантов выполняется на самом деле.

Однако доказательство существования выгрышной стратегии иногда возможно и тогда, когда разбор всех позиций игры неосуществим из-за их гигантского количества.

Одним из важных приёмов в доказательствах существования стратегий являются соображения симметрии. Приведём несколько примеров.

Пример 12.11 (Баловство с ладьёй)**.** Игровое поле: шахматная доска $n \times n$. (Настоящая шахматная доска получается при $n = 8$, но в данную игру можно играть и при других n.) На доске есть ровно одна фигура: ладья. Вначале ладья стоит в правом верхнем углу (рис. 12.1 слева). Далее игроки делают по очереди ходы. На каждом ходу игрок может сдвинуть ладью либо по горизонтали влево, либо по вертикали вниз (хотя бы на одну клетку), см. пример на рис. 12.1 в центре). Проигрывает тот, кто не может сделать ход.





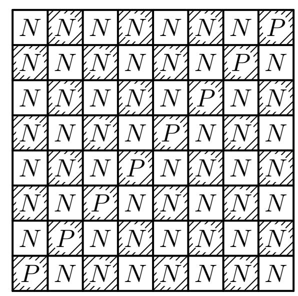


Рис. 12.1: Начальная позиция, возможные ходы и оценка позиций для баловства с ладьёй

Докажем, что позиции, в которых Первый проигрывает (P-позиции), — это диагональ из левого нижнего угла в правый верхний. Про левый нижний угол это очевидно: в этой позиции невозможно сделать ход. Стратегия Второго в остальных случаях — восстанавливать симметрию. Если Первый сделал ход, уводящий с диагонали, Второй на своём ходе может вернуть ладью на диагональ.

Если же исходное положение ладьи не на диагонали, то выигрывает Первый (N-позиция). Стратегия состоит в том, чтобы первым ходом перевести ладью на диагональ, а дальше следовать описанной выше симметричной стратегии Второго.

Пример 12.12 (монеты на стол)**.** В этой игре есть круглый стол и два игрока с неограниченным запасом одинаковых круглых монет. Игроки по очереди кладут

[4] Возможность применения к шахматам теоремы 12.2 неочевидна. Если вы знаете шахматные правила, попробуйте точно сформулировать, что считать шахматными позициями, если хотеть получить конечный ациклический граф позиций.

монеты на стол так, чтобы монета полностью помещалась на столе и не накрывала уже положенные монеты. Выигрывает тот, кто положил последнюю монету.[5]

Это пример беспристрастной игры и выигрывает в ней тот, кто ходит первым. Выигрышная стратегия первым ходом помещает монету в центр стола (рис. 12.2 слева). На каждом следующем ходу Первый кладёт монету центрально-симметрично последнему ходу противника (пример на рис. 12.2 в центре).

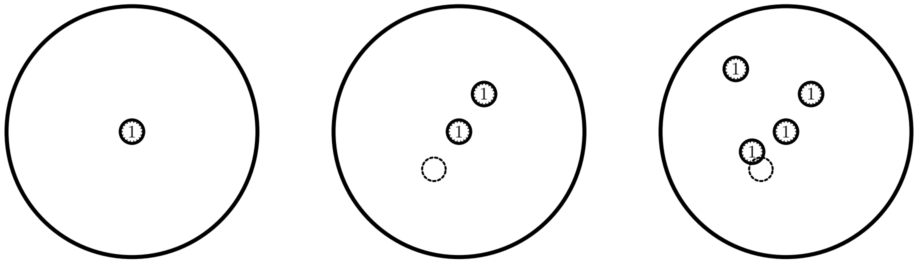


Рис. 12.2:

Обратите внимание, что эта стратегия не всюду определена: возможны позиции, в которых центрально-симметричный ход сделать невозможно, см. рис. 12.2 справа. Однако она всегда применима. После первого хода для свободной области доски выполняется такое свойство: если в какое-то место можно положить монету, то её можно положить в центрально-симметричное. Если Первый следует описанной выше стратегии, то это свойство сохраняется после каждого хода.

