Дискретная математика **Пилотный поток**

Неделя 19. Вычислимость

1. Докажите, что проекция перечислимого множества $A \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ на первую координату перечислима. (Проекция A на первую координату определяется как $\{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N}\ (x, y) \in A\}$.)

2. Докажите, что если множества A и B перечислимы, то и множества $A \cup B$, $A \cap B$ перечислимы.

3. Докажите, что если A, B — перечислимые множества, то и множество $A \times B$ перечислимо.

4. Перечислимо ли множество таких натуральных n, что уравнение $x^n + y^{n+1} = z^{n+2}$ имеет решение в положительных целых числах?

5. Докажите, что если всюду определенная функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ вычислима и множество $A \subset \mathbb{N}$ разрешимо, то прообраз $\{x \mid f(x) \in A\}$ множества A разрешим.

6. Докажите, что если существует алгоритм перечисления элементов множества S в возрастающем порядке, то это множество разрешимо.

7. Пусть S — это множество таких n, что десятичная запись числа e содержит по крайней мере n девяток подряд. Докажите, что множество S разрешимое.

8. Всюду определенная функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ невозрастающая. Верно ли, что f вычислима?

9. Докажите, что если существует алгоритм перечисления элементов некоторого множества, то существует также и алгоритм, который перечисляет элементы множества без повторений.

10. Докажите, что функция

$$c\colon (x, y) \mapsto \binom{x+y+1}{2} + y$$

является вычислимой вместе с обратной биекцией между множествами $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ и $\mathbb{N}$.

11. Диофантово уравнение — это уравнение вида $P(x_1, \ldots, x_n) = 0$, где P — многочлен с целыми коэффициентами. Докажите перечислимость множества диофантовых уравнений, у которых есть целочисленные решения.

12. Докажите, что не существует универсальной вычислимой функции для класса вычислимых всюду определенных функций, то есть не существует такой всюду определенной вычислимой функции $U\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что для любой вычислимой всюду определённой функции $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ найдется такое p, что $U(p, x) = f(x)$ для всех x.

13. Докажите, что любое бесконечное перечислимое множество содержит бесконечное разрешимое подмножество.

Дискретная математика **Пилотный поток**

Домашнее задание 19

1. Докажите, что множество рациональных чисел, меньших e, разрешимо.

2. Вычислима ли следующая функция?

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{если существует бесконечно много пар простых чисел } p,\ p+2, \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

3. Всюду определенная функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ строго возрастает и множество ее значений содержит все натуральные числа за исключением конечного множества. Докажите, что f вычислима.

4. Докажите, что если частичная функция f из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$ вычислима и $A \subset \mathbb{N}$ — перечислимое множество то и образ $\{f(x) \mid x \in A\}$, и прообраз $\{x \mid f(x) \in A\}$ множества A перечислимы.

5. Докажите, что бесконечное подмножество $\mathbb{N}$ разрешимо тогда и только тогда, когда оно является областью значений всюду определенной возрастающей вычислимой функции из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$.

6. Существуют ли такие множества $X, Y \subseteq \mathbb{N}$, что X разрешимо, $X \cup Y$ разрешимо, а Y не разрешимо?