

Неделя 8. Арифметика остатков — 2

1. Сколько положительных делителей имеет число $2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5^3$?
2. Может ли $n!$ оканчиваться ровно на 11 нулей?
3. Докажите, что для положительных x, y, z выполняются равенства

а) $\text{НОК}(x, y) = \frac{xy}{\text{НОД}(x, y)}$;

б) $\text{НОК}(x, y, z) = \frac{xyz \cdot \text{НОД}(x, y, z)}{\text{НОД}(x, y) \cdot \text{НОД}(x, z) \cdot \text{НОД}(y, z)}$;

4. а) (Лемма Вильсона) Докажите, что если n — простое, то $(n-1)! \equiv (-1) \pmod{n}$.

В следующих двух задачах рассматриваются только остатки при делении на n .

5. Докажите, что сравнение $ax \equiv b \pmod{n}$ либо имеет ровно одно решение при любом b , либо (в зависимости от b) имеет или несколько решений или ни одного.

6. Сколько решений имеет уравнение $x^2 \equiv 1 \pmod{n}$, если а) $n = 43$; б) $n = 44$; в) $n = 45$?

- г) А если n — не простое?

7. Найдите целое число, дающее

- а) Остаток 1 при делении на 3, 5 и 7;

- б) остаток 3 при делении на 11 и остаток 4 при делении на 13;

- в) остаток 4 при делении на 5, остаток 3 при делении на 11 и остаток 4 при делении на 9;

- г) остаток 1 при делении на 2, остаток 2 при делении на 3, остаток 4 при делении на 5 и остаток 6 при делении на 7.

8. Сколько делителей нуля среди остатков при делении на 2016?

9. Найдите все такие целые числа n , для которых $n^{54} - 1$ делится на 55.

10. а) Верно ли, что для всякого n существует такая арифметическая прогрессия $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, что числа $a_1, \dots, a_n$ попарно взаимно просты?

- б) Верно ли, что существует такая арифметическая прогрессия $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, что для всякого n числа $a_1, \dots, a_n$ попарно взаимно просты?

11. Любители велосипедов с фиксированной передачей (fixed gear) стараются подобрать числа зубьев на передней и задней звездочках так, чтобы их НОД был равен (или близок к) 1. Например 51-16 — классика, 52-16 — хуже, но приемлемо, 48-16 — ужас. Почему?

12. Турист встретил на горной реке водопад высотой 2 метра и написал в отчете о походе про 6-метровый водопад. Передавая новость дальше, простые люди увеличивали высоту водопада вдвое, а творческие — втрое. В результате в справочнике туристских маршрутов появился водопад высотой 864 метра. Сколько простых и сколько творческих людей "отращивали" водопад?

Домашнее задание 8

В решениях, использующих ОТА, это должно быть явно указано.

1. В конце четверти Вовочка выписал подряд в строчку свои текущие отметки по пению и поставил между некоторыми из них знак умножения. Произведение получившихся чисел оказалось равным 2007. Какая отметка выходит у Вовочки в четверти по пению? ("Колов"учительница пения не ставит.)
2. Докажите, что произведение n последовательных чисел делится на
 - а) n ;
 - б) $n!$.
3. Найдите решения уравнения $45x - 37y = 25$ в целых числах.
4. Найдите остаток при делении числа $111 \dots 111$ (69 единиц) на а) 71; б) 70.
5. Докажите, что при любом нечетном положительном n число $4^{n!} - 1$ делится на n .
6. На столе лежат книги, которые надо упаковать. Если их связать в одинаковые пачки по 4, по 5 или по 6 книг, то каждый раз останется одна лишняя книга, а если связать по 7 книг в пачку, то лишних книг не останется. Какое наименьшее количество книг может быть на столе?
7. Сколько существует целых чисел от 1 до 2310000, которые не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5, ни на 7, ни на 11?
8. Докажите, что если n взаимно-просто с 10, то существует репьюнит (число из одних единиц в десятичной записи), делящийся на n . Будет ли их бесконечно много?
9. Существует ли степень семерки, оканчивающаяся на 0001? Если да, найдите показатель одной из этих степеней.