Симметричная стратегия Первого гарантирует, что он всегда может сделать ход и потому не может проиграть. Значит, проигрывает Второй.

Пример 12.13 (гекс)**.** Игра «гекс» происходит на доске 11×11, составленной из правильных 6-угольников, см. рис. 12.3. Играют два игрока: Синий и Красный. Левая и правая стороны доски принадлежат Синему, а верхняя и нижняя — Красному (см. рис.).

Игроки ходят по очереди, наичнает Красный.

На каждом ходе игрок ставит на одно из свободных 6-угольных полей фишку своего цвета. Игрок выигрывает, если на доске возникает путь цвета этого игрока, соединяющий его стороны (пример см. на рис. 12.4).

В гексе не бывает ничьей: если есть синий путь, соединяющий синие стороны как на рисунке, то заведомо нет красного пути, соединяющего красные стороны (докажите это утверждение!).

Поэтому из теоремы 12.2 заключаем, что у одного из игроков есть выигрышная стратегия. Более того, этот игрок— Красный.

Это следует из симметрии доски. При отражении относительно диагонали синие и красные стороны меняются местами.

---

[5] В этой игре множество позиций бесконечно, так как для положений монет есть бесконечно много вариантов. Однако любая партия в этой игре конечна. Докажите, что в таком случае теорема 12.2 также справедлива.

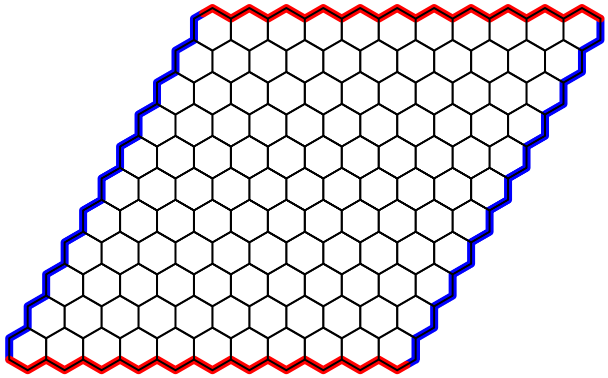


Рис. 12.3: Поле для игры в гекс

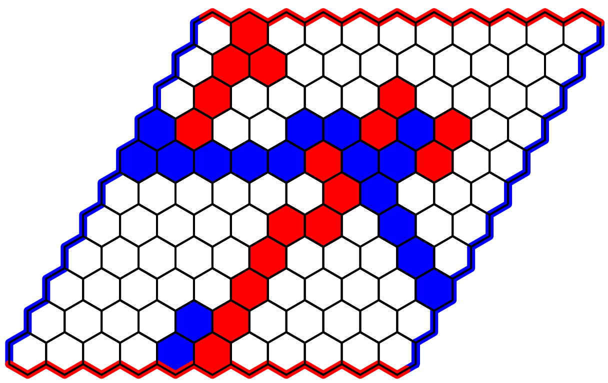


Рис. 12.4: Выигрыш Синего

Докажем от противного существование выигрышной стратегии для Красного. Предположим, что выигрышная стратегия α есть у Синего. Рассмотрим такую стратегию для Красного: сделать первый ход произвольно, а на каждом следующем ходе играть по стратегии α, гарантирующей выигрыш Синего с точностью до симметрии (то есть отражать позицию на доске, меняя красные фишки на синие и наоборот, выбирать ход по стратегии α за Синего и делать ход в симметричную позицию). Может оказаться так, что поле, на которое нужно сделать ход по данному правилу, уже занято. Тогда Красный делает ход на любое свободное поле.

В этом описании есть неточность. Позиция при ходе Красного содержит одинаковое количество красных и синих фишек, а при ходе Синего красных фишек на одну больше. Поэтому Красный мысленно удаляет с поля одну из своих фишек и только после этого выбирает ход, симметричный ходу по стратегии α как описано выше.

