

## Программа "зимнего" коллоквиума по дискретной математике(основной поток)

*В начале коллоквиума Вы получите билет, в котором будет три вопроса: вопрос на знание определений, задача, вопрос на знание доказательств. На подготовку ответа у Вас будет около часа. Коллоквиум Вы сдаете устно одному из преподавателей.*

*Оценка за коллоквиум формируется следующим образом. Вы получаете свой первый балл как только приходите на коллоквиум, еще 2 балла — за полный ответ на вопрос на знание определений, 3 балла — за правильное решение задачи, и последние 4 балла — за полный ответ на вопрос на знание доказательств.*

*По правилам НИУ ВШЭ при обнаружении факта списывания за коллоквиум ставится 0 баллов.*

# 1. Вопросы на знание определений

1. Принцип математической индукции. Примеры.
2. Правила суммы, произведения, дополнения. Конечные слова в алфавите. Перестановки, формулы для числа перестановок, Двоичные слова, подмножества конечного множества.
3. Формула включений и исключений. Примеры использования.
4. Биномиальные коэффициенты, основные свойства. Бином Ньютона.
5. Треугольник Паскаля. Рекуррентное соотношение.
6. Графы. Основные определения: ребра, вершины, степени вершин.
7. Пути и циклы в графах, основные свойства.
8. Отношение связности и компоненты связности графа.
9. Деревья. Примеры и свойства. Полные бинарные деревья.
10. Правильные раскраски графов. Формулировка критерия 2-раскрашиваемости.
11. Ориентированные графы, основные определения.
12. Компоненты сильной связности ориентированного графа.
13. Эйлеровы и гамильтоновы циклы.
14. Делимость целых чисел, основные свойства.
15. Деление целых чисел с остатком.
16. Сравнения по модулю. Основные свойства.
17. Арифметика остатков (вычетов). Обратимые остатки (вычеты).
18. Малая теорема Ферма и лемма Вильсона.
19. Функция Эйлера. Теорема Эйлера.
20. Наибольший общий делитель. Алгоритм Евклида.
21. Расширенный алгоритм Евклида нахождения решения линейного диофантова уравнения.
22. Простые числа, формулировка основной теоремы арифметики.
23. Бинарные отношения и операции над ними.

24. Свойства бинарных отношений.
25. Отношения эквивалентности.
26. Порядки — строгие и нестрогие, частичные и линейные.
27. Соответствия и функции. Образы и прообразы множеств.
28. Виды функций: инъекции, сюръекции и биекции.
29. Композиция функций, ее свойства.
30. Обратная функция, ее свойства.

## 2. Примерные задачи на понимание определений

На коллоквиуме Вам может попасться похожая по уровню задача не из этого списка.

1. Остается ли принцип математической индукции верным, если из него убрать базу? Если да, то докажите его, если нет, приведите пример.
2. Найдите количество последовательностей длины  $k$ , которые состоят из различных элементов  $n$ -элементного множества.
3. Под числом  $A$  в треугольнике Паскаля стоит число  $B$ . Может ли так случиться, что  $10A < B$ ? (Напомним, что соседние строки в треугольнике Паскаля сдвинуты так, что число в нижней строке стоит между числами в верхней строке. Поэтому строка, в которой стоит  $B$ , находится через одну от строки, в которой стоит  $A$ .)
4. Сколько есть путей по целым точкам прямой, которые начинаются в  $0$ ; заканчиваются в  $n$ ; каждый шаг направлен вправо и имеет целую положительную длину?
5. Сколько есть путей, состоящих из  $k$  шагов, которые идут по целым точкам прямой, которые начинаются в  $0$ ; заканчиваются в  $n$ ; каждый шаг направлен вправо и имеет целую положительную длину?
6. Есть ли такой неориентированный связный граф на 20 вершинах с 28 ребрами, в котором есть 6 вершин, попарно соединенных ребром?
7. Постройте дерево диаметра 8, в котором степени всех вершин не больше 3, а всего вершин 31. (Диаметр — длина наибольшего простого пути.)
8. Приведите пример дерева на 2015 вершинах, к которому нельзя добавить ребро так, чтобы получился 2-раскрашиваемый граф.
9. Приведите пример негамильтонова связного графа без шарниров и мостов.
10. В ориентированном графе на 16 вершинах исходящие и входящие степени вершин равны 1. Сколько ребер в этом графе?
11. Приведите пример ациклического ориентированного графа, к которому нельзя добавить ребро так, чтобы граф остался ациклическим.
12. Для каких  $n$  в булевом кубе размерности  $n$  есть эйлеров цикл? Для всякого такого  $n$  постройте эйлеров цикл.
13. Для каких  $n$  в булевом кубе размерности  $n$  есть гамильтонов цикл? Для всякого такого  $n$  постройте гамильтонов цикл.
14. Приведите пример таких целых чисел  $a, b, c$ , что  $\text{НОД}(ab, c) \neq \text{НОД}(a, c) \cdot \text{НОД}(b, c)$ .
15. На сколько нулей заканчивается число  $16!$  ?
16. Найдите остаток от деления  $2^{38}$  на 37.
17. Решите диофантово уравнение  $12x + 19y = 7$ .
18. Сколько есть положительных целых делителей у числа  $66^{66}$ ?
19. Пусть  $P_1$  и  $P_2$  — отношения эквивалентности. Докажите, что следующие условия равносильны:
  - (i) Если классы эквивалентности  $P_1$  и  $P_2$  пересекаются, то один из них содержится в другом.
  - (ii)  $P_1 \cup P_2$  — отношение эквивалентности.
20. Докажите, что произведение симметричных бинарных отношений симметрично тогда и только тогда, когда они коммутируют.
21. Пусть  $|A| = n$ . Найдите число связных бинарных отношений на  $A$ .
22. Частичный порядок определен на множестве  $\{a, b, c, d, e\}$  и содержит пары  $(a, b)$ ,  $(a, d)$ ,  $(c, d)$  и  $(c, e)$ . Представьте  $P$  в виде пересечения линейных порядков.

