Занятие 13. Условные вероятности и независимые события

Напоминание. Любому вычислению вероятностей должен предшествовать выбор вероятностной модели (множество исходов, вероятности исходов).

1. Будем считать, что рождение девочки и мальчика равновероятны. Известно, что в некоторой семье трое детей, причем

а) один из них — мальчик;

б) старший — мальчик.

Какова вероятность того, что в семье все мальчики?

2. Приведите примеры, в которых условная вероятность $\Pr[A \mid B]$ больше вероятности $\Pr[A]$, меньше её, а также равна ей.

3. Четыре человека А, Б, В, Г становятся в очередь в случайном порядке (все варианты равновозможны). Найдите **а)** условную вероятность того, что А первый, если Б последний; **б)** условную вероятность того, что А первый, если А не последний; **в)** условную вероятность того, что А первый, если Б не последний; **г)** условную вероятность того, что А первый, если Б стоит в очереди позже А; **д)** условную вероятность того, что А стоит в очереди раньше Б, если известно, что А раньше В.

4. Есть три внешне одинаковых мешочка. В одном лежит две золотых монеты, во втором — одна золотая и одна серебряная монета, в третьем — две серебряные.

Вы выбрали случайно и равновозможно один из мешочков и наугад достали из него монету. Она оказалась золотой. Какова вероятность, что и вторая монета в выбранном мешочке золотая?

5. Есть девять коробок и один шарик. Случайно и равновозможно выбирается коробка. Затем с вероятностью $1/2$ в неё кладётся шарик, а с вероятностью $1/2$ — нет. Найдите вероятность того, что в последней коробке шарик есть при условии, что в остальных коробках его нет.

6. Бросают кубик. Независимы ли события «выпало чётное число очков» и «выпало число очков, кратное 3»?

7. Выбирается случайная перестановка $x_1, x_2, \ldots, x_{49}$ чисел от 1 до 49 (все перестановки равновозможны). Независимы ли события

а) «$x_{24} > x_{25}$» и «$x_{25} > x_{26}$»?

б) «x_{24} больше всех последующих» и «x_{25} больше всех последующих»?

8. Пусть события A и B независимы, и вероятность события $\overline{B}$ положительна. Докажите, что события A и $\overline{B}$ независимы.

9. Пусть A и B — события положительной вероятности, отличной от 1. Докажите, что по любым трем из величин $\Pr[A \mid B]$, $\Pr[A \mid \overline{B}]$, $\Pr[B]$, $\Pr[B \mid A]$ можно найти четвертую.

Дискретная математика **Основной поток**

Домашнее задание 13

Напоминание. Любому вычислению вероятностей должен предшествовать выбор вероятностной модели (множество исходов, вероятности исходов).

1. Будем считать, что рождение девочки и мальчика равновероятны. Известно, что в некоторой семье двое детей, причем мальчик родился в понедельник. Какова вероятность того, что в семье один мальчик и одна девочка?

2. При каких натуральных n события «случайное число от 1 до n делится на 2» и «случайное число от 1 до n делится на 3» независимы?

3. В розыгрыше лото случайно выбираются 5 чисел из множества $\{1, 2 \ldots, 36\}$. Независимы ли события «среди выбранных чисел есть 2» и «среди выбранных чисел есть 3»?

4. Случайно выбирается всюду определенная функция $f\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$. Независимы ли события «f инъективна» и «$f(1) = 1$»?

5. Жюри из трех человек нужно принять одно из двух возможных решений, одно из которых правильное. Два члена жюри независимо друг от друга принимают правильное решение с вероятностью p, а третий случайно выбирает одно из двух возможных решений с равными вероятностями. Окончательное решение жюри выносится большинством голосов. Какова вероятность, что жюри примет правильное решение? (Сравните ее с вероятностью p правильного решения, принимаемого одним добросовестным членом жюри.)

6. Король предлагает узнику разложить десять белых и десять чёрных шаров по двум одинаковым коробкам (надо использовать все шары; в каждой коробке должен быть хотя бы один шар). После этого сначала король выбирает случайно одну из коробок, каждую с вероятностью $1/2$, а затем из выбранной коробки выбирает случайный шар, все с равными вероятностями. Если шар чёрный, то узника казнят, если белый — отпускают. Как нужно разложить шары, чтобы вероятность выжить была максимальной?

7. Двое игроков играют матч из 20 партий; выигрывает тот, кто первым наберёт 10 очков (за победу даётся одно очко, за проигрыш ноль, ничьих не бывает). Считая все варианты (любые комбинации из двадцати выигрышей и проигрышей) равновероятными, найдите вероятность того, что первый игрок выиграет матч, если после 15 игр счёт был $8 : 7$ в его пользу.

8. Двое играют в бой яиц. Перед ними стоит корзина с яйцами. Они наугад берут по яйцу и ударяют их носами. Разбитое яйцо выбрасывается и побеждённый берёт новое, а победитель раунда сохраняет своё яйцо для следующего раунда (предполагается, что победившее яйцо сохранило свою прочность и что исход каждого раунда зависит только от относительного качества яиц). Какова вероятность победы в $(n + 1)$-м раунде после победы во всех предыдущих?