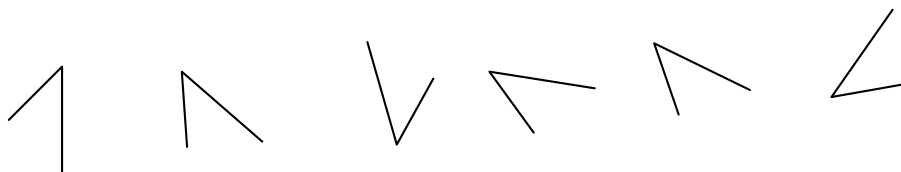


Занятие 16. Несчетные множества

1. Установите взаимнооднозначное соответствие между
 - а) окружностью радиуса 1 и окружностью радиуса $R > 0$.
 - б) окружностью и квадратом (без внутренней).
 - в) отрезком и прямой. Может ли эта биекция быть непрерывной?
 - г) интервалом $(0, 1)$ и $(0, 1) \cup \mathbb{Z}$.
 - д) кругом без границы и кругом с границей.
2. Докажите, что множество бесконечных последовательностей из 0 и 1 равномощно множеству бесконечных последовательностей, состоящих из а) 0, 1, 2, 3; б) 0, 1, 2; в) произвольных натуральных чисел.
3. Докажите, что множество \mathbb{R}^k равномощно \mathbb{R} .
4. Верно ли, что множество прямых на плоскости имеет мощность континуум?
5. Докажите, что множество интервалов на прямой имеет мощность континуум.
6. Докажите, что любое множество непересекающихся интервалов на прямой конечно или счетно.
7. Докажите, что множество бесконечных последовательностей натуральных чисел имеет мощность континуум.
8. Докажите, что множество бесконечных последовательностей действительных чисел имеет мощность континуум.
9. Счетно ли множество бесконечных двоичных последовательностей $b_0, b_1, \dots, b_n, \dots$, в которых
 - а) каждый отрезок чётной длины $b_i, b_{i+1}, \dots, b_{i+2k-1}$ содержит поровну нулей и единиц?
 - б) каждый отрезок нечётной длины $b_i, b_{i+1}, \dots, b_{i+2k}$ содержит почти поровну нулей и единиц (модуль разности равен 1)?
10. Верно ли, что множество функций $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ имеет мощность континуум?
11. Докажите, что множество непрерывных функций $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ имеет мощность континуум.
12. Докажите, что отношений эквивалентности на множестве натуральных чисел континуум.

Домашнее задание 16

1. Верно ли что множество всех кругов на плоскости имеет мощность континуум?
2. На плоскости отмечено континуум окружностей. Верно ли, что множество их центров имеет мощность континуум?
3. Существует ли континуальное семейство непересекающихся континуальных подмножеств \mathbb{R} ?
4. Верно ли, что множество бесконечных двоичных последовательностей, в которых нет трех единиц подряд, имеет мощность континуум?
5. Докажите, что множество биекций $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ имеет мощность континуум.
6. Можно ли расположить на плоскости континуум непересекающихся равных единиц? (Единицами называются фигуры, изображённые на рисунке, то есть пары отрезков с общим концом.)



7. Можно ли расположить на плоскости континуум непересекающихся восьмёрок. (Восьмёрка — это объединение двух касающихся внешним образом окружностей.)