Дискретная математика **Основной поток**

Неделя 1. Индукция

1. Докажите, что для любого целого положительного n выполняется

а) $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$;

б) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n}\geqslant\frac{n}{2}+1.$

2. Докажите, что

а) $2^n>n$ для любого положительного целого n;

б) $2^n>n^2$ для всех натуральных n, начиная с 5.

3. Вершины выпуклого многоугольника раскрашены в три цвета так, что каждый цвет присутствует и никакие две соседние вершины не окрашены в один цвет. Докажите, что многоугольник можно разбить диагоналями на треугольники так, чтобы у каждого треугольника вершины были трех разных цветов.

4. Докажите, что 1 можно представить в виде суммы 2015 различных обыкновенных дробей с числителем 1 и положительным знаменателем.

5. На доске написаны сто цифр — нули и единицы (в любой комбинации). Разрешается выполнять два действия:

1) заменять первую цифру (нуль на единицу и наоборот);

2) заменять цифру, стоящую после первой единицы.

Докажите, что после нескольких таких замен можно получить любую комбинацию из 100 нулей и единиц.

6. На краю пустыни имеется большой запас бензина и машина, которая при полной заправке может проехать 50 километров. Имеются (в неограниченном количестве) канистры, в которые можно сливать бензин из бензобака машины и оставлять на хранение (в любой точке пустыни). Доказать, что машина может проехать любое расстояние. (Канистры с бензином возить не разрешается, пустые можно возить в любом количестве.)

7. а) Докажите, что любой квадрат $2^n\times 2^n$, из которого вырезана угловая клетка, можно разрезать на уголки из трех клеток.

б) Докажите, что на уголки можно разрезать любой квадрат $2^n\times 2^n$, из которого вырезана любая (не обязательно угловая) клетка.

8. В конечной последовательности из нулей и единиц разрешается заменить подпоследовательность 01 на 100. **а)** Докажите, что рано или поздно получится слово, к которому нельзя применить эту операцию. **б)** Зависит ли число операций от порядка, в котором они применяются, или только от начального слова? **в)** Разрешим теперь заменять 01 на $100\ldots00$ (единицу с произвольным числом нулей). Может ли теперь получиться бесконечная последовательность операций (начальная последовательность конечна)?

9. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — два многочлена с натуральными коэффициентами. Будем говорить, что P меньше Q, если $P(x)<Q(x)$ для всех достаточно больших x. Существует ли бесконечная последовательность многочленов $P_1,P_2,\ldots$, в которой каждый следующий меньше предыдущего?

Дискретная математика **Основной поток**

Домашнее задание 1

1. Докажите равенство

$$1 \cdot (n-1) + 2 \cdot (n-2) + \dots + (n-1) \cdot 1 = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}.$$

2. Докажите равенство

$$\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}.$$

3. Известно, что $x + 1/x$ — целое число. Докажите, что $x^n + 1/x^n$ — также целое при любом целом положительном n.

4. Докажите неравенство для всех $n > 1$

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > 13/24$$

5. Докажите неравенство

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

6. На кольцевой дороге стоит некоторое количество одинаковых автомобилей. Суммарное количество бензина в их бензобаках достаточно, чтобы один автомобиль мог совершить полный круг. Докажите, что найдется автомобиль, который, начав двигаться против часовой стрелки и забирая бензин по ходу движения у стоящих на дороге автомобилей, сможет совершить полный круг.

7. Докажите, что для каждого $n \geqslant 1$ существует число из n цифр, делящаеся на 2^n и содержащее в десятичной записи только 3 и 4.

8. Целые положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ таковы, что $a_k \leqslant k$ и сумма всех этих чисел четна и равна $2S$. Докажите, что эти числа можно разбить на две группы, сумма по каждой из которых равна S.

9. За час до открытия избирательного участка перед ним собралась очередь из 60 человек. Каждую минуту каждый мужчина, за которым стоит женщина, пропускает ее вперед. Докажите, что к открытию все женщины окажутся впереди всех мужчин.