Почему это выигрышная стратегия? Предположим, что партия, в которой Красный придерживался симметричной α стратегии, закончилась проигрышем Красного. Последний ход Синего создал синий путь между синими сторонами. Но это означает, что в симметричной позиции у Красного был ход, создающий красный путь между красными сторонами, что невозможно по предположению о том, что α — выигрышная стратегия для Синего.

Гекс интересен тем, что хотя цена игры известна, играть в неё достаточно интересно. Доказательство от противного не даёт никакого намёка на то, как играть Красному в реальной партии.

12.5 Ним

Игра «ним» — ещё один пример беспристрастной игры. Имеется два игрока и три кучки камней. За один ход игрок может взять из какой-то кучки любое количество камней (хотя бы один нужно взять). Проигрывает тот игрок, который не может сделать ход.

Из такого описания видно, что (сокращённая) позиция в игре ним — это три натуральных числа. Причём позиция $(0, 0, 0)$ по определению проигрышная для первого игрока и выигрышная для второго (мы, как и выше, нумеруем игроков в том порядке, в каком они вступают в игру). В принятых нами обозначениях это P-позиция. Про остальные позиции нужно выяснить, кто в них выигрывает (напомним, что более точно говорить «имеет выигрышную стратегию»).

Часть случаев мы уже фактически разобрали раньше.

Позиции $(n, 0, 0)$ — это по сути позиции игры в штриховку (пример 12.3). Число n означает количество незаштрихованных квадратиков. Поэтому при $n > 0$ такие позиции выигрышны для Первого (N-позиции).

Позиции $(n, m, 0)$ — это позиции игры «баловство с ладьёй» (пример 12.11). Числа (n, m) — это попросту координаты ладьи при стандартном понимании координат (начало — левый нижний угол, координаты возрастают слева направо и снизу вверх).

Поэтому при $n \neq m$ позиции $(n, m, 0)$ являются N-позициями, а при $n = m$ являются P-позициями.

Отсюда также следует, что позиции (n, m, m) также выигрышны для Первого: своим первым ходом он забирает n камней из первой кучки и получается P-позиция $(0, m, m)$.[6]

Разбором с конца легко проверить, что позиция $(1, 2, 3)$ является P-позицией (выигрышна для Второго).

Задача 12.14. Проведите полностью разбор с конца для позиции $(1, 2, 3)$.

Но тогда позиции $(k, 2, 3)$, где $k \neq 1$; $(k, 1, 3)$, где $k \neq 2$; $(k, 1, 2)$, где $k \neq 3$, являются N-позициями.

Если $k > 3$, то из каждой такой позиции Первый может перейти в позицию $(1, 2, 3)$ и далее следовать выигрышной стратегии Второго для этой позиции.

[6] Заметим, что порядок кучек неважен и оценка игры в позиции не изменяется при перестановке кучек.

Задача 12.15. Докажите это утверждение при остальных значениях k.

Разбор с конца можно продолжать и расширять список позиций, для которых известна оценка игры. Прежде чем читать далее, попробуйте сделать такой разбор ещё для нескольких типов позиций и угадать общий ответ. Это не так легко сделать — ответ весьма неожиданный!

Пусть мы анализируем позицию (x, y, z). Запишем числа x, y, z в двоичной системе, начиная с младших битов:

$$x = x_0 x_1 x_2 \dots,$$
$$y = y_0 y_1 y_2 \dots,$$
$$z = z_0 z_1 z_2 \dots.$$

Сложим биты в каждом столбце по модулю 2, получим двоичную запись

$$a_0 a_1 a_2 \dots$$

Оказывается, у Первого игрока есть выигрышная стратегия тогда и только тогда, когда последовательность a_i содержит хотя бы одну 1.

Пример 12.16. Оценим ним в позиции $(1, 2, 3)$. Двоичная запись даёт

$$1 = 10,$$
$$2 = 01,$$
$$3 = 11.$$

Поразрядная сумма по модулю 2 этих последовательностей равна 00. Значит, это P-позиция, как и утверждалось выше.

