

Неделя 9. Бинарные отношения. Отношения порядка.

Говорят, что отношение строгое, если оно антирефлексивно, и нестрогое, если оно рефлексивно. Строгим частичным порядком называется антирефлексивное антисимметричное и транзитивное отношение. Нестрогим — то же самое, но рефлексивное. Если отношение дополнительно связно (любые два элемента находятся в отношении хотя бы в одну сторону), оно называется линейным порядком. Слабый порядок — это частичный порядок, у которого дополнение транзитивно.

1. Верно ли, что если P — частичный порядок, то

а) P^{-1} ;

б) \bar{P}

также частичный порядок? Те же вопросы про линейный порядок.

2. а) Будет ли частичным порядком объединение двух частичных порядков? А пересечение? Те же вопросы про линейные порядки.

б) Уточнение. Пересечение линейных порядков будет линейным порядком, если и только если. . . (закончите и докажете).

3. Сколько пар несравнимых элементов может быть в частичном порядке на четырех элементах?

4. Бинарное отношение, определенное на множестве из 7 элементов, содержит 20 пар. Может ли оно быть линейным порядком? А частичным?

5. Докажите, что \bar{P} — нестрогий линейный порядок тогда и только тогда, когда P — строгий линейный порядок.

6. Рассмотрим на множестве студентов, слушающих этот курс порядок P по будущим оценкам за экзамен. Выберите правильный ответ: P

— обязательно линейный;

— может быть линейным, а может быть и нет;

— не может быть линейным порядком.

7. Пусть P_1, \dots, P_n — строгие линейные порядки. Пара входит в отношение P , если она принадлежит не менее, чем половине отношений P_1, \dots, P_n .

а) Пусть $n = 3$. Запишите P , используя P_1 – P_3 и операции над множествами.

Обязательно ли P будет б) линейным; в) частичным порядком?

8. Докажите, что частичный порядок будет слабым тогда и только тогда, когда он записывается с помощью функции полезности.

Домашнее задание 10

1. Профессор Рассеянный построил частичный порядок P для утреннего одевания.

очки P брюки P ремень P пиджак,

очки P рубашка P галстук P пиджак,

брюки P туфли,

очки P носки P туфли,

очки P часы.

а) Постройте линейный порядок на вещах так, чтобы исходный порядок их одевания не был нарушен.

б) Сколько всего существует таких линейных порядков?

2. Бинарное отношение P , определенное на множестве A называется ациклическим, если не существует таких $a_1, \dots, a_k \in A$, что $a_1 P a_2 P \dots P a_k P a_1$. Докажите, что любое связное и ациклическое бинарное отношение есть строгий линейный порядок.

3. В Вестеросе n городов, каждые два соединены дорогой. Дороги сходятся лишь в городах (нет перекрестков, одна дорога поднята эстакадой над другой). Злой волшебник хочет установить на всех дорогах одностороннее движение так, что если из города можно выехать, то в него нельзя вернуться. Докажите, что

а) волшебник может это сделать;

б) найдется город, из которого можно добраться до всех, и найдется город, из которого нельзя выехать;

в) существует единственный путь, обходящий все города.

г) Сколькими способами волшебник может осуществить свое намерение?

4. Бинарное отношение P называется турниром, если оно антирефлексивно, антисимметрично и связно. (Неформально — это результат кругового турнира — каждую альтернативу сравнили с каждой и запомнили результат). Докажите, что либо турнир — строгий линейный порядок, либо существуют такие альтернативы a, b, c , что $a P b$, $b P c$ и $c P a$.

5. Сколько есть порядков на n -элементном множестве, в которых ровно одна пара элементов несравнима?

6. Докажите, что любой частичный порядок, определенный на множестве из n элементов, можно представить, как пересечение не более, чем n^2 линейных порядков.

7. Пусть P — строгий частичный порядок. Отношением несравнимости I_P называется отношение, содержащие такие пары (x, y) , что ни (x, y) ни (y, x) не входят в P .

а) Выразите I_P через P с помощью теоретико-множественных операций и взятия обратного отношения.

б) Докажите, что P — слабый порядок если и только если I_P — отношение эквивалентности.

8. Теорема МакГарви. Пусть P — антирефлексивное и антисимметричное отношение. Тогда оно может быть получено из некоторых линейных порядков по правилам "классной" задачи 7. Указание: Нужно по два линейных порядка на каждую пару в отношении P .

Политологическая Формулировка. Если считать предпочтения избирателей линейными порядками и полагать, что один кандидат предпочтительнее другого, если так считает большинство избирателей, то "коллективное предпочтение" может не только не быть линейным порядком, а вообще вести себя как угодно.