

Программа коллоквиума по дискретной математике на пилотном потоке

В начале коллоквиума Вы получите билет, в котором будет три вопроса: вопрос на знание определений, задача, вопрос на знание доказательств. На подготовку ответа у Вас будет около часа. Коллоквиум Вы сдаете устно одному из преподавателей.

Оценка за коллоквиум формируется следующим образом. Вы получаете свой первый балл как только приходите на коллоквиум, еще 2 балла — за полный ответ на вопрос на знание определений, 3 балла — за правильное решение задачи, ну и последние 4 балла — за полный ответ на вопрос на знание доказательств.

По правилам НИУ ВШЭ при обнаружении факта списывания за коллоквиум ставится 0 баллов.

1 Вопросы на знание определений

1. Принцип математической индукции.
2. Правила суммы и произведения в комбинаторике. Задачи о подсчете путей.
3. Конечные слова в алфавите. Соответствие между двоичными словами, подмножествами множества и характеристическими функциями.
4. Треугольник Паскаля. Рекуррентное соотношение.
5. Множества, теоретико-множественные операции, их свойства.
6. Логические значения и логические связки. Задание булевых функций таблицами истинности.
7. Взаимосвязь множеств и булевой логики.
8. ДНФ. Многочлены Жегалкина.
9. Формула включений–исключений. Примеры использования.
10. Бинарные отношения, примеры.
11. Отношения эквивалентности. Классы эквивалентности.
12. Функции. Образы и прообразы множеств. Обратная функция.
13. Виды функций: инъекции, сюръекции и биекции.
14. Композиция отношений, ее свойства.
15. Определение частичного порядка. Примеры частичных порядков.
16. Изоморфизм порядков. Примеры.
17. Минимальные и максимальные элементы в частичных порядках. Наибольшие и наименьшие элементы.
18. Бесконечно убывающие цепи. Фундированные множества.
19. Принцип математической индукции для фундированных множеств.
20. Равномощные множества.
21. Счетные мощности. Свойства, примеры.
22. Множества мощности континуум. Свойства, примеры.
23. Графы. Основные определения.
24. Подграфы. Циклы и пути. Клики и независимые множества.

25. Отношение достижимости и компоненты связности графа.
26. Деревья. Примеры и свойства.
27. Полное двоичное дерево, его свойства.
28. Двудольные графы. Булев куб.
29. Основные понятия теории вероятностей. Вероятностное пространство, события. Несовместные события.
30. Связь между теорией вероятностей и перечислительной комбинаторикой.
31. Условные вероятности, независимые события. Примеры.
32. Случайная величина. Математическое ожидание случайной величины, его свойства.

2 Примерные задачи на понимание определений

На коллоквиуме Вам может попасться похожая по уровню задача не из этого списка.

1. Остается ли принцип математической индукции (на натуральных числах) верным, если из него убрать базу? Если да, то докажите его, если нет, приведите пример.
2. Для каких n и h неравенство Бернулли обращается в равенство?
3. Сколько есть двоичных слов длины n , содержащих k единиц?
4. Сколько есть путей по целым точкам прямой, которые начинаются в 0 ; заканчиваются в n ; каждый шаг направлен вправо и имеет целую положительную длину?
5. Сколько есть путей, состоящих из k шагов, которые идут по целым точкам прямой, которые начинаются в 0 ; заканчиваются в n ; каждый шаг направлен вправо и имеет целую положительную длину?
6. Существует ли такое множество A , что для любого множества X выполняется $A \times X = A$?
7. Приведите пример таких множеств A, B , для которых $A \setminus B = B \setminus A$.
8. Полна ли система связок “конъюнкции” и “дизъюнкции”?
9. Верно ли, что $f: A \rightarrow A$ биекция, тогда и только тогда, когда существует $g: A \rightarrow A$, такая что $f \circ g = id_A$?
10. Приведите пример рефлексивного и транзитивного отношения, не являющегося ни симметричным, ни антисимметричным.
11. Верно ли, что композиция отношений частичного порядка является отношением частичного порядка?
12. Приведите пример частично упорядоченного множества, не являющегося линейно упорядоченным.
13. Приведите пример частично упорядоченного множества, не являющегося фундированным.
14. Докажите, что множество непересекающихся отрезков на прямой конечно или счетно.
15. Докажите, что число слов в конечном или счётном алфавите счётно.
16. Докажите, что отношений эквивалентности на множестве натуральных чисел континуум.
17. Есть ли такой связный граф на 20 вершинах с 30 ребрами, в котором есть клика размера 6?
18. В графе степени всех вершин не меньше 2. Докажите, что в нем есть цикл.
19. Верно ли, что между любыми двумя вершинами связного графа есть простой путь?
20. Для каких n в булевом кубе размерности n есть эйлеров цикл? Для всякого такого n постройте эйлеров цикл.
21. Вероятностное пространство: последовательности (x_1, x_2, x_3, x_4) длины 4, состоящие из целых чисел в диапазоне от 1 до 6. Все исходы равновозможны. Найдите вероятность события « $x_1x_2x_3x_4$ чётно».
22. Приведите пример вероятностного пространства и таких событий A, B в этом пространстве, что $\Pr[A | B] = \frac{1}{3} \Pr[A]$.
23. Существуют ли такие события A и B , что $\Pr[A] = \Pr[B] = \Pr[A | B] = 1/2$, а $\Pr[B | A] = 1/3$?
24. О событиях A и B вероятностного пространства U известно, что $\Pr[A] = \Pr[B] = 4/5$. Могут ли при этом события $A \cup B$ и B быть независимыми?
25. Вероятностное пространство: последовательности (x_1, x_2, x_3, x_4) длины 4, состоящие из целых чисел в диапазоне от 1 до 6. Все исходы равновозможны. Найдите математическое ожидание случайной величины $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.