Пример 12.17. Оценим ним в позиции $(5, 15, 26)$. Двоичная запись даёт

$$5 = 10100,$$
$$15 = 11110,$$
$$30 = 01011.$$

Поразрядная сумма по модулю 2 этих последовательностей равна 00001. Сформулированное правило утверждает, что Первый выигрывает. Пока неясно, в чём состоит его стратегия.

На самом деле, если поверить в справедливость правила, то стратегия Первого на первом ходе ясна: нужно перейти в позицию, где среди поразрядных сумм нет единиц, — в такой позиции делающий первый ход проигрывает. Такой ход есть: нужно из 30 камней забрать 16. Получится позиция $(5, 15, 14)$.

Но почему эти позиции проигрышны для Первого? Опять-таки, если верить правилу, то на каждый ход Первого Второй должен ответить так, чтобы вернуться в позицию, в которой все порязрядные суммы чётные. Для каждой конкретной позиции это можно проверить перебором вариантов. Но, видимо, пора переходить к общему доказательству.

Общее доказательство происходит индукцией по числу камней во всех кучках. База индукции: 0 камней, поразрядная сумма нулевая.

Теперь предположим, что для всех позиций с количеством камней $< N$ корректность правила оценки позиции доказана. Рассмотрим позицию с N камнями. Учитывая правило оценки, удобно представлять эту позицию как таблицу из трёх строк и какого-то количества столбцов. Таблица заполнена нулями и единицами.

Ход состоит в том, что в одной из строк часть нулей заменяется на единицы и наоброт. Конечно, нужно позаботиться, чтобы число, представленное новым набором нулей и единиц было меньше числа, представленного исходным набором нулей и единиц. Для определённости мы считаем, как и в примерах выше, что старшинство разрядов идёт по столбцам слева направо.

Нужно доказать два утверждения:

(I) если в таблице есть столбец с нечётным числом единиц, то можно сделать ход, который приведёт в таблицу, каждый столбец которой содержит чётное число единиц;

(II) если в таблице все столбцы содержат чётное количество единиц, то любой допустимый ход приводит в таблицу, в которой есть столбец с нечётным числом единиц.

Доказательство (I). Возьмём самый правый столбец, в котором нечётное количество единиц (а значит, хотя бы одна единица есть). Выберем строку, в которой в выбранном столбце стоит 1. Ход делаем в этой строке. Заменим единицу в выбранном столбце на 0. Во всех предыдущих столбцах действуем по следующему правилу: если в столбце чётное количество единиц, то ничего не меняем, а если нечётное — инвертируем бит в данном столбце. После этих действий в каждом столбце будет чётное число единиц. Но нужно проверить, что такие изменения отвечают допустимому ходу. Для этого вспомним, что числа сравниваются в двоичной записи от старших разрядов к младшим. Мы изменили в каком-то разряде (столбце) 1 на 0, а далее все изменения происходили в разрядах, которые младше (левее). Поэтому полученная двоичная запись будет давать число, меньшее исходного.

Пример 12.18. Пусть дана таблица

0	1	1	0	1	1	1	0	1	число 374
1	0	1	1	0	0	0	1	0	число 141
1	0	1	0	1	1	0	1	0	число 181

Сделав ход по указанному правилу, получим таблицу

0	0	0	1	1	1	0	0	0	число 56
1	0	1	1	0	0	0	1	0	число 141
1	0	1	0	1	1	0	1	0	число 181

Задача 12.19. Придумайте таблицу, в которой ход по указанному правилу изменяет количество камней на 1.

Доказательство (II). Сейчас мы предполагаем, что в каждом столбце таблицы чётное количество единиц. Допустимый ход уменьшает количество камней. Поэтому в каком-то разряде (столбце) 1 заменилась на 0. После такого хода в этом столбце чётность числа единиц изменится.

12.6 Сумма игр и функция Шпрага–Гранди

Правило для игры в ним согласуется с играми, в которых одна или две кучки камней. Оказывается, можно утверждать и больше: это правило допускает обобщение на произвольное количество кучек. Более того, оно применимо в более общей ситуации.

Мы будем рассматривать беспристрастные игры, в которых выигрывает сделавший последний ход, а граф позиций ациклический (то есть невозможны бесконечные партии). Ним с произвольным количеством кучек камней является примером такой игры.