23. Частичный порядок определен на множестве  $\{a, b, c, d, e\}$  и содержит пары  $(a, b)$ ,  $(a, d)$ ,  $(c, d)$  и  $(c, e)$ . Записывается ли он с помощью функции полезности?
24. Функция  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  отображает число  $n$  в наибольший простой делитель числа  $n$ . Найдите полный прообраз  $f^{-1}(E)$ , где  $E$  — множество четных чисел.
25. Функция  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  отображает число  $n$  в наибольший простой делитель числа  $n$ . Функция  $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  отображает число  $n$  в наименьший простой делитель числа  $n$ . Верно ли, что  $g \circ f \circ g = f \circ g$ ?
26. Верно ли, что  $f: A \rightarrow A$  биекция, тогда и только тогда, когда существует  $g: A \rightarrow A$ , такая что  $f \circ g = \text{id}_A$ ?
27. Докажите, что композиция функций — функция, а композиция всюду определенных соответствий всюду определена.
28. Докажите, что композиция инъективных соответствий инъективна, а сюръективных — сюръективна.
29. Верно ли, что композиция сюръективного и инъективного отображений инъективна?
30. Сколько существует функций из  $n$ -элементного множества в  $k$ -элементное?

### 3. Вопросы на знание доказательств.

1. Вывод принципа полной математической индукции из принципа математической индукции.
2. Бином Ньютона. Формула для биномиальных коэффициентов.
3. Основные свойства треугольника Паскаля: симметричность строк, возрастание чисел в первой половине строки, формула для суммы чисел в строке, формула для знакопеременной суммы чисел в строке.
4. Число решений уравнения  $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$  в неотрицательных целых числах. (Задача Муавра.)
5. Доказательство формулы включений и исключений.
6. Формулы для суммы степеней вершин в неориентированном и в ориентированном графе.
7. Нижняя оценка числа связных компонент в неориентированном графе.
8. Доказательство критерия 2-раскрашиваемости неориентированного графа.
9. Доказательство совпадения деревьев и минимально связных графов.
10. Деревья — это в точности минимально связные графы.
11. Деревья — это в точности связные графы с  $n - 1$  ребром.
12. Деревья — это в точности графы, в которых для любых двух вершин есть ровно один простой путь с концами в этих вершинах.
13. Существование остовного дерева.
14. Равносильность свойств ориентированных графов: (1) каждая компонента сильной связности состоит из одной вершины; (2) вершины графа возможно занумеровать так, чтобы каждое ребро вело из вершины с меньшим номером в вершину с большим номером; (3) в графе нет циклов длины больше 1.
15. Критерий существования эйлера цикла в ориентированном графе.
16. Критерий Дирака существования гамильтова цикла.
17. Сравнение  $ax \equiv 1 \pmod{N}$  имеет решение тогда и только тогда, когда  $\text{НОД}(a, N) = 1$ .
18. Признаки делимости на 3, 9 и 11.
19. Малая теорема Ферма и лемма Вильсона.
20. Теорема Эйлера.

21. Корректность алгоритма Евклида и расширенного алгоритма Евклида.
22. Основная теорема арифметики.
23. Китайская теорема об остатках.
24. Мультипликативность функции Эйлера. Формула для функции Эйлера.
25. Доказательство корректности определения классов эквивалентности.
26. Критерий того, что бинарное отношение записывается с помощью функции полезности.
27. Теорема о существовании линейного порядка, содержащего данный частичный.
28. Теорема о представлении частичного порядка в виде пересечения линейных.
29. Критерий существования функции, обратной к данной. Критерий биекции в терминах обратной функции.
30. Биекции между двоичными словами, подмножествами конечного множества и характеристическими функциями.