

## Неделя 13. Вероятность-3

1. Каждый элемент  $n$ -элементного множества с вероятностью  $p$  независимо от других включается в множество  $S_p$ . Найдите математическое ожидание числа элементов в множестве  $S_p$ .
2. а) Выбирается случайное подмножество двоичных строк длины  $n$ . (Все подмножества равновероятны.) Найдите математическое ожидание суммарного числа единиц в строках этого подмножества.  
б) Тот же вопрос, но выбирается случайное подмножество, в котором ровно  $k$  строк.
3. Студент за выполнение домашней работы получает оценку от 1 до 10. Средняя оценка за серию домашних работ оказалась равной 6. Докажите, что доля работ, оценка за которые меньше 4, не превосходит  $4/7$ .

4. (Неравенство Чебышева.) Для случайной величины  $X$  обозначим  $M = E[X]$ ,  $D = E[X^2] - (E[X])^2$ . Докажите, что

$$\Pr[|X - M| \geq a] \leq \frac{D}{a^2}.$$

5. Вероятностное пространство состоит из двоичных строк длины  $n$ , все строки равновозможны. Докажите, что вероятность события «количество единиц в строке отличается от  $n/2$  не меньше, чем на  $\sqrt{n}$ » не превосходит  $1/4$ .
6. В неориентированном графе без петель и кратных ребер  $n$  вершин и  $nd/2$  рёбер (то есть средняя степень вершины равна  $d$ ),  $d \geq 1$ . Докажите, что найдется такой циклический обход вершин графа  $(v_1 v_2 \dots v_n)$ , в котором каждая вершина встречается ровно один раз и более  $d/2$  из  $n$  пар  $(v_1, v_2)$ ,  $(v_2, v_3)$ ,  $\dots$ ,  $(v_{n-1}, v_n)$ ,  $(v_n, v_1)$  являются ребрами графа.
7. По таблицам смертности, составленным в 1693 г. Э. Галлеем, средняя продолжительность жизни была 26 лет. При этом вероятность прожить не больше 8 лет была  $1/2$ . Какова была средняя продолжительность жизни тех людей, которые прожили больше 8 лет? (Укажите интервал возможных при данных условиях значений.)
8. Рассмотрим последовательность  $a_0, a_1, \dots, a_n$ , где каждое  $a_i \in \{0, 1\}^n$  – последовательность нулей и единиц длины  $n$ . Последовательность строится следующим образом. Первый член последовательности  $a_0 = (0, 0, \dots, 0)$  – последовательность из одних нулей. Каждый следующий член  $a_{i+1}$  получается из  $a_i$  заменой значения одной случайно выбранной координаты на противоположное. Рассмотрим случайную величину  $X$  – количество единиц в последовательности  $a_n$ . Найдите  $\lim_{n \rightarrow \infty} E[X]/n$ .

## Домашнее задание 13

1. В лотерее на выигрыши уходит 40% от стоимости проданных билетов. Каждый билет стоит 100 рублей. Докажите, что вероятность выиграть 5000 рублей (или больше) меньше 1%.
2. Про неотрицательную случайную величину  $X$  известно, что  $\Pr[X < 5] = 1/2$  и  $\Pr[X \geq 5] = 1/2$ . Найдите все возможные значения математического ожидания  $E[X]$ .
3. Выбирается случайно и равномерно 10 различных чисел из множества целых чисел от 0 до 29. Найдите математическое ожидание суммы этих чисел.
4. Выбирается случайное слово длины 20 в алфавите  $\{a, b\}$  (все слова равновозможны). Найдите математическое ожидание числа подслов  $ab$  в этом слове.
5. Пусть  $X$  — случайная величина. Известно, что  $E[2^X] = 5$ . Докажите, что

$$\Pr[X \geq 6] < 1/10.$$

6. Пусть  $f$  — случайная функция из  $n$ -элементного множества в  $100n$ -элементное. Докажите, что

$$\Pr[f \text{ инъективная}] \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

7. Случайный неориентированный граф на  $n$  вершинах строится следующим образом: для каждой пары различных вершин ребро между ними присутствует графе независимо от других ребер с вероятностью  $1/(100n \log n)$ . Пусть  $X_n$  — случайная величина, равная числу изолированных вершин в графе. Докажите, что  $\Pr[X_n = 0]$  стремится к нулю при  $n$  стремящемся к бесконечности.