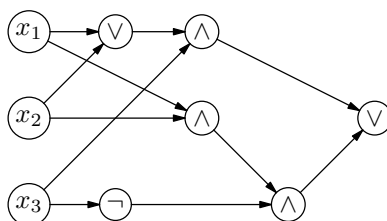


Занятие 18. Булевы схемы

1. Найдите функцию, которую вычисляет следующая схема:



2. Функция задана своими значениями в таблице истинности (в стандартном порядке): $f = (10111101)$. Постройте схему, вычисляющую эту функцию

- а) в базисе Жегалкина;
 - б) в стандартном базисе.
3. Постройте схему полиномиальной длины, сортирующую последовательность из n нулей и единиц.
4. Булева функция сравнения $L(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n)$ равна 1 тогда и только тогда, когда $(\overline{x_1, \dots, x_n})_2 < (\overline{y_1, \dots, y_n})_2$. Постройте схему размера $O(n)$, которая вычисляет $L(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n)$.
5. Постройте схему размера $O(n)$ для вычитания n -битовых целых чисел.
6. Пусть $n = k + 2^k$. Указательная функция $f(x_1, \dots, x_k, y_0, \dots, y_{2^k-1})$ равна y_x , где x — число, двоичная запись которого $x_1 \dots x_k$. Постройте схему полиномиального размера для указательной функции.
7. а) Постройте схему полиномиального размера, вычисляющую функцию MAJ_n .
- б) Тот же вопрос, но в базисе из дизъюнкции и конъюнкции, т.е. не использующую отрицаний.
8. Докажите, что схема, использующая только монотонные функции, вычисляет монотонную функцию.
9. Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — немонотонная функция. Докажите, что $\neg x_i$ вычисляется в базисе $\{0, 1, f\}$.
10. Докажите, что всякую булеву схему размера s с n переменными можно переделать в булеву схему, в которой все отрицания применяются только к переменным, и при этом размер новой схемы не превышает $p(s, n)$, где p — некоторый фиксированный полином.

Домашнее задание 18

1. Докажите, что функцию $x \oplus y \oplus z$ можно вычислить схемой, использующей лишь одно отрицание (и много конъюнкций и дизъюнкций).
2. Функция $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ истинна на последних 9 наборах значений переменных (в стандартном порядке) и только на них. Постройте схему, вычисляющую f , использующую только дизъюнкцию и конъюнкцию длины не более 15.
3. Постройте схему полиномиального размера, проверяющую, что во входное слово входит подслово 101. Можно считать, что длина входного слова не меньше 3.
4. Постройте схему полиномиального размера, умножающую двоичное число на 3.
5. Постройте схему полиномиального размера, проверяющую, будет ли n -битное двоичное число делиться на 3.
6. Докажите, что в базисе $\{\oplus, \cdot, 1\}$ любая функция от n переменных вычисляется схемой длины не более 2^{n+1} .
7. Булева функция $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ называется *линейной*, если она представляется в виде

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_0 \oplus (a_1 \wedge x_1) \oplus \dots \oplus (a_n \wedge x_n)$$

для некоторого набора $(a_1, \dots, a_n) \in \{0, 1\}^n$ булевых коэффициентов.

Докажите, что схема, использующая только линейные функции, вычисляет линейную функцию.

8. Докажите, если $f(x_1, \dots, x_n)$ — нелинейная функция, то конъюнкция $x_1 \wedge x_2$ вычисляется схемой в базисе $\{0, 1, \neg, f\}$.