

Занятие 17. Несчетные множества (продолжение). Логика.

1. Докажите, что множество бесконечных последовательностей действительных чисел имеет мощность континуум.
2. Докажите, что множество функций из \mathbb{R} в \mathbb{R} равномощно множеству всех подмножеств континуума. (Указание: рассмотрите множество всех соответствий между \mathbb{R} и \mathbb{R} .)
3. Верно ли, что множество функций $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ имеет мощность континуум?
4. Докажите, что множество непрерывных функций $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ имеет мощность континуум.
5. Докажите, что если квадрат разбит на два множества, то хотя бы одно из них равномощно квадрату.
6. Выразите в виде ДНФ булевы функции
 - а) $(x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_4) \wedge \dots \wedge (x_1 \vee x_9)$;
 - б) $\bigwedge_{1 \leq i < j < k \leq 5} (x_i \vee x_j \vee x_k) \wedge (\bar{x}_i \vee \bar{x}_j \vee \bar{x}_k)$
7. Найдите значение следующей булевой функции при всех значениях переменных:

$$\bigoplus_{S \neq \emptyset} \prod_{i \in S} x_i = x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 x_3 \oplus \dots$$

8. Назовем функцией голосования $\text{MAJ}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ булеву функцию, значение которой совпадает с тем значением, которое принимает большинство переменных (если нулей и единиц среди переменных поровну, то $\text{MAJ} = 0$).
 - а) Выражается ли MAJ через конъюнкцию и дизъюнкцию?
 - б) Запишите $\text{MAJ}(x, y, z)$ в виде многочлена Жегалкина.
9. Является ли полным базис $\{\vee; \rightarrow\}$ из дизъюнкции и импликации?
10. Булева функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется *самодвойственной* (или *нечётной*), если для всех x_1, \dots, x_n выполняется равенство

$$f(x_1, \dots, x_n) = \neg f(\neg x_1, \dots, \neg x_n).$$

- а) Являются ли самодвойственными функции $x_1 \vee x_2$, $x_1 \wedge x_2$?
- б) Докажите, что композиция самодвойственных функций самодвойственна. вычисляет самодвойственную функцию.

Домашнее задание 17

1. Рассмотрим бесконечные последовательности из 0, 1 и 2, в которых никакая цифра не встречается два раза подряд. Какова мощность множества таких последовательностей?
2. Докажите, что множество отношений эквивалентности на множестве натуральных чисел имеет мощность континуум.
3. Найдите мощность множества отношений эквивалентности, определенных на множестве действительных чисел.
4. Запишите ДНФ, которая равна булевой функции

$$(x_1 \vee x_2) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_2 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_3 \vee x_5) \wedge \cdots \wedge (\bar{x}_7 \vee x_9).$$

5. Докажите полноту системы связок, состоящей из одной связки *итрих Шеффера* $x \mid y = \neg(x \wedge y)$.
6. КНФ (конъюнктивной нормальной формой) называется конъюнкция дизъюнкций переменных или их отрицаний. Докажите, что любое высказывание можно выразить в виде КНФ.
7. Сколько ненулевых коэффициентов в многочлене Жегалкина, который равен $x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_n$?
8. Будет ли полной система $\{\neg, \text{MAJ}(x_1, x_2, x_3)\}$?