Оценка позиции игры принимает два значения N или P: выигрышная стратегия есть либо у Первого, либо у Второго. Но оказывается осмысленным приписать позициям не двоичное значение «N-P», а натуральное число. При этом значение 0 будет означать наличие выигрышной стратегии у Второго (P-позиция), а положительное значение — наличие выигрышной стратегии у Первого (N-позиция). Смысл этих чисел примерно такой: любая беспристрастная игра «похожа» на ним с одной кучкой камней; а число, приписанное позиции, — количество камней в этой виртуальной кучке.

Правило приписывания чисел позициям обобщает разбор случаев с конца. Позициям, из которых нельзя сделать хода, приписываем значение 0 (в них Первый проигрывает). Пусть теперь части позиций (не всем) уже приписаны числа. По лемме 12.1 должна найтись позиция x, из которой все ходы ведут в позиции, которым уже приписаны номера Пусть ходы ведут в позиции y_1, y_2, …, которым приписаны номера v_1, v_2, … Тогда позиции x припишем номер

$$v_x = \text{mex}(v_1, v_2, \dots),$$

где значение функции mex равно наименьшему натуральному числу, которое не встречается среди её аргументов.

Пример 12.20. $\text{mex}(0, 2, 3) = 1$; $\text{mex}(0, 1, 2, 10) = 3$, $\text{mex}(2, 3) = 0$.

Отсюда получаем, что если все ходы ведут в позиции с положительными номерами, то позиции x приписываем значение 0. Это как раз соответствует тому, что если из позиции все ходы ведут в N-позиции, то данная позиция является P-позицией.

Верно и обратное. Если из позиции x есть хотя бы один ход в позицию со значением 0, то $v_x > 0$. Другими словами, если есть ход в P-позицию, данная позиция является N-позицией.

Хотя порядок, в котором позиции получают значения, может быть различным, само значение позиции от этого порядка не зависит. Это можно доказать аналогично доказательству теоремы 12.2 (индукция по частичному порядку, определённому графом позиций, см. раздел 10.6).

Функция $s \mapsto v(s)$, которая сопоставляет позиции её значение, называется *функцией Шпрага–Гранди*.

Пример 12.21. Вычислим функцию Шпрага–Гранди для нима с одной кучкой. Позиции нумеруем количеством камней в кучке.

Тогда $v(0) = 0$ (это P-позиция), поэтому

$$\begin{aligned} v(1) &= \mathrm{mex}(0) = 1, \\ v(2) &= \mathrm{mex}(0,1) = 2, \\ v(3) &= \mathrm{mex}(0,1,2) = 3 \end{aligned}$$

и т.д. По индукции получаем $v(n) = n$.

Пример 12.22. Вычислим функцию Шпрага–Гранди игры в монетницу. Позиции нумеруем количеством монет в монетнице.

Тогда $v(0) = v(1) = 0$ (это заключительные позиции), далее получем

$$\begin{aligned} v(2) &= \mathrm{mex}(0,0) = 1, \\ v(3) &= \mathrm{mex}(0,0) = 1, \\ v(4) &= \mathrm{mex}(0,1) = 2, \\ v(5) &= \mathrm{mex}(1,1) = 0, \\ v(6) &= \mathrm{mex}(1,2) = 0, \\ v(7) &= \mathrm{mex}(0,2) = 1 \end{aligned}$$

и по индукции можно проверить, что далее функция Шпрага–Гранди периодична с периодом 5, т.е. $v(n+5) = v(n)$.

Функцию Шпрага–Гранди можно вычислять в некоторых случаях, выражая игру через более простые. Для этого определим *сумму игр*.

Пусть есть две игры рассматриваемого типа с множествами позиций P_1 и P_2. Суммой $P_1 \oplus P_2$ называется игра, в которой позиции — это пары позиций в первой и второй игре, а ход состоит в переходе от позиции (p_1, p_2) либо к позиции (p_1', p_2), либо к позиции (p_1, p_2'), где в первой игре возможне ход из позиции p_1 в позицию p_1', а во второй — из позиции p_2 в позицию p_2'.