3 Вопрос на знание доказательств

1. Существование 2-цветной раскраски областей на плоскости.
2. Неравенство Бернулли.
3. Сумма обратных квадратов меньше 2.
4. Теорема Холла о представителях.
5. Число слов из n букв в алфавите размера k . Число списков длины k из n объектов без повторений.
6. Формула для числа k -элементных подмножеств в n -элементном множестве.
7. Бином Ньютона. Сумма биномиальных коэффициентов. Знакопеременная сумма биномиальных коэффициентов.
8. Числа Фибоначчи: определение, число последовательностей длины n из нулей и единиц без двух единиц подряд.
9. Числа Каталана: число правильных скобочных структур, рекуррентная формула.
10. Числа Каталана: формула через биномиальные коэффициенты.
11. Количество решений уравнения $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ в неотрицательных целых числах.
12. Полнота системы связок «отрицание» и «конъюнкция».
13. Формула включений–исключений.
14. Композиция функций является функцией. Композиция биекций является биекцией.
15. Критерий существования функции, обратной к данной.
16. Подмножество счетного множества конечно или счетно. Во всяком бесконечном множестве есть счетное подмножество.
17. Объединение конечного или счётного числа конечных или счётных множеств конечно или счётно.
18. Счетность множества конечных последовательностей натуральных чисел.
19. Если множество A бесконечно, а множество B конечно или счётно, то множество $A \cup B$ равно-мощно A .
20. Теорема Кантора – Бернштейна.
21. Равномощность отрезка и квадрата.
22. Несчетность множества бесконечных двоичных последовательностей.
23. Существование множеств, более мощных чем континуум.

24. Связь строгих и нестрогих частичных порядков.
25. Доказательство неизоморфности порядков $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z} + \mathbb{N}$.
26. Доказательство эквивалентности трех определений фундированных множеств.
27. Доказательство того, что достижимость в неориентированном графе является отношением эквивалентности и что всякий граф можно разбить на компоненты связности.
28. Доказательство формулы для суммы степеней вершин в графе. Оценка числа компонент связности.
29. Эквивалентность различных определений деревьев: число вершин и число ребер, минимально связные графы, графы без простых циклов, графы с единственностью простых путей.
30. Двудольные графы — это в точности графы без циклов нечетной длины.
31. Лемма о степенях вершин в ориентированных графах. Понятие сильной связности. Компоненты сильной связности.
32. Критерий существования эйлерова цикла в графе.
33. Теорема Рамсея. Верхняя оценка чисел Рамсея.
34. Оценка вероятности объединения событий. Формула включений-исключений для вероятностей.
35. Задача о беспорядках.
36. Вероятностный метод. Нижняя оценка на диагональные числа Рамсея.
37. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
38. Задача о днях рождения.
39. Неравенство Маркова.
40. Нижняя оценка на максимальное количество ребер в разрезе.
41. Асимптотика среднего биномиального коэффициента $\binom{2n}{n}$. Верхняя и нижняя оценка произвольного биномиального коэффициента $\binom{n}{k}$.