Дискретная математика **Основной поток**

Неделя 7. Арифметика остатков — 1

1. Известно, что a, b, c, d — положительные целые числа, $ab = cd$ и a делится на c. Докажите, что d делится на b.

2. Найдите остаток при делении

а) 100^{100} на 99;

б) $\binom{15}{8}$ на 13;

в) $20^2 + 21^2 + 22^2$ на 23;

г) $\binom{32}{3}$ на 33;

д) $8^{8^{8^8}}$ на 13.

3. Сформулируйте и докажите признак делимости **а)** на 9; **б)** на 11. (В десятичной системе счисления.)

4. Постройте таблицы умножения остатков по модулю 7 и 8. Найдите **а)** все обратимые элементы и обратные к ним; **б)** все делители 0.

5. Найдите решения уравнения $45x - 37y = 25$ в целых числах.

6. Докажите, что для любого целого положительного $n \geqslant 2$ между n и $n!$ есть простое число.

7. а) Пусть p — простое число, большее 3. Докажите, что $p^2 - 1$ делится на 24. **б)** Докажите, что при любом целом a число $a^{73} - a$ делится на 2, на 3, на 5, на 7, на 13, на 19, на 37, на 73.

8. Докажите, что $(p-1)!$ дает остаток -1 по модулю p для любого простого числа p.

Дискретная математика **Основной поток**

Домашнее задание 7

1. Какие из следующих утверждений о целых числах a, b, c верны: (1) если a делится на c, а b не делится на c, то $a+b$ не делится на c; (2) если a не делится на c и b не делится на c, то $a+b$ не делится на c; (3) если a не делится на c и b не делится на c, то ab не делится на c; (4) если a делится на b и b делится на c, то ab делится на c^2? Докажите верные и приведите контрпримеры к неверным.

2. Какой остаток дает 20! при делении на

а) 2^{15};

б) 2^{19}?

3. Сколько корней имеет уравнение $x^2 \equiv 1 \pmod{2^n}$?

4. Найдите НОД$(2^{2016}-1, 2^{450}-1)$.

5. Найдите вычет, обратный к 74 по модулю 47.

6. Найдите количество решений сравнения $39x \equiv 104 \pmod{221}$.

7. Для каких n число $n^{10}-1$ делится на 22?

8. Докажите, что числитель несократимой дроби, равной $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{p-1}$, делится на p для любого простого $p>2$.