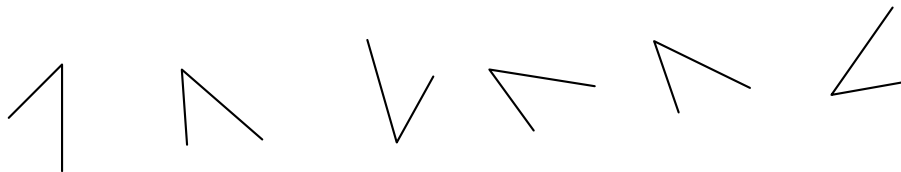


## Неделя 7. Мощность множеств-2

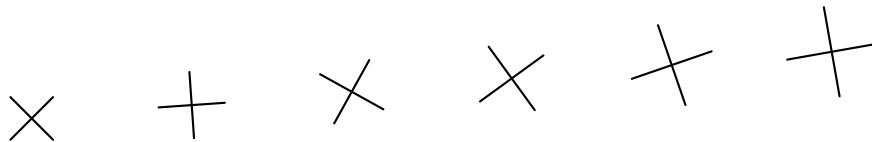
1. а) Докажите, что множество бесконечных последовательностей натуральных чисел равносильно  $\mathbb{R}$ .  
б) Докажите то же самое для множества бесконечных последовательностей рациональных чисел.
2. Верно ли, что множество прямых на плоскости имеет мощность континуум?
3. Докажите, что множество  $\mathbb{R}^k$  равносильно  $\mathbb{R}$ .
4. Докажите, что множество бесконечных последовательностей действительных чисел равносильно  $\mathbb{R}$ .
5. Счётно ли множество бесконечных двоичных последовательностей  $b_0, b_1, \dots, b_n, \dots$ , в которых  
а) каждый отрезок чётной длины  $b_i, b_{i+1}, \dots, b_{i+2k-1}$  содержит поровну нулей и единиц?  
б) каждый отрезок длины три  $b_i, b_{i+1}, b_{i+2}$  содержит хотя бы один ноль и хотя бы одну единицу?
6. Докажите, что множество непересекающихся восьмёрок на плоскости конечно или счётно. (Восьмёрка — это объединение двух касающихся внешним образом окружностей.)
7. Существует ли континуальное семейство непересекающихся континуальных подмножеств  $\mathbb{R}$ ?
8. Докажите, что множество непрерывных функций  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  имеет мощность континуум.
9. Верно ли, что множество функций  $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  имеет мощность континуум?
10. Докажите, что отношений эквивалентности на множестве натуральных чисел континуум.
11. Верно ли, что отношений эквивалентности на множестве натуральных чисел, в которых каждый класс эквивалентности конечен, тоже континуум?
12. Существует ли такое семейство подмножеств натуральных чисел, что (а) пересечение любых двух различных множеств в этом семействе конечно; (б) мощность семейства — континуум?
13. Существует ли такое семейство подмножеств натуральных чисел, что (а) среди любых двух множеств в этом семействе одно вложено в другое; (б) мощность семейства — континуум?

## Домашнее задание 7

1. На плоскости отмечено континуум (возможно пересекающихся) окружностей. Верно ли, что множество их центров имеет мощность континуум?
2. Счётно ли множество бесконечных двоичных последовательностей  $b_0, b_1, \dots, b_n, \dots$ , в которых каждое отрезок нечётной длины  $b_i, b_{i+1}, \dots, b_{i+2k}$  содержит почти поровну нулей и единиц (модуль разности равен 1)?
3. Докажите, что множество отрезков на прямой имеет мощность континуум.
4. Рассмотрим бесконечные последовательности из 0, 1 и 2, в которых сумма любых двух последовательных цифр не равна 2. Какова мощность множества таких последовательностей?
5. Верно ли, что множество невозрастающих бесконечных последовательностей натуральных чисел имеет мощность континуум?
6. Какую мощность имеет множество биекций из  $\mathbb{N}$  в  $\mathbb{Q}$ ?
7. Можно ли расположить на плоскости континуум непересекающихся равных единиц? (Единицами называются фигуры, изображенные на рисунке, то есть пары отрезков с общим концом.)



8. Крестом называется фигура, состоящая из двух диагоналей квадрата (см. рисунок). Можно ли расположить на плоскости континуум непересекающихся крестов (не обязательно одинакового размера)?



9. Верно ли, что если  $A \cup B$  континуально, то  $A$  или  $B$  континуально? (**Замечание.** Нам не известно, существуют ли множества промежуточной мощности между счетными и континуальными.)