Другими словами это можно объяснить так: игроки параллельно играют в игры P_1 и P_2, на каждом ходу игрок должен сделать ход в одной из игр.

Теорема 12.3. *Пусть $v_1 \colon P_1 \to \mathbb{N}$; $v_2 \colon P_1 \to \mathbb{N}$ — функции Шпрага–Гранди для игр P_1, P_2. Тогда функция Шпрага–Гранди для игры $P_1 \oplus P_2$ задается как*

$$v(p_1, p_2) = v(p_1) \oplus v(p_2),$$

где $x \oplus y$ — число, двоичная запись которого является поразрядной суммой по модулю 2 двоичных записей чисел x и y.

Задача 12.23. Проверьте, что из теоремы следует правило оценки позиций игры в ним с тремя кучками.

В доказательстве теоремы нам потребуются свойства поразрядного сложения по модулю 2.

Лемма 12.4. *1. $x \oplus y = y \oplus x$;*

2. если $a \neq a'$, то $a \oplus x \neq a' \oplus x$ для любого x;

3. если $x < a \oplus b$, то либо $x = a' \oplus b$, $a' < a$; либо $x = a \oplus b'$, $b' < b$.

Доказательство. Первое свойство очевидно из определения.

Второе свойство тоже вполне очевидно: если поразрядно прибавить к двум разным двоичным строкам одну и ту же строку, полученные суммы будут различаться в тех же самых позициях, что и исходные строки.

Теперь докажем третье свойство. В самом старшем разряде, в котором x отличается от $a \oplus b$, в двоичной записи числа x стоит 0, а в двоичной записи $a \oplus b$ стоит 1. Поэтому в двоичных записях чисел a, b в этом разряде ровно одна единица. Считаем без ограничения общности, что в этом разряде запись a содержит 1, а запись b содержит 0.

Построим число a', поместив в этот разряд 0, а в более младших разрядах поставим такие значения, чтобы выполнялось равенство $x = a' \oplus b$ (число a' однозначно задаётся этими условиями и числами x, b). По правилу сравнения чисел $a' < a$, что и требовалось. □

Доказательство теоремы 12.3. Для позиций, из которых нельзя сделать хода, утверждение теоремы очевидно, так как $0 \oplus 0 = 0$.

Теперь проверим, что число $v(p_1) \oplus v(p_2)$ отличается от всех чисел $v(p_1') \oplus v(p_2)$; $v(p_1) \oplus v(p_2')$, где из p_1 есть ход в p_1' в игре P_1, а из p_2 есть ход в p_2' в игре P_2.

По построению функции Шпрага–Гранди $v(p_1') \neq v(p_1)$; $v(p_2') \neq v(p_2)$. Поэтому достаточно применить второе свойство из леммы 12.4.

Осталось доказать, что $v(p_1) \oplus v(p_2)$ — наименьшее из чисел, которые отличаются от всех чисел $v(p_1') \oplus v(p_2)$; $v(p_1) \oplus v(p_2')$. Для этого используем третье свойство из леммы 12.4.

Пусть $k < v(p_1) \oplus v(p_2)$. Тогда по указанному свойству либо $k = v_1 \oplus v(p_2)$, $v_1 < v(p_1)$; либо $k = v(p_1) \oplus v_2$, $v_2 < v(p_2)$. В обоих случаях применяем свойство функции Шпрага–Гранди к соответствующей игре и видим, что $v_1 = v(p_1')$ либо $v_2 = v(p_2')$. Поэтому $k = v(p_1') \oplus v(p_2)$ или $k = v(p_1) \oplus v(p_2')$, причём в первом случае в первой игре есть ход из p_1 в p_1', а во втором случае во второй игре есть ход из p_2 в p_2'. □

Задача 12.24. Рассмотрим игру в три монетницы (ним с тремя кучками камней, разрешается брать 2 или 3 камня за ход). У кого из игроков есть выигрышная стратегия, если в монетницу помещается 12 монет?