Дискретная математика **Пилотный поток**

Неделя 8. Порядки

1. Изоморфны ли линейные порядки $\mathbb{N}+\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}$?

2. Докажите, что любые два отрезка действительных чисел изоморфны как порядки, индуцированные сравнением чисел.

3. Изоморфны ли $(0,1)$ и $\mathbb{Q}$ как порядки, индуцированные сравнением чисел?

4. Докажите изоморфизм порядков, заданных отношением сравнения чисел на множествах

$$A=\{x : x\in\mathbb{Q},\ 0<x<1\} \quad \text{и} \quad B=\{x : x\in\mathbb{Q},\ 0<x<\sqrt{2}\}.$$

5. Изоморфны ли линейные порядки $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$?

6. Является ли фундированным множество всех конечных двоичных слов с отношением лексикографического порядка?

7. Шеренга новобранцев стоит перед старшиной. Старшина командует: нале-ВО! По неопытности часть солдат поворачивается неправильно. После этого каждую секунду происходит следующее: солдаты, оказавшиеся лицом друг к другу, понимают, что произошла ошибка, и оба поворачиваются кругом. Докажите, что рано или поздно повороты прекратятся.

8. Имеется конечная последовательность нулей и единиц. За один шаг разрешается любую группу 01 заменить на $10\ldots0$ (произвольное количество нулей). Докажите, что такие шаги нельзя выполнить бесконечное количество раз.

9. Докажите, что любые два счетных плотных линейных порядка без минимального и максимального элемента изоморфны.

10. Сколько есть линейных порядков, согласованных с порядком покоординатного произведения цепи длины 2 и цепи длины n?

11. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — два многочлена с натуральными (целыми неотрицательными) коэффициентами. Будем говорить, что P меньше Q, если $P(x)<Q(x)$ для всех достаточно больших x. Существует ли бесконечная последовательность многочленов $P_1, P_2, \ldots$, в которой каждый следующий меньше предыдущего?

Дискретная математика **Пилотный поток**

Домашнее задание 8

1. Пусть $\leqslant$ — рефлексивное и транзитивное бинарное отношение (не обязательно антисимметричное). Определим отношение $\sim$ следующим правилом: $x \sim y$ тогда и только тогда, когда $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$. Докажите, что $\sim$ — отношение эквивалентности.

2. Сколько пар несравнимых элементов может быть в частичном порядке на четырёх элементах?

3. Рассмотрим два порядка: делители числа 42 (положительные целые числа, на которые 42 делится нацело) с отношением делимости ($x|y$ по определению означает, что y делится на x нацело) и подмножества множества $\{1, 2, 3\}$ с порядком по включению $x \subseteq y$. Изоморфны ли эти порядки?

4. Изоморфны ли линейные порядки $\mathbb{Z} + \mathbb{N}$ и $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$?

5. Изоморфны ли линейные порядки $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$?

6. Изоморфны ли линейные порядки $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{N} \times \mathbb{Q}$?

7. Рассмотрим множество невозрастающих бесконечных последовательностей натуральных чисел с лексикографическим порядком. Является ли это множество фундированным?

8. Рассмотрим для произвольного k множество $\mathbb{N}^k$ с отношением покоординатного порядка. Существует ли в нем бесконечное подмножество, любые два элемента которого не сравнимы?