

Неделя 12. Вероятность (начало).

1. Вероятностное пространство: последовательности длины 6, состоящие из целых чисел в диапазоне от 0 до 1. Все исходы равновозможны. («Шесть подбрасываний монеты») Найдите вероятность события «выпало три единицы» (то есть ровно три элемента последовательности равны 1).
2. Вероятностное пространство: последовательности (x_1, x_2) длины 2, состоящие из целых чисел в диапазоне от 1 до 6. Все исходы равновозможны. («Подбрасывания двух игральных костей») Найдите вероятность события « $x_1 + x_2 = 7$ ».
3. Вероятностное пространство: последовательности (x_1, x_2, x_3, x_4) длины 4, состоящие из целых чисел в диапазоне от 1 до 6. Все исходы равновозможны. («Подбрасывания четырёх игральных костей») Найдите вероятность события « $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ чётно».
4. **Парадокс де Мере.** Имеются 3 игральные кости. Почему число 11 в сумме выпадает чаще, чем 12, хотя оба разбиваются в сумму 6 способами: $11 = (6 + 4 + 1, 6 + 3 + 2, 5 + 5 + 1, 5 + 4 + 2, 5 + 3 + 3, 4 + 4 + 3)$, $12 = (6 + 5 + 1, 6 + 4 + 2, 6 + 3 + 3, 5 + 5 + 2, 5 + 4 + 3, 4 + 4 + 4)$?
5. Вероятностное пространство: перестановки $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ чисел от 1 до n . Все исходы равновозможны. Найдите вероятность события « $a_2 > a_1 > a_3$ ».
6. Вероятностное пространство: последовательности длины 3, состоящие из целых чисел в диапазоне от 0 до 9 (не обязательно различных). Все исходы равновозможны. Найдите вероятность события «в последовательности встречается 1».
7. Вероятностное пространство: последовательности длины 3, состоящие из различных целых чисел в диапазоне от 0 до 9. Все исходы равновозможны. Найдите вероятность события «в последовательности встречается 1».
8. Вероятностное пространство: 3-элементные подмножества множества целых чисел в диапазоне от 0 до 9. Все исходы равновозможны. Найдите вероятность события «1 входит в множество».
9. Сравните вероятности событий в предыдущих трёх задачах.
10. (матчу Карлсен-Карякин посвящается) Вероятностное пространство — упорядоченные пары полей шахматной доски. Все исходы равновозможны. Найдите вероятность события «белый и черный короли, поставленные на эти поля, образуют допустимую правилами игры позицию» (остальная доска пуста).
11. (Нет повести печальней в этом мире...) При игре в преферанс каждому из трех игроков раздают по 10 карт, а две карты кладут в прикуп. У первого в преферанс оказалось 4 козыря, а еще 4 находятся на руках у двух его противников. Какова вероятность того, что козыри лягут 4 : 0?
12. Докажите, что случайный граф на n вершинах связан.

Точная формулировка: исходы — все неориентированные графы без кратных ребер с одним и тем же множеством вершин, в котором n элементов. Все исходы равновозможны. Нужно доказать, что вероятность события «граф несвязный» стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Домашнее задание 12

Во всех задачах не на доказательство ответом должно быть число (обыкновенная дробь). В задачах, где вероятностное пространство не указано явно, решение должно начинаться с его построения.

1. Вероятностное пространство — бинарные отношения, определенные на множестве из двух элементов. Все исходы равновероятны. Найдите вероятность события «бинарное отношение транзитивно».
2. Вероятностное пространство — всюду определенные функции $f : A \rightarrow B$, A и B конечны и содержат соответственно, a и b элементов. Все исходы равновероятны. Найдите вероятность события: « f — биекция».
3. Вероятностное пространство: перестановки чисел от 1 до 37. Все исходы равновозможны. Найдите вероятность события «наибольшее среди первых 18 чисел в перестановке больше наибольшего среди последних 18 чисел».
4. Вероятностное пространство: убывающие последовательности длины 5, состоящие из различных целых чисел в диапазоне от 1 до 36 (каждое следующее число меньше предыдущего). Все исходы равновозможны. Найдите вероятность события «последовательность заканчивается на 1».
5. Вероятностное пространство: неубывающие последовательности длины 5, состоящие из целых чисел в диапазоне от 1 до 36 (каждое следующее число не меньше предыдущего). Все исходы равновозможны. Найдите вероятность события «последовательность начинается на 1».
6. Вероятностное пространство: двоичные слова длины 21. Все исходы равновозможны. Найдите вероятность события «на первых 10 позициях стоит меньше единиц, чем на последних 11».
7. Какое наименьшее число карт нужно вытянуть из колоды (36 карт, без возвращения), чтобы вероятность появления хотя бы одного туза была больше $1/2$?
8. В группе 30 студентов. Докажите, что вероятность того, что двое из них родились в один день, больше $1/2$. Можно считать, что никто из студентов не родился 29 февраля.
9. Докажите, что случайный турнир не будет линейным порядком. Точная формулировка: вероятностное пространство — турниры на множестве из n элементов. Все турниры равновероятны. Нужно доказать, что вероятность того, что турнир будет линейным порядком, стремится к 0 при $n \rightarrow \infty$.