Дискретная математика **Основной поток**

Занятие 19. Булевы схемы-2.

Если в задаче упоминается граф, предполагается, что схема имеет $\binom{n}{2}$ входов, каждый из которых означает, есть или нет в графе соответствующее ребро.

1. Булева функция $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ называется симметрической, если ее значение не меняется при перестановке переменных. Докажите, что всякую симметрическую булеву функцию можно вычислить булевой схемой полиномиального от n размера.

2. Постройте схему полиномиального размера, проверяющую, будет ли граф полным.

3. Постройте схему полиномиального размера для функции $f\colon \{0,1\}^{\binom{n}{2}} \to \{0,1\}$, которая равна 1 тогда и только тогда, когда данный на вход граф раскрашиваем в два цвета.

4. Постройте схему полиномиального размера, проверяющую, будет ли граф регулярным.

5. а) Докажите, что схема, вычисляющая функцию, $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, основанная на СДНФ (СКНФ) имеет размер не более $O(n2^n)$.

б) Придумайте, как упростить схему, добившись оценки $O(2^n)$.

6. Докажите, что схема, использующая только монотонные функции, вычисляет монотонную функцию.

7. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — немонотонная функция. Докажите, что $\neg x_i$ вычисляется в базисе $\{0, 1, f\}$.

8. Докажите, что для всех достаточно больших n существует монотонная булева функция $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, которую нельзя вычислить схемой размера меньше n^{100}. (Булева функция f называется монотонной, если из неравенств $x_i \leqslant y_i$ для всех i следует неравенство $f(x_1, \ldots, x_n) \leqslant f(y_1, \ldots, y_n)$.)

Дискретная математика **Основной поток**

Домашнее задание 19

1. Постройте схему полиномиального размера для функции $f\colon \{0,1\}^{\binom{n}{2}} \to \{0,1\}$, равной единице, тогда и только тогда, когда в данном на вход графе есть изолированные вершины.

2. Треугольником в графе называется тройка вершин, попарно соединенных между собой. Постройте схему полиномиального размера для функции $f\colon \{0,1\}^{\binom{n}{2}} \to \{0,1\}$, равной единице, тогда и только тогда, когда в данном на вход графе нет треугольников.

3. Постройте схему полиномиального размера для функции $f\colon \{0,1\}^{\binom{n}{2}} \to \{0,1\}$, равной единице, тогда и только тогда, когда данный на вход граф связен и содержит эйлеров цикл.

4. Докажите, что любую монотонную функцию от n переменных можно вычислить схемой размера $O(n2^n)$, используя только дизъюнкцию и конъюнкцию.

5. Докажите, что существует функция от n переменных ($n > 2$), не вычисляющаяся в базисе $\{\oplus, \cdot, 1\}$ схемой размера n^{100}.

6. Докажите, что в базисе $\{\oplus, \cdot, 1\}$ любая функция от n переменных вычисляется схемой размера не более 2^{n+1}.

7. Булева функция $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ называется *линейной*, если она представляется в виде

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_0 \oplus (a_1 \wedge x_1) \oplus \dots \oplus (a_n \wedge x_n)$$

для некоторого набора $(a_1, \dots a_n) \in \{0,1\}^n$ булевых коэффициентов.

Докажите, что схема, использующая только линейные функции, вычисляет линейную функцию.

8. Докажите, если $f(x_1, \dots, x_n)$ — нелинейная функция, то конъюнкция $x_1 \wedge x_2$ вычисляется схемой в базисе $\{0, 1, \neg, f\}$.